

КОРОБКО А.В., ВЕПРИНЦЕВА Н.В., ШЛЯХОВ С.В.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОСНОВНОЙ ЧАСТОТЫ КОЛЕБАНИЙ МЕМБРАН В ВИДЕ КРУГОВЫХ ЛУНОЧЕК

В статье рассматривается возможность применения метода интерполяции по коэффициенту формы к определению основной частоты колебаний мембран в виде симметричных и несимметричных круговых луночек. Теоретически показано, что собственное значение дифференциального уравнения колебаний мембран зависит только от коэффициента формы. Приведены примеры выбора «опорных» решений и численно подтверждено, что для всех мембран в виде симметричных и несимметричных круговых луночек можно использовать лишь одну аналитическую зависимость с аргументом в виде коэффициента формы. Исследованы экстремальные свойства луночек в виде симметричных луночек. Доказано, что из всех мембран в виде равновеликих круговых луночек наименьшее значение основной частоты колебаний имеет мембрана в виде симметричной луночки. Мембраны используются в качестве конструктивных элементов мембранных покрытий уникальных зданий и сооружений.

Ключевые слова: симметричные и несимметричные круговые луночки, колебания мембран, метод интерполяции по коэффициенту формы.

Метод интерполяции по коэффициенту формы (МИКФ) активно развивается в последние годы в Орловском государственном университете им. И.С. Тургенева при исследовании и решении двумерных задач теории упругости и технической теории пластинок [1 - 8]. Теоретические основы этого метода, его геометрическая и физическая сущность подробно изложены в монографии [1]. Его развитием активно занимаются молодые ученые, аспиранты и студенты университета: в работах [2, 3, 4] этот метод применялся к определению максимального прогиба и основной частоты колебаний упругих изотропных пластинок; в статьях [5 - 7] метод получил развитие при расчете пластинок на упругом основании; в статьях [8 - 10] он использовался для решения задач статики и динамики ортотропных пластинок; в статьях [11 - 13] предложено существенное развитие МИКФ, которое заключается в том, что интерполяция опорных решений осуществляется не по коэффициенту формы а по отношению конформных радиусов.

По сравнению с другими приближенными методами решения подобных задач (вариационными методами, МКР, МКЭ) МИКФ позволяет свести решение сложной физической задачи к элементарной геометрической и, что самое главное, дает возможность представлять искомое решение в виде аналитических зависимостей, объединяющих определенные подмножества форм пластинок с различными граничными условиями.

Для более широкого внедрения МИКФ в проектную практику необходимо развивать этот метод применительно к определенным классам форм мембран с учетом их изопериметрических свойств и закономерностей изменения при различных геометрических преобразованиях. Своеобразный класс форм мембран представляют собой фигуры в виде частей круга (секторы, сегменты, луночки, круг с отсеченными частями и т.д.), которые широко используются в качестве конструктивных элементов строительных и машиностроительных конструкций. В представленной статье МИКФ применяется для определения собственной частоты колебаний мембран в виде симметричных и несимметричных круговых луночек.

Рассмотрим дифференциальное уравнение свободных колебаний шарнирно опертых по контуру и равномерно растянутых мембран [14]:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \lambda^2 w, \quad \text{или} \quad \Delta^2 w - \lambda^2 w = 0, \quad (1)$$

где $\lambda^2 = \omega \sqrt{mA/p}$ – собственное значение дифференциального уравнения (1); ω – круговая частота колебаний мембран; m – масса единицы площади; p – усилие равномерного растяже-

ния мембраны по контуру; A – площадь мембраны.. Подставляя в это уравнение функцию прогибов $w(x,y) = w_0 f(x,y)$, где $f(x,y)$ единичная функция, удовлетворяющая условию $0 \leq f(x,y) \leq 1$, после преобразований получим:

$$\Delta^2 f + \lambda^2 f = 0.$$

Проинтегрируем правую и левую часть этого уравнения по площади мембраны и запишем соотношение относительно параметра λ^2 :

$$\lambda^2 = \frac{\iint_A \Delta^2 f dA}{\iint_A f dA}. \quad (2)$$

Проведя преобразование этого выражения, подставляя в него однопараметрическую функцию прогибов, в работе [1] было получено соотношение

$$\lambda^2 = \frac{K_f}{2A} \int_0^l (g''\rho + g') d\rho \bigg/ \int_0^l g \rho d\rho, \quad (3)$$

где

$$K_f = \oint_L \left(1 + \frac{(r')^2}{r''} \right) d\varphi$$

Значения определенных интегралов в выражении (3) являются постоянными числами, зависящими от точности выбора функции $g(\rho)$. Поэтому их можно внести в эту формулу в виде коэффициента пропорциональности:

$$\lambda^2 \approx K_\lambda K_f / A. \quad (4)$$

Знак приближенного равенства поставлен в этом выражении в связи с тем, что ни для одной из форм мембран невозможно подобрать функцию прогибов в виде однопараметрической функции $g(\rho)$, которая бы точно удовлетворяла известным решениям.

Выражение (4) показывает, что значение параметра λ функционально зависит от коэффициента формы мембраны (пластинки) и, как показано в работе [1], для ограниченного множества пластинок, связанных одним непрерывным или дискретным геометрическим преобразованием, аппроксимирующую функцию рекомендуется выбирать в виде степенных зависимостей:

$$\lambda^2 = K_\lambda (K_f^n) \frac{P}{Am}; \quad \text{или} \quad \lambda^2 = K_\lambda \sqrt{K_f^2 + C} \frac{P}{Am}. \quad (5)$$

где неизвестные параметры находятся по двум известным (опорным) решениям.

Применим методику МИКФ для подсчета основной частоты колебаний пластинок в виде симметричных и несимметричных круговых луночек.

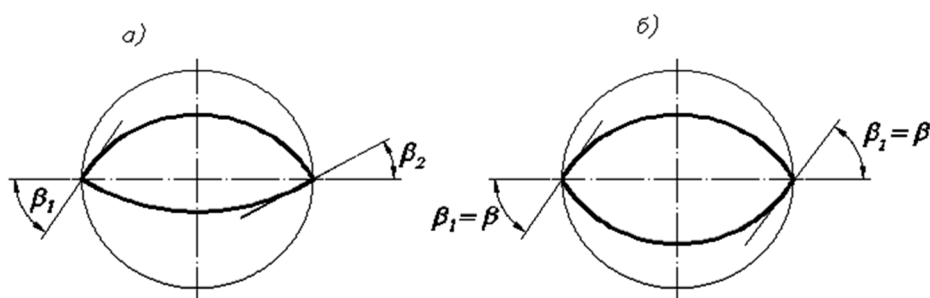


Рисунок 1 – Несимметричные и симметричные круговые луночки

Несимметричные круговые луночки (рисунок 1-а) характеризуются двумя углами β_1 и β_2 между диаметром круга и касательными, проведенными в углы луночки. При равенстве этих углов ($\beta_1 = \beta_2 = \beta$) луночка становится симметричной (рисунок 1-б).

Несимметричные круговые луночки (рисунок 1-а) характеризуются двумя углами β_1 и β_2 между диаметром круга и касательными, проведенными в углы луночки. При равенстве этих углов ($\beta_1 = \beta_2 = \beta$) луночка становится симметричной (рисунок 1-б).

Рассмотрим несимметричные луночки, у которых $\beta_1 = \pi/2$, а $\beta_2 \leq \pi/2$ (рисунок 2-б). Для них при использовании МИКФ в качестве опорных фигур можно выбрать круглую мембрану ($\lambda_1^2 = 18,156 p/(Am)$, $K_{f1} = 2\pi$) и полукруглую мембрану ($\lambda_2^2 = 23,062 p/(Am)$, $K_{f2} = 8,7915$).

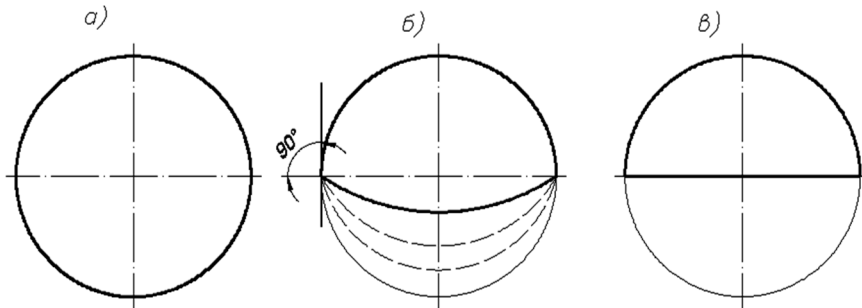


Рисунок 2 – Схема геометрического преобразования мембран

Используя указанные исходные данные и методику МИКФ, получим:

$$\lambda^2 = 4,906 K_f^{0,712} p/(Am), \quad (6) \quad \lambda^2 = 2,313 \sqrt{K_f^2 + 22,162} p/(Am). \quad (7)$$

Симметричные круговые луночки (рисунок 4) можно получить из сегмента (рисунок 3-а), построенного на диаметре заданного круга, путем постепенного добавления других сегментов снизу (см. пунктирные линии на рисунке 3-а). При таком геометрическом преобразовании заданной мембраны в виде сегмента в пределе получится мембрана в виде несимметричной круговой луночки (рисунок 3-в), для определения основной частоты колебаний которой, как было показано выше, можно использовать формулы (6) и (7).

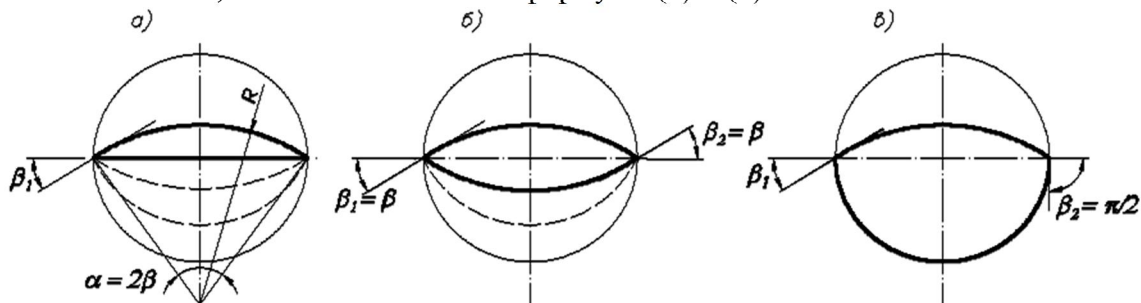


Рисунок 3 – Схема примененного геометрического преобразования

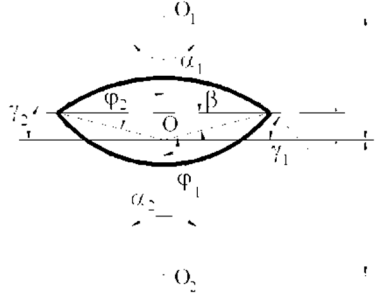
Пусть необходимо определить основную частоту колебаний мембраны в виде симметричной круговой луночки (рисунок 3-б) с углом $\beta = 60^\circ = \pi/3$ ($K_f = 7,22552$). В качестве первой опорной фигуры выберем сегмент (рисунок 4-а) с параметрами: $\beta = 60^\circ = \pi/3$ ($\alpha = 120^\circ = 2\pi/3$), $K_{f1} = 12,7249$ (см. таблицу) и по формуле (7) при $\alpha = \pi \rightarrow \lambda_1^2 = 31,484 p/(Am)$. В качестве второй опорной фигуры выберем несимметричную круговую луночку (рисунок 3-в) с параметрами: $\beta_1 = 60^\circ = \pi/3$, $\beta_2 = 90^\circ = \pi/2$, $K_{f2} = 6,4999$ и $\lambda_2^2 = 18,602 p/(Am)$. Используя методику МИКФ, получим:

$$\lambda^2 = 4,297 K_f^{0,783} p/(Am).$$

Подставляя в эту формулу значение коэффициента формы для заданной мембраны, получим: $\lambda^2 = 20,279 p/(Am)$. Сопоставим полученное решение с результатами, найденным по формулам (6) и (7) соответственно: $\lambda^2 = 20,124 p/(Am)$, $\lambda^2 = 20,004 p/(Am)$. Как видно, все

три решения незначительно отличаются друг от друга. Поэтому в дальнейшем для расчета любой симметричной и несимметричной луночки можно использовать зависимости (6) и (7).

Таблица 1 – Результаты расчета мембран по формуле (7)

 Рисунок 4 – Схема несимметричной круговой луночки				$K_{fa} = \min 2 \left[\frac{\pi - \arctg(\sin \gamma_1 \operatorname{ctg} \beta)}{\sin \gamma_1} + \frac{\arctg(\sin \gamma_2 \operatorname{ctg} \beta)}{\sin \gamma_2} \right],$ $\operatorname{ctg} \beta = \frac{\sin(\alpha_1 / 2)}{x_0 \cos(\alpha_1 / 2)}, \sin \gamma_1 = \arccos(x_1),$ $\sin \gamma_2 = \operatorname{sinarccos} \left\{ \cos(\alpha_2 / 2) + [\cos(\alpha_1 / 2) - x_0] \frac{\sin(\alpha_2 / 2)}{\sin(\alpha_1 / 2)} \right\}$						
$\beta_1 \backslash \beta_2$	90	80	70	60	50	40	30	20	10	0
90	$\frac{2\pi}{18,159}$									
80	$\frac{6,3071}{18,204}$	$\frac{6,3801}{18,339}$								
70	$\frac{6,3789}{18,337}$	$\frac{6,5043}{18,384}$	$\frac{6,6864}{18,914}$							
60	$\frac{6,4999}{18,563}$	$\frac{6,6832}{18,908}$	$\frac{6,9317}{19,381}$	$\frac{7,2552}{20,004}$						
50	$\frac{6,6734}{18,890}$	$\frac{6,9233}{19,364}$	$\frac{7,2503}{19,995}$	$\frac{7,6690}{20,814}$	$\frac{8,2021}{21,874}$					
40	$\frac{6,9063}{19,332}$	$\frac{7,2353}{19,966}$	$\frac{7,6582}{20,792}$	$\frac{8,1968}{21,863}$	$\frac{8,8847}{23,256}$	$\frac{9,7749}{25,095}$				
30	$\frac{7,2098}{19,916}$	$\frac{7,6362}{20,749}$	$\frac{8,1807}{21,831}$	$\frac{8,8760}{23,239}$	$\frac{9,7731}{25,090}$	$\frac{10,955}{27,579}$	$\frac{12,566}{31,038}$			
20	$\frac{7,6021}{20,682}$	$\frac{8,1530}{21,776}$	$\frac{8,8582}{23,203}$	$\frac{9,7679}{25,080}$	$\frac{10,963}{27,596}$	$\frac{12,582}{21,072}$	$\frac{14,878}{36,094}$	$\frac{18,371}{43,865}$		
10	$\frac{8,1126}{21,695}$	$\frac{8,8305}{23,146}$	$\frac{9,7590}{25,061}$	$\frac{10,980}{27,632}$	$\frac{12,632}{31,181}$	$\frac{14,965}{36,286}$	$\frac{18,480}{44,109}$	$\frac{24,352}{57,369}$	$\frac{36,183}{84,397}$	
0	$\frac{8,7915}{23,066}$	$\frac{9,7468}{25,036}$	$\frac{11,009}{27,694}$	$\frac{12,725}{31,382}$	$\frac{15,158}{36,712}$	$\frac{18,842}{44,921}$	$\frac{25,019}{58,884}$	$\frac{37,421}{87,237}$	$\frac{54,717}{127,03}$	$\frac{\infty}{0}$
Примечания: 1 В числителе находятся значения коэффициента формы мембран, а в знаменателе – основная частота колебаний. 2 В колонке 2 находятся результаты для мембран в виде несимметричных луночек, у которых $\beta_1 = \pi/2$ и $\beta_2 < \pi/2$; по нисходящей диагонали – результаты для симметричных луночек. 3. Ниже жирной линии расположены сомнительные результаты из-за наличия сильно острых углов.										

Рассмотрим мембрану в виде полукруга и применим к ней операцию симметризацию Штейнера относительно диаметра (рисунок 5). При этом полукруг преобразуется в симметричную круговую луночку. В соответствии с теоремой о симметризации, сформулированной в работе [11], основная частота колебаний полученной мембраны будет меньше, чем частота колебаний полукруглой мембраны. Доказать это утверждение можно, подсчитав значение коэффициента формы для полученной фигуры и сопоставив его с K_f для полукруга, поскольку и для одной и для другой мембраны основная частота определяется по одной и той же формуле (6) или (7).

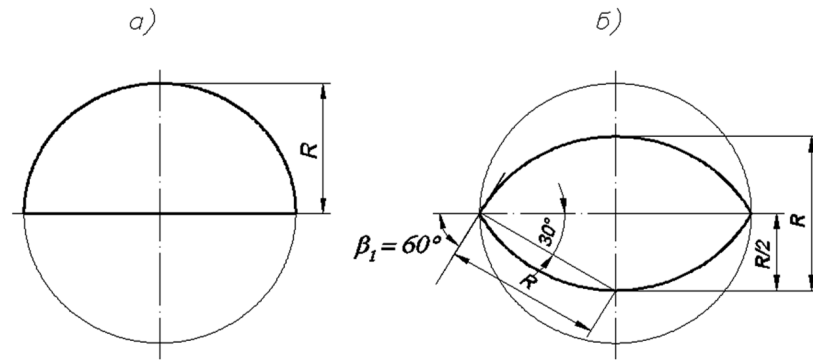


Рисунок 5 – Симметризация полукруга

При симметризации Штейнера ширина фигуры и площадь остаются постоянными, поэтому из геометрических соображений (рисунок 5) нетрудно подсчитать, что полученная при этом симметричная круговая луночка будет иметь угол $\beta = 60^\circ$. Для нее $K_f = 2\pi/\sin 60^\circ = 7,2552$, что существенно меньше $K_f = 8,7915$ для полукруга. Таким образом, из всех равновеликих мембран в виде круговой луночки наименьшее значение основной частоты колебаний имеет симметричная луночка.

Выводы

1 Для построения аппроксимирующих функций, для мембран в виде симметричных и несимметричных круговых луночек использовались зависимости вида

$$\lambda^2 = K_\omega (K_f)^n p/(Am) \quad \text{и} \quad \lambda^2 K_\omega \sqrt{K_f^2 + B} p/(Am).$$

По обеим формулам получаются результаты, практически не отличающиеся друг от друга.

2 Получены решения для подмножества мембран в виде симметричных и несимметричных круговых луночек

3 Установлены экстремальные свойства основной частоты колебаний мембран в виде симметричных круговых луночек: из всех равновеликих мембран в виде круговой луночки наименьшее значение основной частоты колебаний имеет симметричная луночка.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Коробко, А.В. Геометрическое моделирование формы области в двумерных задачах теории упругости [Текст] / А.В. Коробко. – М.: Изд-во АСВ стран СНГ, 1999. – 320 с.
2. Поля, Г. Изопериметрические неравенства в математической физике: Пер. с англ. Изд. 2-е, стереотипное [Текст] / Г. Поля, Г. Сеге. – М.: КомКнига, 2006. – 336 с.
3. Тимошенко, С.П. Пластинки и оболочки. Пер. с англ. Изд. 2-е, стереотипное [Текст] / С.П. Тимошенко, С. Войновский - Кригер. – М.: Изд-во Наука, 1966. – 636 с.
4. Савин, С.Ю. Изгиб ортотропных пластинок в виде прямоугольных треугольников с однородными и комбинированными граничными условиями / С.Ю. Савин // Безопасность строительного фонда России. Проблемы и решения: материалы международных академических чтений РААСН. – Курск: КурскГУ. – 2011. – С. 161-170.
5. Коробко, В.И. Расчет треугольных ортотропных пластинок с однородными граничными условиями методом интерполяции по коэффициенту формы / В.И. Коробко, С.Ю. Савин // Строительство и реконструкция. – 2010. – № 4. – С. 8-12.
6. Коробко, А.В. Программа определения максимального прогиба упругих ортотропных пластинок на основе метода интерполяции по коэффициенту формы / А.В. Коробко, М.Ю. Прокуров, С.Ю. Савин // Строительство и реконструкция. – 2012. – № 12. – С. 35-41.

7. Коробко, В.И. Определение основной частоты колебаний пластинок на упругом основании методом интерполяции по коэффициенту формы [Текст] / В.И. Коробко, А.А. Актуганов // Безопасность строительного фонда России. Проблемы и решения: материалы Международных академических чтений. – Курск: Курск. гос. ун-т, 2011. – С.89–96.
8. Коробко, В.И. Определение основной частоты колебаний пластинок на упругом основании с двумя коэффициентами постели методом интерполяции по коэффициенту формы [Текст] / В.И. Коробко, А.А. Актуганов // Проблемы оптимального проектирования сооружений: Доклады 3-й Всероссийской конференции, Новосибирск, 15 – 17 апреля, 2014 г. – Новосибирск: НГАСУ (Сибстрин), 2014. – С. 207–214.
9. Черняев, А.А. Геометрическое моделирование пластинчатых конструкций из условия жесткости / А.А. Черняев // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering / Международный журнал по расчету гражданских и строительных конструкций. – 2012. – Volume 8, Issue 4. – Pp. 66-77.
10. Черняев, А.А. К вопросу о расчете пластинок средней толщины из условия жесткости / А.А. Черняев // Региональная архитектура и строительство. – 2012. – №1. – С. 83-89.
11. Коробко, В.И. Изопериметрический метод в строительной механике: Теоретические основы изопериметрического метода. – Т. 1 [Текст] / В.И. Коробко. – М.: Издательство АСВ, 1997. – 390 с.

Коробко Андрей Викторович

ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева», г. Орел
Доктор технических наук, профессор кафедры «Теоретическая механика и инженерная графика»
Тел.: +7 (4862) 73-43-49
E-mail: ankor-66@mail.ru

Вепринцева Надежда Викторовна

ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева», г. Орел
Студентка магистратуры кафедры «Строительные конструкции и материалы»
Тел.: +7 (4862) 73-43-49
E-mail: veprintseva.nadejda@yandex.ru

Шляхов Станислав Владимирович

ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева», г. Орел
аспирант кафедры «Строительные конструкции и материалы»
Тел.: +7 (4862) 73-43-49
E-mail: shlyakhov.stas@mail.ru

A.V. KOROBKO, N.V. VEPRINTSEVA, S.V. SHLYAKOV

DETERMINATION OF THE MEMBRANES FUNDAMENTAL FREQUENCY OF OSCILLATIONS CIRCULAR LUNETTES

The article considers the possibility of applying the method of interpolation by the shape factor to the determination of the membranes fundamental frequency of oscillation in the form of symmetrical and nonsymmetrical circular lunettes. Theoretically shown, that the eigenvalue of the differential equation of membranes depends only on the form factor. Given examples of choice "support" solutions and it's numerically confirmed, that for all membranes in the form of symmetric and asymmetrical circular lunettes can use only an analytical dependence on the argument as a form factor. Extreme properties of the lunettes in the form of symmetrical lunettes were studied. It is proved that from all membranes in the form of equal circular lunettes the smallest value of the fundamental frequency of oscillations has a membrane in the form of symmetrical lunettes.

Key words: *symmetric and asymmetrical circular lunettes, oscillations of membranes, method of interpolation by the shape factor.*

BIBLIOGRAPHY

1. Korobko A.V. Geometricheskoe modelirovanie formy oblasti v dvumernyh zadachah teorii uprugosti [Tekst] / – М.: Izd-vo ASV stran SNG, 1999. – 320 s.
 2. Polia, G. Izoperimetricheskie neravenstva v matematicheskoy fizike: per. s angl. izd. 2-e, stereotipnoe [Tekst] / G. Polia, G. Sege. – М.: Komkniga, 2006. – 336 s.
- №4 (72) 2017 (июль-август)**

3. Timoshenko, S.P. Plastinki i obolochki. per. s angl. Izd. 2-e, stereotipnoe –[Tekst] / S.P. Timoshenko, S. Vojnovskij-Kruger. – M.: Izd-vo nauka, 1966. – 636 s.
4. Savin, S.U. Izgib ortotropnyh plastinok v vide pryamougolnyh treugolnikov s odnorodnymi i kombinirovannymi granichnymi usloviyami [Tekst] / S.U. Savin // Bezopasnost stroitelnogo fonda rossii. problemy i resheniya: Materialy mezhdunarodnyh akademi-cheskikh chtenij RAASN. – Kursk: Kursk gu. –2011. – s. 161-170.
5. Korobko, V.I. Raschet treugolnyh ortotropnyh plastinok s odnorodnymi granichnymi usloviyami metodom interpolyatsii po koeffficientu formy / V.I. Korobko, S.U. Savin // Stroitelstvo i rekonstrukciya. – 2010. – № 4. –s. 8-12.
6. Korobko, A.V. Programma opredeleniya maksimalnogo progiba uprugih ortotropnyh plastinok na osnove metoda interpolyatsii po koeffficientu formy –[Tekst] / A.V. Korobko, M.U. Prokurov, S.U. Savin // Stroitelstvo i rekonstrukciya. –2012. – № 12. – s. 35-41.
7. Korobko, V.I. Opredelenie osnovnoj chastoty kolebanij plastinok na uprugom osnovanii metodom interpolyatsii po koeffficientu formy V [Tekst] / V.I. Korobko, A. A. Aktuganov // Bezopasnost stroitelnogo fonda rossii. problemy i resheniya: materialy mezhdunarodnyh akademicheskikh chtenij. – Kursk: Kursk. gos. un-t, 2011. – s.89–96.
8. Korobko, V.I. Opredelenie osnovnoj chastoty kolebanij plastinok na uprugom osnovanii s dvumya koeffficientami posteli metodom interpolyatsii po koeffficientu formy [Tekst] / V.I. Korobko, A.A. Aktuganov // Problemy optimalnogo proektirovaniya sooruzhenij: doklady 3-j vsrossijskoj konferencii, Novosibirsk, 15 – 17 aprelya, 2014 g. – Novosibirsk: NGASU (Sibstrin), 2014. – s. 207–214.
9. Chernyaev, A.A. Geometricheskoe modelirovanie plastinchatyh konstrukcij iz usloviya zhestkosti [Tekst] / A.A. Chernyaev // international journal for computational civiland structural engineering / Mezhdunarodnyj zhurnal po raschetu grazhdanskikh i stroitelnyh konstrukcij. – 2012. – volume 8, issue 4. – pp. 66-77.
10. Chernyaev, A.A. K voprosu o raschete plastinok srednej tolshhiny iz usloviya zhestkosti [Tekst] / A.A. Chernyaev // Regionalnaya arhitektura i stroitelstvo. – 2012. – №1. – s. 83-89.
11. Korobko, V.I. Izoperimetricheskij metod v stroitelnoj mehanike: teoreticheskie osnovy izoperimetricheskogo metoda. – T. 1 –[Tekst] / V.I. Korobko. – M.: Izdatelstvo ASV, 1997. – 390 s.

A.V. Korobko

Orel State University named after I.S. Turgenev

Doctor of Sciences, Professor of the Department «Technical Mechanics and Engineering Graphics»

Ph.: +7 (4862) 43-58-94

E-mail: ankor_66@mail.ru

N.V.Veprintseva

Orel State University named after I.S. Turgenev

Graduate Student of the Department «Building designs and materials»

Тел.: +7 (4862) 73-43-49

E-mail: veprintseva.nadejda@yandex.ru

S.V. Shlyakhov

Orel State University named after I.S. Turgenev

Graduate Student of the Department «Building designs and materials»

Ph.: +7 (4862) 73-43-49

E-mail: shlyakhov.stas@mail.ru