

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРИВЕДЕННОЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ЖЕСТКОСТИ КРУЧЕНИЯ ДЛЯ СЕЧЕНИЙ В ФОРМЕ ФИГУР, ПРОМЕЖУТОЧНЫХ МЕЖДУ КРУГОМ И ПРАВИЛЬНЫМ МНОГОУГОЛЬНИКОМ

Проблема расчета упругих стержней на кручение является одной из наиболее важных современных проблем в области строительной механики. Многие строительные конструкции в виде стержневых систем испытывают деформации кручения. При расчете таких конструкций в первую очередь определяется геометрическая жесткость их сечений. Этот физический параметр используется при оценке напряженно-деформированного состояния элементов конструкций, работающих на кручение. В строительной механике и теории упругости известно лишь несколько решений по определению геометрической жесткости сечений в виде эллипса, прямоугольника, равнобедренного треугольника. При более сложных сечениях используются приближенные методы расчета, в основном численные.

В последние два десятилетия при исследовании и решении двумерных задач теории упругости и технической теории пластинок активно развивается и используется геометрический метод – метод интерполяции по коэффициенту формы (МИКФ), в основе которого лежат изопериметрические свойства интегральной геометрической характеристики формы области (пластинки, мембраны, сечения). Этот метод применим к решению задач упругого кручения стержней, однако до настоящего времени он не получил достойного развития. В настоящей статье с помощью МИКФ решается задача по определению приведенной геометрической жесткости сечений для стержней с сечениями в виде фигур, промежуточных между кругом и правильными многоугольниками. Круглое сечение и сечения в виде правильного многоугольника используются в качестве «опорных» сечений с известными значениями приведенной геометрической жесткости. Подмножество сечений между кругом и правильным многоугольником получается путем последовательного синхронного отсечения от круга его частей прямыми, параллельными сторонам правильного многоугольника. Интерполяция «опорных» решений для любых сечений из рассматриваемого подмножества осуществляется по коэффициенту формы. Построены простые интерполяционные функции, позволяющие по элементарным формулам найти искомое решение для рассматриваемого подмножества форм сечений с использованием единственного аргумента – коэффициента формы.

Приведенное в статье графическое изображение зависимостей «приведенная геометрическая жесткость – коэффициент формы» позволяет наглядно представить место искомого решения в рассматриваемом подмножестве форм сечений.

Ключевые слова: *приведенная геометрическая жесткость сечений, деформации кручения, коэффициент формы, изопериметрические свойства.*

Стержни, воспринимающие деформации кручения, широко распространены в строительстве и машиностроении, в частности в авиа- и судостроении [1, ..., 4]. Определение геометрической жесткости кручения сечений является одной из важнейших проблем строительной механики. Для стержней сложных форм и сложными граничными условиями используются в основном приближенные методы решения (вариационные и численные). При использовании численных методов часто теряется физическая сущность задачи из-за затруднений в обобщении и распространении полученных результатов на множество конструкций определенного вида. Приближенные геометрические методы решения этой динамической задачи позволяют избежать указанного недостатка.

В настоящей статье будут рассмотрены стержни, форма которых является промежуточной между кругом и правильными многоугольниками (рисунок 1). Такие фигуры могут получаться путем последовательного отсечения от круга его частей прямыми, параллельными сторонам правильного многоугольника, вписанного в заданный круг, и отстоящими от центра на одинаковом расстоянии.

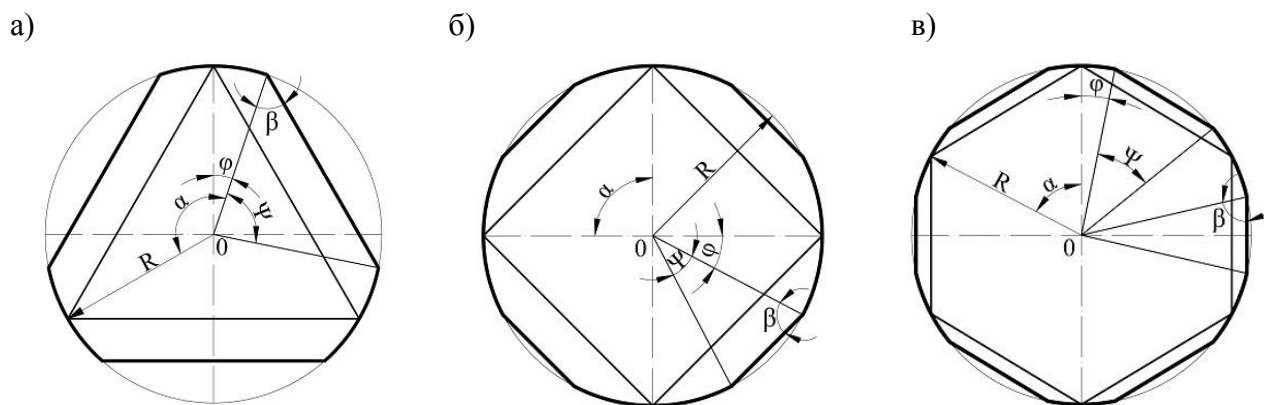


Рисунок 1 – Способы получения фигур, промежуточных между кругом и правильным многоугольником

При исследовании напряженно-деформированного состояния стержня, испытывающего деформации кручения, в первую очередь нужно определить геометрическую жесткость кручения I_k .

Среди известных геометрических методов решения двумерных задач наиболее распространенным является эффективный инженерный метод – метод интерполяции по коэффициенту формы (МИКФ). В его основе лежат изопериметрические свойства интегральной геометрической характеристики области с выпуклым контуром – коэффициента формы. Подробные сведения о ней и методика решения задач технической теории пластинок, а также задачи теории кручения упругих призматических стержней с помощью МИКФ приведены в монографии [5]. Развитием этого метода активно занимаются ученые, аспиранты и магистры Орловского госуниверситета имени И.С. Тургенева [6...11]. К задачам кручения упругих стержней геометрический метод с использованием свойств коэффициента формы был впервые применен В.И. Коробко [6].

Для стержней, рассматриваемых в настоящей статье, коэффициент формы определяется по формуле [5]

$$K_f = 2n \left(\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} + \frac{\alpha}{2} - \frac{\varphi}{2} \right). \quad (1)$$

Здесь n – количество сторон многоугольника, а остальные обозначения указаны на рисунке 1.

Таблица 1 – Результаты расчета стержней по приближенным аналитическим зависимостям

Параметры сечения	Сечения в виде правильных многоугольников				
	3	4	6	8	круг
1	2	3	4	5	6
$\alpha/2$, град	60	45	30	22,5	0
$\varphi/2$, рад	1,0472	0,7854	0,5236	0,3927	0
K_f	10,3923	8,0000	6,9282	6,6274	2π
$[i_k]$	0,1155	0,1406	0,1533	0,1574	0,1592
K_f^{-1}	0,0962	0,125	0,1443	0,1509	0,1592
Δ , %	16,71	11,10	5,87	4,13	0
i_k по (5)	0,1155	0,1406	0,1526	0,1558	0,1592
Δ , %	0	0	0,47	1,02	0

В данной работе задача об определении I_k для любого поперечного сечения представлена соотношением

$$I_k \geq K_I A^2 / K_f, \quad (2)$$

где K_I – коэффициент пропорциональности, который будет разным для различных характерных подмножеств форм сечений (треугольные, прямоугольные, трапециевидные и т.п.), или для некоторого подмножества форм сечений, объединенных одним непрерывным или дискретным геометрическим преобразованием; A – площадь пластинки. В монографии [5] показано,

что для различных характерных подмножеств форм сечений, целесообразно использовать зависимости:

$$I_k \geq K_I A^2 / K_f^n \text{ или } I_k \geq A^2 (K_I + B / K_f), \quad (3)$$

где имеется два неизвестных параметра. Если рассматривается некоторое подмножество сечений, объединенных одним непрерывным или дискретным геометрическим преобразованием, в котором имеются два сечения с известными решениями, то тогда неизвестные параметры в выражении (3) могут быть найдены.

В дальнейшем целесообразней определять приведенную геометрическую жесткость сечения $i_k = I_k / A^2$:

$$i_k \geq K_I / K_f^n$$

$$\text{или } i_k \geq K_I + B / K_f, \quad (4)$$

Поскольку коэффициент формы обладает изопериметрическими свойствами, то такими же свойствами будет обладать и приведенная геометрическая жесткость кручения i_k . Известные результаты, включенные в таблицу 1, заимствованы из работ [2, 3, 5] и справочников [1, 4]. Использование неравенства (2) дает погрешность до 17%. При аппроксимации известных решений с использованием аргумента K_f получаем зависимость

$$i_k = 0,03114 + \frac{2,0254}{K_f} + \frac{5,2117}{K_f^2}, \quad (5)$$

которая удовлетворяет табличным данным для сечений в виде правильных фигур с погрешностью 1%.

Таблица 2 – Значения K_f и приведенной геометрической жесткости сечения для стержней, промежуточных между кругом и в виде правильного многоугольника

$\varphi/2$	Сечения в форме правильных фигур				$\varphi/2$	Сечения в форме правильных фигур			
	3	4	6	8		3	4	6	8
0	<u>6,28318</u> 0,1592	<u>6,28318</u> 0,1592	<u>6,28318</u> 0,1592	<u>6,28318</u> 0,1592	30	<u>6,60569</u> 0,1560	<u>6,71320</u> 0,1549	<u>6,92820</u> 0,1526	–
5	<u>6,28452</u> 0,1592	<u>6,28496</u> 0,1592	<u>6,28585</u> 0,1592	<u>6,28674</u> 0,1592	35	<u>6,81924</u> 0,1538	<u>6,99792</u> 0,1519	–	–
10	<u>6,29395</u> 0,1591	<u>6,29754</u> 0,1591	<u>6,30471</u> 0,1590	<u>6,31189</u> 0,1589	40	<u>7,12900</u> 0,1504	<u>7,41093</u> 0,1473	–	–
15	<u>6,32008</u> 0,1589	<u>6,33238</u> 0,1587	<u>6,35698</u> 0,1585	<u>6,38158</u> 0,1583	45	<u>7,57080</u> 0,1455	<u>8,00000</u> 0,1406	–	–
20	<u>6,37261</u> 0,1584	<u>6,40242</u> 0,1581	<u>6,46204</u> 0,1575	<u>6,52166</u> 0,1569	50	<u>8,19772</u> 0,1384	–	–	–
22,5	–	–	–	<u>6,62742</u> 0,1558	55	<u>9,08248</u> 0,1287	–	–	–
25	<u>6,46304</u> 0,1575	<u>6,52299</u> 0,1569	<u>6,64289</u> 0,1557	–	60	<u>10,3923</u> 0,1155	–	–	–

Примечания:

1 В верхней части ячейки приведены значения K_f , в нижней части – значения основных геометрических жесткостей сечений.

2 Жирным шрифтом выделены значения K_f и геометрической жесткостей сечения для стержней в виде правильных фигур.

При определении геометрической жесткости кручения сечений стержней, получаемых при помощи преобразований, указанных на рисунке 1, зависимость (5) может использоваться для получения «опорных» решений.

Воспользовавшись второй формулой из (3) получим следующие решения для сечений, промежуточных между правильными многоугольниками и кругом:

– при преобразовании сечения в виде правильного треугольника в круглый

$$i_k = 0,3272(K_f)^{-1,616}; \quad (7)$$

– при преобразовании сечения в виде квадрата в круглое

$$i_k = 0,1661(K_f)^{-1,98}; \quad (8)$$

– при преобразовании сечения в виде правильного шестиугольника в круглое

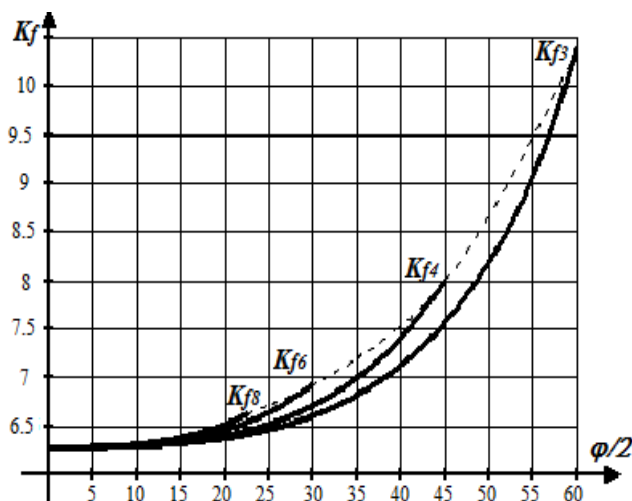
$$i_k = 0,0880(K_f)^{-2,323}; \quad (9)$$

– при преобразовании сечения в виде правильного восьмиугольника в круглое

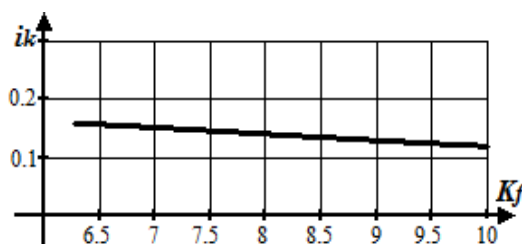
$$i_k = 0,0660(K_f)^{-2,479}. \quad (10)$$

Результаты расчета таких стержней представлены в таблице 2.

Графически данные таблиц 1 и 2 изображены на рисунке 2, где в первом случае по оси абсцисс откладываются значения угла $\varphi/2$, а по оси ординат – значения коэффициента формы, а во втором случае по оси абсцисс откладываются значения коэффициента формы стержней, а по оси ординат – значения приведенных геометрических жесткостей сечений. Цифровые индексы 3, 4, 6, 8 при K_f на графике относятся к стержням в виде правильных многоугольников.



а) графические данные таблицы 1



б) графические данные таблицы 2

Рисунок 2 – Зависимости $K_f - \varphi/2$ и $i_k - K_f$

Анализ графиков на рисунке 2 позволяет сделать следующие выводы:

1 С учетом изопериметрических свойств коэффициента формы [5] пунктирная кривая на рисунке 2-а является верхней границей для всего подмножества рассматриваемых сечений частотного параметра.

2 Все искомые значения приведенной геометрической жесткости рассматриваемых сечений описываются одной зависимостью (5) в диапазоне $2\pi \leq K_f \leq 10,3923$, где единственным аргументом является коэффициент формы. Зависимости (7), ..., (10) дают решения несколько с большей точностью.

3 Построенные интерполяционные полиномы позволяют по элементарным формулам находить значения приведенной геометрической жесткости рассматриваемых сечений.

4 Графическое изображение зависимостей $i_k - K_f$ позволяет наглядно представить место искомого решения в рассматриваемом подмножестве форм сечений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1 Прочность, устойчивость, колебания: Справочник в трех томах. Под общей редакцией И.А. Биргера и Я.Г. Пановко. – М.: Машиностроение, 1968. – 832 с.
- 2 Суслов, В.П. Строительная механика корабля и основы теории упругости [Текст] / В.П. Суслов, Качанов Ю.П. Спихтаренко В.Н. – Л.: Судостроение, 1972. – 720 с.
- 3 Феофанов, А.В. Строительная механика авиационных конструкций [Текст] / А.В. Феофанов. М.: Машиностроение, 1964. – 136 с.
- 4 Справочник по теории упругости [Текст]. – Киев: Изд-во «Будівельник», 1974. – 419 с.
- 5 Коробко, А.В. Геометрическое моделирование формы области в двумерных задачах теории упругости [Текст] / А.В. Коробко. – М.: Изд-во АСВ, 1999. – 302 с.
- 6 Коробко, В.И. Графическое представление границ изменения геометрической жесткости сечений в виде выпуклых фигур при кручении [Текст] / В.И. Коробко // Известия высших учебных заведений. Машиностроение. – 1986. - № 3. – С. 3-7.
- 7 Коробко, В.И., Строительная механика пластинок [Текст] / В.И. Коробко, А.В. Коробко. – М.: Издательский дом «Спектр», 2010. – 410 с.
- 8 Савин, С.Ю. Расчет ортотропных пластин в виде правильных многоугольников с однородными граничными условиями [Текст] / С.Ю. Савин, В.И. Коробко // Строительство и реконструкция. – 2011. - № 1. – С. 3-11.
- 9 Савин, С.Ю. Изгиб ортотропных пластинок в виде параллелограмма с однородными и комбинированными граничными условиями [Текст] / Савин, С.Ю., В.И. Коробко, // Строительная механика и расчет сооружений. – 2012. - № 2. – С. 18-23.
- 10 Черняев, А.А. Определение максимального прогиба ромбических пластинок с комбинированными граничными условиями с использованием отношения конформных радиусов [Текст] / А.А. Черняев, В.И. Коробко // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2011. – № 4. – С. 21-25.
- 11 Черняев, А.А. К вопросу расчета пластинок средней толщины из условий жесткости [Текст] / А.А. Черняев // Региональная архитектура и строительство. – 2012. - № 1. – С. 83-89.

Коробко Андрей Викторович

ФГБОУ ВО «ОГУ имени И.С. Тургенева», г. Орел

Доктор технических наук, профессор, профессор кафедры технической механики и инженерной графики

E-mail: sapr@ostu.ru

Балихина Юлия Евгеньевна

ФГБОУ ВО «ОГУ имени И.С. Тургенева», г. Орел

Аспирант кафедры строительных конструкций и материалов

E-mail: jbalikhina@gmail.com

A.V. KOROBKO, Y.E. BALIKHINA

THE DEFINITION OF THE GEOMETRIC TORSIONAL RIGIDITY FOR SECTIONS IN THE SHAPE OF THE FIGURE INTERMEDIATE BETWEEN A CIRCLE AND A REGULAR POLYGON

The problem of calculating elastic torsion bars is one of the most important today's problems in the field of structural mechanics. Many construction and engineering structures in the form of bar systems undergo torsional deformation. The geometric stiffness of its cross-sections is determined when calculating such structures in the first place. This physical parameter is used in assessing the stress-strain state of structural elements working on torsion. In the structural mechanics and the elasticity theory, only a few solutions for determining of the geometric stiffness of sections are known in the form of an ellipse, a rectangle, an isosceles triangle. Approximate methods of calculation are used at more complex cross-sections, mostly numerical ones.

In the last two decades, in the study and solution of two-dimensional problems of the elasticity theory and the technical theory of plates, the geometric method, the interpolation method of the shape factor (IMSF), actively develops and uses, the basis of which are the isoperimetric properties of the integral geometrical characteristic of the region shape (plates, membranes, sections). This method is applicable for the task of elastic torsion of bars, but to date it has not received a decent development. In

this article, with the help of IMSF, the reduced geometric stiffness of cross-sections for bars with sections in the form of figures intermediate between a circle and regular polygons is determined. A circular cross-section and sections in the form of a regular polygon are used as "reference" sections with known values of reduced geometric stiffness.

A subset of sections between a circle and a regular polygon is obtained by successive synchronous clipping of its parts from the circle by straight lines, which are parallel to the sides of the regular polygon. Interpolation of "reference" solutions for any sections from the considered subset is carried out by the shape factor. Simple interpolation functions are constructed that allow one to find the desired solution for the considered subset of cross-section forms by elementary formulas using a single argument - the shape factor.

The presented in the article graphical depiction of the dependencies "reduced geometric stiffness - the shape factor" makes it possible to visualize the place of the desired solution in the subset of the cross-section forms under consideration.

Keywords: reduced geometric rigidity of sections, torsion, shape factor, isoperimetric properties.

REFERENCES

- 1 Prochnost', ustoychivost', kolebaniya: Spravochnik v trekh tomakh. Pod obshchey redaktsiyey I.A. Birge-ra i YA.G. Panovko. – M.: Mashinostroyeniye, 1968. – 832 s.
- 2 Suslov, V.P. Stroitel'naya mekhanika korablya i osnovy teorii uprugosti [Tekst] / V.P. Suslov, Kachanov YU.P. Spikhtarenko V.N. – L.: Sudostroyeniye, 1972. – 720 s.
- 3 Feofanov, A.V. Stroitel'naya mekhanika aviatsionnykh konstruksiy [Tekst] / A.V. Feofanov. M.: Mashinostroyeniye, 1964. – 136 s.
- 4 Spravochnik po teorii uprugosti [Tekst]. – Kiyev: Izd-vo «Budivel'nik, 1974. – 419 s.
- 5 Korobko, A.V. Geometricheskoye modelirovaniye formy oblasti v dvumernykh zadachakh teorii uprugosti [Tekst] / A.V. Korobko. – M.: Izd-vo ASV, 1999. – 302 s.
- 6 Korobko, V.I. Graficheskoye predstavleniye granits izmeneniya geometricheskoy zhestkosti secheniy v vide vypuklykh figur pri kruchenii [Tekst] / V.I. Korobko // Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Mashinostroyeniye. – 1986. - № 3. – S. 3-7.
- 7 Korobko, V.I., Stroitel'naya mekhanika plastinok [Tekst] / V.I. Korobko, A.V. Korobko. – M.: Iz-datel'skiy dom «Spektr», 2010. – 410 s.
- 8 Savin, S.YU. Raschet ortotropnykh plastin v vide pravil'nykh mnogougol'nikov s odnorodnymi granichnymi usloviyami [Tekst] / S.YU. Savin, V.I. Korobko // Stroitel'stvo i rekonstruktsiya. – 2011. - № 1. – S. 3-11.
- 9 Savin, S.YU. Izgib ortotropnykh plastinok v vide parallelogramma s odnorodnymi i kombinirovannymi granichnymi usloviyami [Tekst] / Savin, S.YU., V.I. Korobko, // Stroitel'naya mekhanika i raschet so-oruzheniy. – 2012. - № 2. – S. 18-23.
- 10 Chernyayev, A.A. Opredeleyeniye maksimal'nogo progiba rombicheskikh plastinok s kombinirovannymi granichnymi usloviyami s ispol'zovaniyem otnosheniya konformnykh radiusov [Tekst] / A.A. Chernyayev, V.I. Korobko // Stroitel'naya mekhanika inzhenernykh konstruksiy i sooruzheniy. – 2011. – № 4. – S. 21-25.
- 11 Chernyayev, A.A. K voprosu rascheta plastinok sredney tolshchiny iz usloviy zhestkosti [Tekst] / A.A. Chernyayev // Regional'naya arkhitektura i stroitel'stvo. – 2012. - № 1. – S. 83-89.

A.V. Korobko

OSU named after I.S. Turgenev

Doctor of Tech. Sciences, Professor, Department Technical Mechanics and Engineering Graphics

E-mail: sapr@ostu.ru

Y.E. Balikhina

OSU named after I.S. Turgenev

Postgraduate student, Department of Building construction and materials

E-mail: jbalikhina@gmail.com