

ВЛ. И. КОЛЧУНОВ<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Московский государственный строительный университет (НИУ МГСУ), г. Москва, Россия

<sup>2</sup> Научно-исследовательский институт строительной физики Российской академии архитектуры и строительных наук (НИИСФ), г. Москва, Россия

## «ПРЕДСТАВИТЕЛЬНЫЙ ОБЪЕМ» В МЕХАНИКЕ ЖЕЛЕЗОБЕТОНА

**Аннотация.** В статье рассмотрен новый инструментарий для построения расчетных моделей сопротивления железобетона построенный на понятии «представительного объема» для моделирования характерных сложно напряженных зон конструкции. В основу инструментария положена идея блочных физических моделей сопротивления и сочетание энергетического подхода механики разрушения железобетона с трещинами и деформационных моделей теории железобетона. Для определения жесткости и трещиностойкости железобетонных стержневых элементов в зонах совместного действия моментов и поперечных сил предложена модель «единичной составной полоски» в поперечных сечениях элемента с наклонными трещинами. Раскрытие нормальных и наклонных трещин моделируется «представительным объемом» в виде армированной призмы и двухконсольным элементом (ДКЭ). Напряженно-деформированное состояние в окрестности трещины определяется с учетом открытого автором в механике разрушения железобетона деформационного эффекта.

**Ключевые слова:** железобетон, представительный объем, деформационный эффект, гипотезы, двухконсольный элемент, механика разрушения, раскрытие - закрытие трещин, жесткость.

VL. I. KOLCHUNOV<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Moscow State University of Civil Engineering (National Research University) (MGSU), Moscow, Russia

<sup>2</sup>Research Institute of Building Physics of the Russian Academy of Architecture and Construction Sciences (NIISF), Moscow, Russia

## REPRESENTATIVE VOLUME ELEMENT IN THE MECHANICS OF REINFORCED CONCRETE

**Abstract.** The article presents a novel computational framework for developing constitutive models of reinforced concrete (RC) behavior, based on the concept of a Representative Volume Element (RVE) for simulating characteristic complex stress states in structural members. The framework is founded on the idea of block-based physical models of material response, combining the energy approach of fracture mechanics for cracked RC with deformation models of reinforced concrete theory. To determine the stiffness and crack resistance of RC members in regions subjected to combined bending moments and shear forces, a "single composite strip" model within cross-sections containing inclined cracks is proposed. The opening of normal and inclined cracks is simulated using RVEs represented by a reinforced prism and a double-cantilever element (DCE), respectively. The stress-strain state in the vicinity of a crack is determined taking into account a deformation effect in the fracture mechanics of RC, discovered by the author.

**Keywords:** reinforced concrete, representative volume element (RVE), deformation effect, hypotheses, double-cantilever element (DCE), fracture mechanics, crack opening-closing, stiffness.

## 1. Введение

Получившие широкое применение модели железобетона, основанные на использовании метода конечных элементов и реализуемые в универсальных программных комплексах, далеко не всегда адекватно отражают реальное деформирование железобетонных конструкций с учетом новых физических явлений, установленных экспериментально с использованием нового инструментария исследований. В этой связи, развитие аналитических методов расчета железобетонных конструкций является не только важным направлением для наглядного качественного анализа напряженного состояния в конструкциях при различных внешних воздействиях, но и для учета новых, устанавливаемых экспериментально физических явлений в теории железобетона.

За последние два десятилетия произошло значительное развитие применяемых в практике проектирования аналитических моделей теории железобетона. К одним из известных в этом направлении можно отнести расчетные модели, предложенные В.М. Бондаренко и Вл.И. Колчуновым [1], А.Б. Голышевым [2,3], Н.И. Карпенко [4], С.Н. Карпенко [5], основанные на всестороннем анализе экспериментально установленных новых физических явлений и теоретического поведения железобетонных конструкций при различных видах напряженного состояния. В развитие этих моделей в работах [5-8] и в экспериментально-теоретических исследованиях Баширова Х.З., Федорова В.С. [9], Яковенко И.А. [10], Демьянова А.И. [11] и др., на полученных ими достаточно представительных экспериментальных данных для железобетонных конструкций сплошного и составного сечений при различных видах напряженного состояния (в том числе и таких сложных и мало изученных, как изгиб с кручением), получены новые, более строгие расчетные зависимости для определения параметров предельных состояний первой и второй группы – прочности, ширины раскрытия трещин и жесткости в железобетонных конструкциях.

Уместно отметить и ряд других эффективных расчетных моделей аналитического характера, разработанных в последнее время как российскими (О.Г. Кумпяк, Галяутдинов З.Р., Галяутдинов Д.Р. [12, 13], Митасова В.М., Коянкин А.А. [14, 15], Адищев В.В. [15], Алексеевцева А.В. [16]), так и зарубежными учеными [17-21], которые также основываются на экспериментально выявленных новых физических явлениях в силовом сопротивлении сложнонапряженных железобетонных конструкций при статических и динамических нагрузлениях.

Анализ приведенных и других исследований в области разработки и применения физических и расчетных моделей сопротивления железобетона позволяет прийти к выводу о том, что в перспективе одним из направлений совершенствования и развития теории железобетона может стать разработка полуаналитических моделей теории железобетона как комбинация аналитических – максимально учитывающих установленные физические явления и численных – позволяющих обеспечивать расчет конструкций различной сложности. В связи с этим *целью рассматриваемой статьи* явилось создание нового инструментария для построения расчетных моделей сопротивления железобетона базирующегося на понятии «представительного объема» для моделирования характерных сложно напряженных зон железобетонных конструкций и обоснование принципов, обеспечивающих реализацию этого инструментария.

## 2. Модели и методы

Предлагаемый инструментарий основывается на идее создания блочных физических моделей сопротивления железобетона в сочетании с энергетическим подходом механики разрушения и деформационных моделей теории железобетона. При построении расчетных моделей рассматриваемый инструментарий строится на использовании ряда сформулированных автором принципов базовых принципов механики железобетона [4, 25] и направленных на сближение расчетных моделей и физических процессов деформирования железобетона выявляемых экспериментально.

В расчетных моделях сопротивления используется установленный автором деформационный эффект в механике разрушения железобетона, физическая суть которого заключается в дополнительном деформационном воздействии реакции арматуры и бетона в форме эллипсоида профиля трещины, связанной с нарушением сплошности бетона [1–6, 25].

Для определения жесткости железобетонных элементов с трещинами и определения ширины раскрытия трещин используется так называемый двухконсольный элемент (ДКЭ) [26], связывающий функционалом традиционные параметры нелинейного деформирования железобетона и параметры механики разрушения. Определение расчетных параметров (ДКЭ) производится по скорости высвобождения потенциальной энергии и дополнительной работы тела при продвижении трещины. Уместно отметить, что в научных исследованиях российских и зарубежных ученых при оценке ширины раскрытия трещин использовались разные предложения по форме берегов трещины - от треугольного профиля до формы эллипса или формы «рыбки» [17-21, 24 и др.]. Однако функциональная связь формы профиля трещины с физической сущностью явления в виде деформационного эффекта была установлена автором более 20 лет назад [1, 2] и развита в докторских диссертациях учеников И.А. Яковенко [10] и А.И. Демьянова [11].

Для определения средних деформаций арматуры ( $\varepsilon_{s,m}$ ) и, соответственно, кривизны и жесткости железобетонного элемента в сечении сложнонапряженной зоны совместного действия момента и поперечной силы используется модель «единичной составной полоски». Зона со сложным напряженным состоянием, например зона совместного действия поперечной силы и изгибающего момента (рисунок 1), после образования наклонных трещин моделируется рядом единичных полосок и рассматривается как составная пластина, имеющая сдвиги между полосками. Такая модель позволяет достаточно строго учитывать раскрытие наклонных трещин в рассматриваемой зоне и их влияние на перемещения (прогибы) элемента.

Действующие российские и зарубежные нормы по проектированию железобетонных конструкций используют понятие средних деформаций арматуры ( $\varepsilon_{s,m}$ ) и зависимость для кривизны элемента в сечении с трещиной вида:

$$1/r = f(\varepsilon_{b,m}; \varepsilon_{s,m}; \psi_s; l_{crc}).. \quad (1)$$

В соответствии с такой моделью значения ширины раскрытия трещин на уровне оси арматуры нормами значительно завышаются. Учет в расчетных моделях сопротивления железобетона (PMC) деформационного эффекта и двухконсольного элемента, как показали выполненные исследования [23, 24], позволяет не только сблизить опытные и расчетные параметры деформирования железобетона, но и адекватно объяснить физические процессы образования, раскрытия трещин и изменения расстояний между трещинами на разных уровнях нагружения элемента. Модель раскрытия - закрытия трещин в железобетонной конструкции с различными видами напряженного состояния описывает физический процесс реакции арматурного стержня в зоне стягивающейся бетонной матрицы в растянутой зоне железобетонного элемента.

Согласно описанному процессу раскрытия трещин различных типов на различных участках напряженного состояния конструкции общая уровневая модель для анализа железобетонных стержневых систем строится расчленением их на подконструкции второго уровня [4]. Для отдельных элементов конструкции декомпозиция выполняется выделением представительного объема в зоне с характерным напряженным состоянием (см. рисунок 1) : зона изгибного напряженного состояния  $M > M_{crc}$ ,  $Q < Q_{crc}$  (ДКЭ1); зона сдвига с изгибом  $M > M_{crc}$ ;  $Q \geq Q_{crc}$ ; (ДКЭ2), зона участка с пространственными трещинами при кручении с изгибом (ДКЭ3) и другие зоны с характерным напряженным состоянием и соответствующим типом трещин.

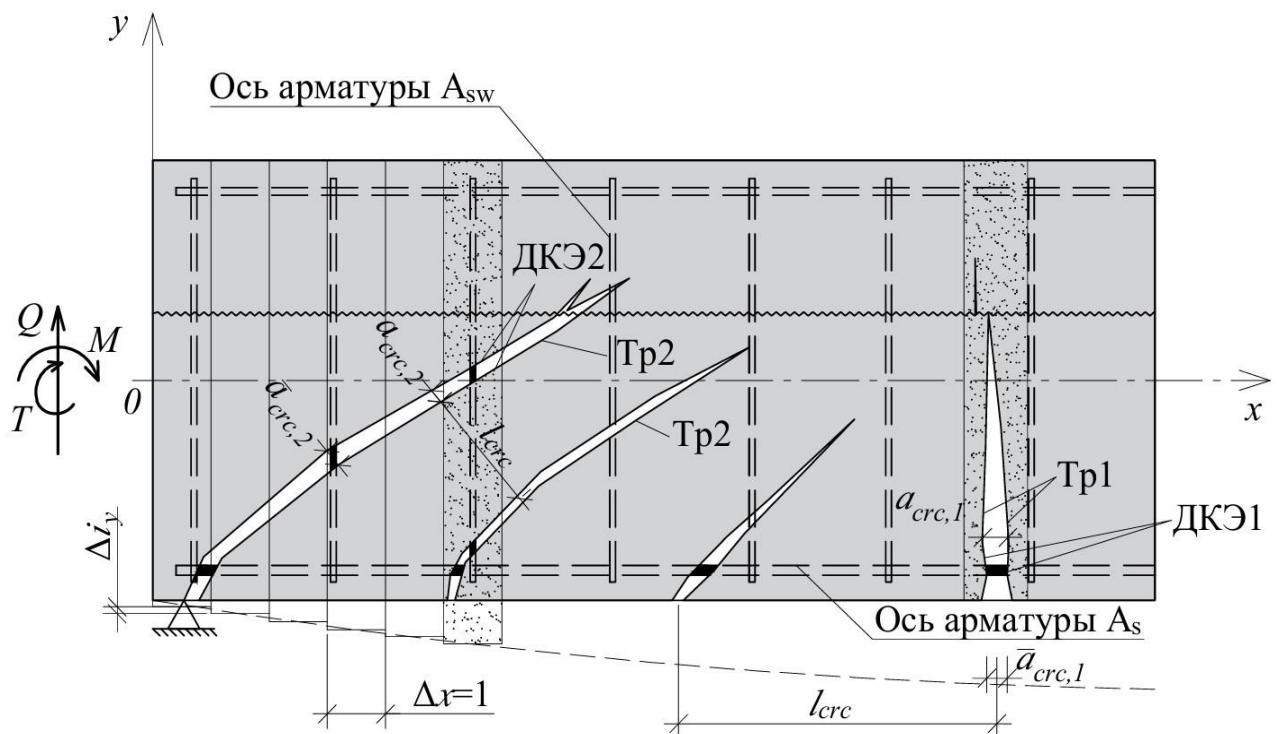


Рисунок 1 — Схема трещин в характерных зонах стержневого железобетонного элемента в общем случае нагружения изгибающим и крутящим моментами и поперечной силой и схема его декомпозиции на зоны с различным напряженным состоянием

Согласно физическому процессу раскрытия трещины с учетом деформационного эффекта, последовательно рассматривая эпюру усилий (деформаций) в сечении с неизвестными  $\Delta T_i$  (силы сцепления),  $\Delta T_{\gamma,i}$  (сдвигающей силы) и  $\sigma_{bt,i}$  (сжимающие напряжения) в двухконсольном элементе ДКЭ 1, прилегающем к берегам трещины определяются напряженно-деформированное состояние в ДКЭ 1.

Параметры раскрытия берегов нормальной трещины (параметры ДКЭ) определяются на энергетической основе из следующего функционала:

$$\zeta_{bu} = \lim_{\delta A \rightarrow 0} \left( \frac{\delta W - \delta V}{\delta A} \right) = \frac{dW}{dA} - \frac{dV}{dA} = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^n \left( P^2 \frac{\partial C}{\partial A} - CP \frac{\partial P}{\partial A} \right). \quad (2)$$

Здесь обозначены  $\delta V$  – уменьшение потенциальной энергии тела при продвижении трещины на малое приращение  $\delta a$ ;  $\delta W$  – дополнительная работа, совершаемая над телом при продвижении трещины на малое приращение  $\delta a$  от ряда усилий, приложенных к двухконсольному элементу (схема усилий, приложенных к ДКЭ приведена на рис. 2).

Аналогичным образом строится расчетная модель для представительного объема-призмы ДКЭ 2 в зоне сложного напряженного состояния – сдвига с изгибом ( $M > M_{crc}$ ;  $Q \geq Q_{crc}$ ). Схема усилий, геометрические и статические параметры этой модели показаны на рисунке 3а, б). Раскрытие и закрытия трещин определяется здесь через направляющие косинусы  $l, m, n$  для перемещений, связанных с отрывом, поперечным сдвигом и поворотом осей в расчетном сечении в трещине. В результате для двухконсольных элементов в выделенных полосах,

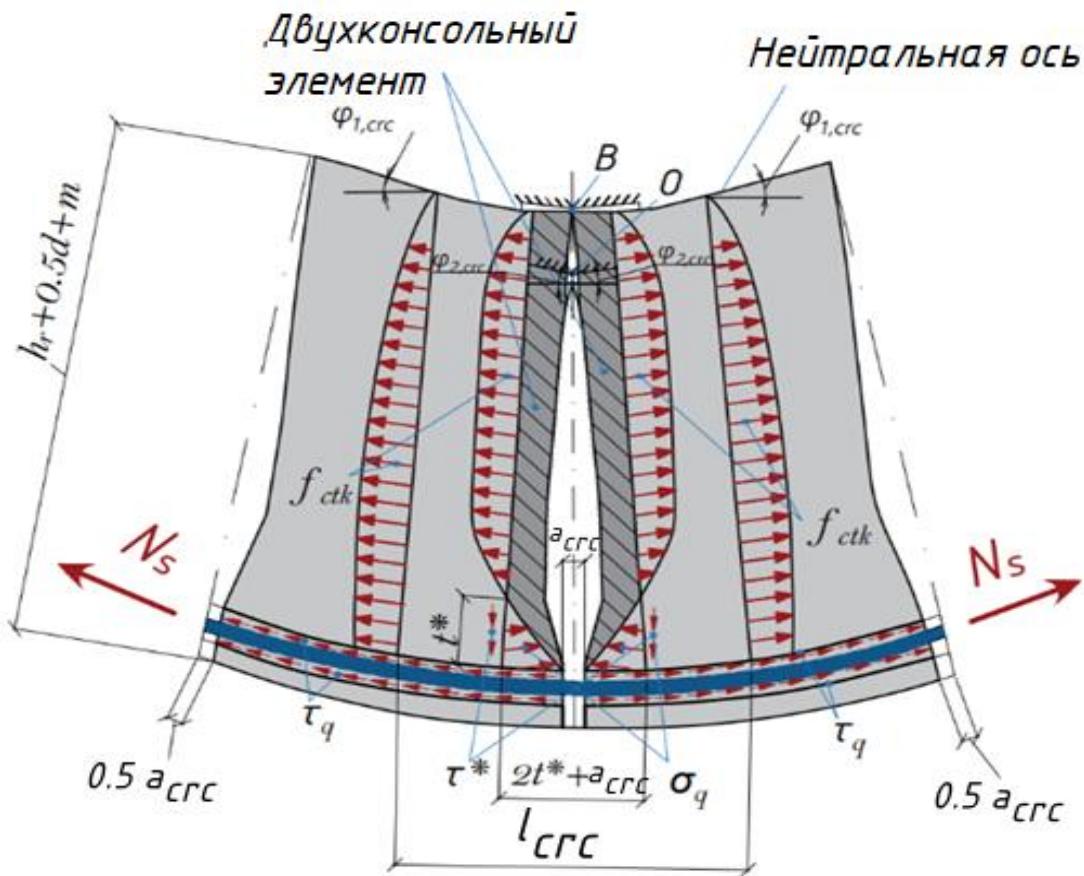


Рисунок 2 – Представительный объём - схема двухконсольного элемента ДКЭ 1 в зоне изгибного напряженного состояния элемента:  $M > M_{crc}$ ,  $Q < Q_{crc}$

пересекаемых трещинами в сложнонапряженной зоне, мы получим параметры жесткости, результирующие смещения полосок друг относительно друга и деформированную картину составного элемента с трещинами в рассматриваемой зоне.

Деформации армированного представительного объема в направлении  $i$ -той оси определяются соотношением:

$$\varepsilon_s = \frac{\sigma_s}{E_s \mu_V}. \quad (3)$$

Здесь  $E_s$  - модуль упругости арматуры;  $\mu_V$  – коэффициент объемного армирования в направлении  $i$  - той оси.

Перемещения  $i$ -го направления в трещине  $u_{gi}$  (см. рисунок 3в) можно определить в функции от деформаций арматуры  $\varepsilon_{s,i}$  и бетона  $\varepsilon_{b,i}$  на участках между трещинами  $l_{crc}$ :

$$u_{gi} = (\varepsilon_{s,i} - \varepsilon_{b,i}) \cdot l_{crc,i} = (\varepsilon_{s,i} - \varepsilon_{b,i}) \cdot \frac{0.5l_{crc}}{\sin(\alpha+\beta)}. \quad (4)$$

Здесь, значение расстояния между трещинами  $l_{crc,i}$  на участках между трещинами, следуя [4] :

$$l_{crc} = \frac{2 \cdot (ln B_4 - B \cdot t_*)}{-B}, \quad (5)$$

где  $B_4, B_3, B_2$  и  $B$  - параметры, учитывающие влияние нарушения сплошности бетона, геометрические характеристики сечения, а также сцепление арматуры с бетоном, определяются по формулам [27].

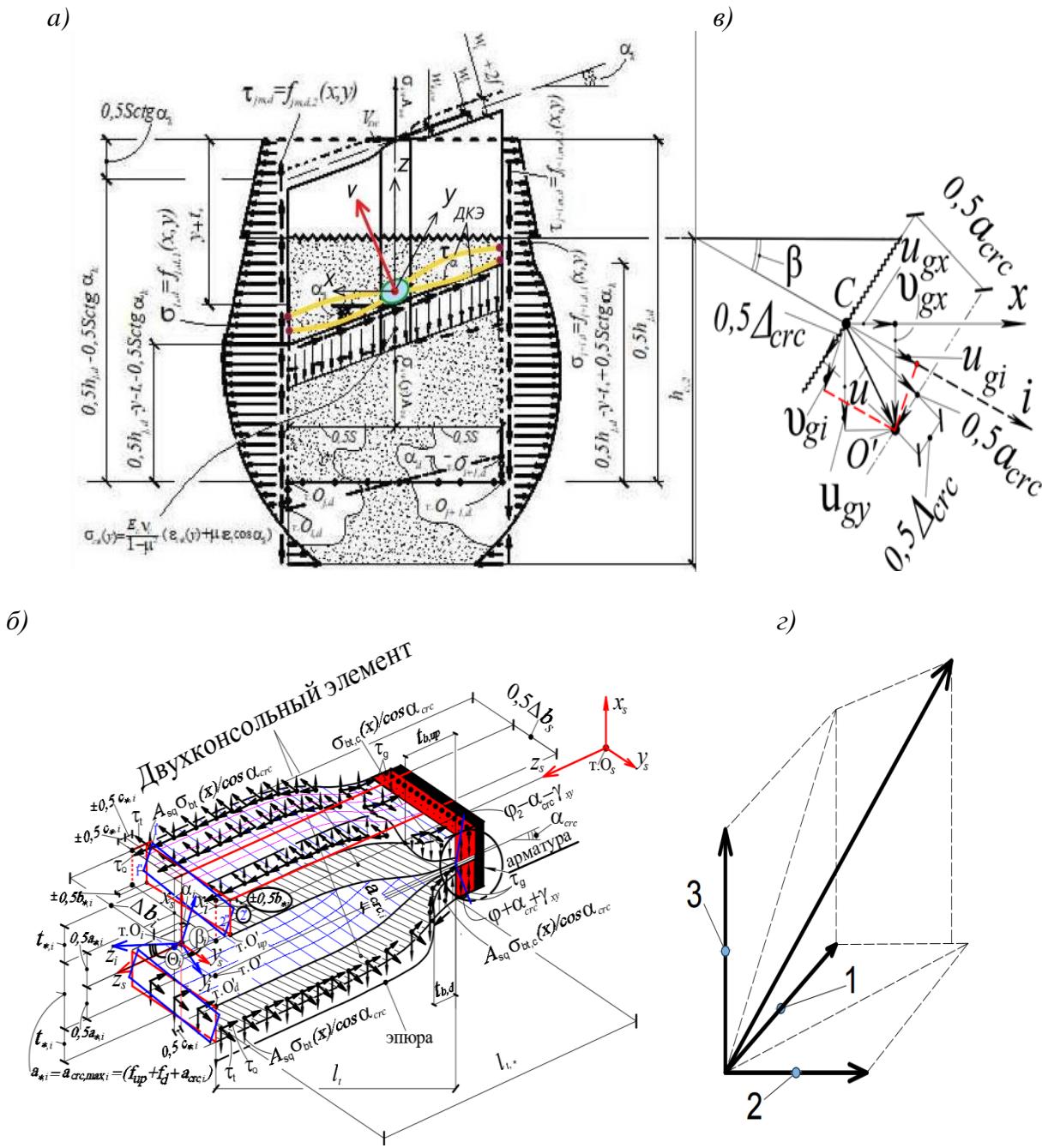


Рисунок 3 – Модель - «Представительный объем» - призма-ДКЭ 2 для плоского напряженного состояния в составном стержневом элементе в зоне сдвига с изгибом  $M > M_{crc}$ ;  $Q \geq Q_{crc}$  (а) и для объемного напряженного состояния  $M > M_{crc}$ ;  $T > T_{crc}$ ;  $Q \geq Q_{crc}$  (б) и главные векторы перемещений в трещине ( $\vec{U}_{нdc}$ ) (в) и армирования  $\vec{C}_a$  (г) 1 - поперечная арматура из плоскости элемента, 2 - продольная арматура, 3 - поперечная арматура в плоскости элемента

Взаимно ортогональные перемещения  $i$ -го направления в трещине  $u_{gi}, v_{gi}$ , связаны между собой раскрытием берегов трещины  $a_{crc}$  и сдвигом в трещине  $\Delta_{crc}$

$$0.5 \cdot a_{crc} = u_{gy} \cdot \cos \alpha + u_{gx} \cdot \sin \alpha \quad (i \neq x, z) \quad (6)$$

$$0.5 \cdot \Delta_{crc} = u_{gy} \cdot \sin \alpha - u_{gx} \cdot \cos \alpha \quad (i \neq x, z) \quad (7)$$

Для косинуса угла  $\beta$  главного вектора объемного армирования  $\vec{C}_a$  рабочей арматуры связанного с нормальными напряжениями  $\sigma_{s,i}$  арматуры в трещинах и касательными напряжениями  $\tau_{s,i}$  и с величинами перемещений  $u_{gi}, v_{gi}$ , получено (рисунок 3в):

$$\cos \beta = 0,5A_\beta \pm \sqrt{(0,5A_\beta)^2 - B_\beta}. \quad (8)$$

Здесь  $A_\beta = 2 \cdot v_{gi} \cdot u_{gz} / (u_{gx}^2 + u_{gz}^2)$ ;  $B_\beta = (v_{gi}^2 - u_{gx}^2) / (u_{gx}^2 + u_{gz}^2)$ .

В итоге из зависимостей (4) и (7) и (8) имеем:

$$u_{gi} = u_{gx} \cdot \cos \beta_i + u_{gy} \cdot \sin \beta, \quad (9)$$

Перемещение  $i$ -го направления в трещине  $u_{gi}$  может быть найдено по формуле (3) а расстояния между трещинами  $l_{crc,i}$  - по формуле (4). Поэтому вычислить параметр  $u_{gi}$  в формулах (8) - (9) можно сразу без дополнительных итераций.

В качестве примера для наклонных трещин (Тр2). с раскрытием  $a_{crc}$  и сдвигом берегов  $\Delta_{crc}$  трещин, для перемещений в трещине, с учетом податливости бетона и направления главного вектора  $\vec{C}$  рабочего армирования (формула 8) можно записать:

$$\begin{cases} U_s = 0.5a_{crc} \sin \theta - 0.5\Delta_s \cos \theta \\ V_s = 0.5a_{crc} \cos \theta + 0.5\Delta_s \sin \theta \end{cases}, \quad (10)$$

Связи между  $v_{gi}$  и углом  $\beta$  опираясь на экспериментальные данные [2, 6, 27] имеют вид:

$$v_{gi} = k_{sup} \cdot R_{sup} = k_{sup} (Q_s + N_s \cdot \tan \beta + P_i) \cdot \eta \quad (11)$$

Здесь  $k_{sup}$  - функции податливости стержней сдвига для участка расстояния  $l_{crc}$  на некотором малом отрезке перемещений  $u_{gi}$  и  $v_{gi}$ ;  $\eta$  - коэффициент для обобщенной опорной реакции  $R_{sup}$  сложнонапряженного конструктивного элемента.

Из связанных между собой параметров перемещений  $u_{gi}$ ,  $v_{gi}$ , соотношений между направляющим косинусом и весами арматуры соответствующего направления (в общем случае поперечной арматуры в плоскости из плоскости элемента) с учетом их классов и площадей ( $\theta_x$ ,  $\theta_y$ ,  $\theta_z$ ) из геометрических соотношений можно записать:

$$\beta(u_{gx}, u_{gz})^2 + \theta(u_{gx}, u_{gy})^2 + \zeta_{bu}(u_{gy}, u_{gz})^2 = 1, \quad (12)$$

где  $\zeta_{bu}$  - удельная поверхность образования трещины, вычисляемая из условия (2).

Таким образом зависимость (12) определяет прямую и обратную связь перемещений стержней арматуры  $u_{gi}$  и  $v_{gi}$  с раскрытием  $a_{crc}$  и сдвигом берегов  $\Delta_{crc}$  трещины через составляющие главного вектора армирования  $\vec{C}$  и расстояние между трещинами  $l_{crc}$ .

В соответствии с рассмотренным инструментарием и вытекающими из него моделями деформирования железобетона сопротивление растянутого бетона в изотропной среде передается на арматуру через общий параметр В.И. Мурашева ( $\psi_s$  или  $\psi_{s,sw}$ ) для среднего продольного усилия  $N_{sm}$ :

$$N_{s,m} = \varepsilon_s \cdot \psi_s \cdot E_s \cdot A_s = N_s \cdot \psi_s; \quad (13)$$

И, соответственно, среднего поперечного усилия  $Q_{s,m}$  ( $Q_{s,m} = \varepsilon_s \cdot \psi_{Q,s} \cdot E_s \cdot A_s$ ). Другими словами можно говорить о установленной рассматриваемой моделью строительной механики железобетона связи для среднего суммарного усилия  $N_{s,m,sum}$  рабочей арматуры» через деформационный эффект и «нагельный» эффект как для стержня арматуры с двумя

защемленными концами при поворотах заделок и действии поперечного усилия  $Q_{s,m}$ , раскрытии  $a_{crc,s}$  и сдвиге  $\Delta_{crc}$  берегов трещины.

### 3. Результаты исследования и их анализ

В результате проведенного исследования был разработан и теоретически обоснован новый инструментарий для построения расчетных моделей сопротивления (PMC) железобетонных конструкций, основанный на концепции «представительного объема» (Representative Volume Element, RVE). Ключевым результатом является создание полуаналитического подхода, который комбинирует физическую наглядность аналитических методов с вычислительными возможностями численного моделирования для анализа сложнонапряженных зон.

Основным элементом предложенного инструментария стала модель двухконсольного элемента (ДКЭ), которая применяется в качестве представительного объема для моделирования зон с трещинами. Для зоны чистого изгиба ( $M > M_{crc}$ ,  $Q < Q_{crc}$ ) использован ДКЭ 1 (Рисунок 2), а для сложнонапряженной зоны - сдвига с изгибом ( $M > M_{crc}$ ,  $Q \geq Q_{crc}$ ) – пространственная модель «призма-ДКЭ 2» (Рисунок 3). Анализ показал, что данные модели позволяют с высокой точностью описывать напряженно-деформированное состояние в окрестности трещины, учитывая как кинематику раскрытия (нормальные и сдвиговые перемещения), так и силовое взаимодействие арматуры с бетоном.

Важнейшим результатом является учет деформационного эффекта, физическая суть которого заключается в дополнительном деформационном воздействии реакции арматуры и бетона в области эллипсоида профиля трещины. Анализ демонстрирует, что учет этого эффекта в рамках ДКЭ позволяет установить функциональную связь между формой профиля трещины и физической сущностью явления, что ранее не учитывалось в других известных моделях (треугольный профиль, «рыбка» и пр.). Это приводит к значительному сближению расчетных и экспериментальных данных по ширине раскрытия трещин и деформациям.

Для расчета жесткости и деформаций в зонах совместного действия моментов и поперечных сил предложена модель «единичной составной полоски». Анализ работы этой модели показал, что она позволяет учесть взаимное смещение полосок, вызванное раскрытием наклонных трещин, и получить результирующую картину деформирования составного элемента. Это обеспечивает более точное определение кривизны и прогибов по сравнению с нормативными методами.

На основе энергетического подхода (функционал  $\zeta_{bu}$ , формула 2) получены расчетные зависимости для определения параметров трещин: ширины раскрытия, сдвига берегов и расстояния между трещинами. Анализ формул (4-7, 10-12) показывает, что предложенная система уравнений устанавливает прямую и обратную связь между перемещениями арматуры, раскрытием трещин и геометрией армирования через главный вектор  $C^*$ . Это позволяет избежать трудоемких итерационных процедур при расчете.

Сравнительный анализ с экспериментальными данными, полученными в работах [23, 24], подтвердил адекватность предложенных моделей. В частности, модель ДКЭ адекватно описывает физические процессы образования, раскрытия-закрытия трещин и изменения расстояний между ними на разных уровнях нагружения, включая сложные случаи пространственного напряженного состояния.

Таким образом, анализ результатов подтверждает, что разработанный инструментарий на основе представительных объемов (ДКЭ) и деформационного эффекта позволяет создавать более строгие и физически обоснованные PMC. Они не только повышают точность расчетов по деформациям и трещиностойкости, но и открывают новые возможности для качественного анализа работы железобетона в сложнонапряженных условиях, что является перспективным направлением для совершенствования норм проектирования.

### 4. Заключение

1. Предложен универсальный инструментарий для разработки расчетных моделей сопротивления (PMC) железобетонных конструкций основанный на анализе

экспериментально установленных новых физических явлений поведения железобетонных конструкций при различных видах напряженного состояния в основу которого положен на энергетический подход к механике разрушения железобетона и использование для моделирования представительного объема в различных зонах напряженного состояния конструкции.

2. Определение жесткости сечений, ширины раскрытия трещин, расстояния между трещинами для сложнопрессованных зон железобетонных элементов с наклонными или пространственными трещинами от совместного действия силовых факторов выполняется с использованием модели единичной составной полоски, «представительного объема» плоского или пространственного двухконсольного элемента (ДКЭ) моделирующего в деформационный эффект в трещине с использованием гипотезы Томаса – Автора.

3. Определение ширины раскрытия трещин и расстояния между трещинами производится с использованием модели двухконсольного элемента в сочетании с представительным объемом – «призма-двуихконсольный элемент».

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бондаренко В.М., Колчунов Вл.И. Расчетные модели силового сопротивления железобетона. – М.: Изд-во АСВ, 2004. – 472 с.
2. Гольышев А.Б., Колчунов Вл.И. Сопротивление железобетона. – К.: Основа, 2009. – 432 с.
3. Гольышев А.Б., Колчунов Вл.И., Яковенко И.А. Сопротивление железобетонных конструкций, зданий и сооружений, возводимых в сложных инженерно-геологических условиях: монография. – К.: Талком, 2015. – 371 с.
4. Карпенко Н.И. Общие модели механики железобетона. – М.: Стройиздат, 1996. – 410 с.
5. Карпенко С.Н. О построении общего расчета железобетонных плоских конструкций в конечных приращениях // Бетон и железобетон. – 2005. – № 3. – С. 22–26.
6. Колчунов Вл.И. Метод расчетных моделей сопротивления для железобетона // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2023. – Т. 19. – № 3. – С. 261–275.
7. Kolchunov VI. The Effect of Reinforced Concrete for Crack Resistance and Rigidity Based on Mechanics of Fracture Under Bending // Modern Problems in Construction: Selected Papers from MPC 2021. – Cham: Springer, 2022. – (Lecture Notes in Civil Engineering; Vol. 287). – P. 79–97.
8. Savin S., Fedorova N., Korenkov P. Experimental Investigation of RC Frame with Sway Columns Under Corner Column Removal Scenario // Modern Problems in Construction: Selected Papers from MPC 2022. – Cham: Springer, 2023. – (Lecture Notes in Civil Engineering; Vol. 372). – P. 291–313.
9. Федоров В.С., Баширов Х.З., Колчунов Вл.И. Элементы теории расчета железобетонных составных конструкций // Academia. Архитектура и строительство. – 2014. – № 2. – С. 116–118.
10. Iakovenko I., Kolchunov VI. The development of fracture mechanics hypotheses applicable to the calculation of reinforced concrete structures for the second group of limit states // Journal of Applied Engineering Science. – 2017. – Vol. 15. – № 3. – P. 366–375. – DOI 10.5937/jaes15-14662.
11. Dem'yanov A.I., Salnikov A.S. The estimation of spatial cracks formation in reinforced concrete structures under the action torsion with bending // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. – 2018. – Vol. 365. – № 5. – P. 052019.
12. Кумпяк О.Г., Галяутдинов З.Р., Галяутдинов Д.Р. Влияние распора на прочность железобетонных балок на податливых опорах при кратковременном динамическом нагружении // Известия высших учебных заведений. Строительство. – 2023. – № 1 (769). – С. 5–16. – DOI 10.32683/0536-1052-2023-769-1-5-16.
13. Kumpyak O., Galyautdinov Z., Galyautdinov D., Rakhimova T. Dynamic Analysis of Reinforced Concrete Beams on Yielding Supports // Lecture Notes in Civil Engineering. – 2022. – Vol. 170. – P. 303–312. – DOI 10.1007/978-3-030-79983-0\_28.
14. Коянкин А.А., Митасов В.М. Расчет сборно-монолитного изгибающего элемента по деформациям и трещиностойкости // Вестник Сибирского государственного университета путей сообщения. – 2023. – № 2 (65). – С. 48–54. – DOI 10.52170/1815-9265\_2023\_65\_48.
15. Митасов В.М., Адищев В.В. О применении энергетических соотношений в теории сопротивления железобетона // Известия вузов. Строительство и архитектура. – 1990. – № 4. – С. 33–37.
16. Алексеев А.В. Поиск рациональных параметров строительных конструкций на основе многокритериальной эволюционной оптимизации // Промышленное и гражданское строительство. – 2019. – № 9. – С. 45–50.

17. Rahal K.N. Combined Torsion and Bending in Reinforced and Prestressed Concrete beams Using Simplified Method for Combined Stress-Resultants // *ACI Structural Journal*. – 2007. – Vol. 104. – № 4. – P. 402–411.
18. Rahal K.N. Torsional strength of normal and high strength reinforced concrete beams // *Engineering Structures*. – 2013. – Vol. 56. – P. 2206–2216.
19. Faron A., Rombach G.A. Simulation of crack growth in reinforced concrete beams using extended finite element method // *Engineering Failure Analysis*. – 2020. – Vol. 116. – P. 104698.
20. Fu Q.-L., Tan L., Long B., Kang S.-B. Numerical Investigations of Progressive Collapse Behaviour of Multi-Storey Reinforced Concrete Frames // *Buildings*. – 2023. – Vol. 13. – № 2. – P. 533. – DOI 10.3390/buildings13020533.
21. Rahal K.N. A unified approach to shear and torsion in reinforced concrete // *Structural Engineering and Mechanics*. – 2021. – Vol. 77. – № 5. – P. 691–703. – DOI 10.12989/sem.2021.77.5.691.
22. Родевич В.В., Арзамасцев С.А. К расчету железобетонных элементов на изгиб с кручением // *Известия высших учебных заведений. Строительство*. – 2015. – № 9. – С. 99–109.
23. Thomas F.G. Cracking in reinforced concrete // *The Structural Engineer*. – 1936. – Vol. 14. – № 8. – P. 298–320.
24. Tan E.L., Varsani H., Liao F. Experimental study on demountable steel-concrete connectors subjected to combined shear and tension // *Engineering Structures*. – 2019. – Vol. 183. – P. 110–123.
25. Колчунов Вл.И. Модель расчета параметров предельных состояний железобетонных конструкций // *Строительство и реконструкция*. – 2025. – № 2 (118). – С. 4–13. – DOI 10.33979/2073-7416-2025-118-2-4-13.
26. Kolchunov V.I., Fedorova N.V., Savin S.Y., Moskovtseva V.S. Analytical Model of Crack Opening in Reinforced Concrete Structures Based on DCE // *Buildings*. – 2025. – Vol. 15. – № 12. – P. 2096. – DOI 10.3390/buildings15122096.

## REFERENCES

1. Bondarenko V.M., Kolchunov Vl.I. *Raschetnyye modeli silovogo soprotivleniya zhelezobetona* [Calculation Models of Reinforced Concrete Strength Resistance]. Moscow: ASV Publishing House, 2004. 472 p. (In Russian).
2. Golyshev A.B., Kolchunov Vl.I. *Soprotivleniye zhelezobetona* [Resistance of Reinforced Concrete]. Kyiv: Osnova, 2009. 432 p. (In Russian).
3. Golyshev A.B., Kolchunov Vl.I., Yakovenko I.A. *Soprotivleniye zhelezobetonnykh konstruktsiy, zdaniy i sooruzheniy, vozvodimykh v slozhnykh inzhenerno-geologicheskikh usloviyakh* [Resistance of Reinforced Concrete Structures, Buildings and Constructions Erected in Complex Engineering-Geological Conditions: Monograph]. Kyiv: Talkom, 2015. 371 p. (In Russian).
4. Karpenko N.I. *Obshchiye modeli mehaniki zhelezobetona* [General Models of Reinforced Concrete Mechanics]. Moscow: Stroyizdat, 1996. 410 p. (In Russian).
5. Karpenko S.N. O postroyenii obshchego rascheta zhelezobetonnykh ploskikh konstruktsiy v konechnykh prirashcheniyakh [On the Construction of a General Calculation of Reinforced Concrete Plane Structures in Finite Increments]. *Beton i Zhelezobeton*, 2005, no. 3, pp. 22–26. (In Russian).
6. Kolchunov Vl.I. Metod raschetnykh modeley soprotivleniya dlya zhelezobetona [The Method of Calculation Models of Resistance for Reinforced Concrete]. *Stroitel'naya Mekhanika Inzhenernykh Konstruktsiy i Sooruzheniy*, 2023, vol. 19, no. 3, pp. 261–275. (In Russian).
7. Kolchunov Vl. The Effect of Reinforced Concrete for Crack Resistance and Rigidity Based on Mechanics of Fracture Under Bending. *Modern Problems in Construction: Selected Papers from MPC 2021*. Cham: Springer, 2022. (Lecture Notes in Civil Engineering; Vol. 287), pp. 79–97.
8. Savin S., Fedorova N., Korenkov P. Experimental Investigation of RC Frame with Sway Columns Under Corner Column Removal Scenario. *Modern Problems in Construction: Selected Papers from MPC 2022*. Cham: Springer, 2023. (Lecture Notes in Civil Engineering; Vol. 372), pp. 291–313.
9. Fedorov V.S., Bashirov Kh.Z., Kolchunov Vl.I. *Elementy teorii rascheta zhelezobetonnykh sostavnykh konstruktsiy* [Elements of the Theory of Calculation of Reinforced Concrete Composite Structures]. Academia. Arkhitektura i Stroitel'stvo, 2014, no. 2, pp. 116–118. (In Russian).
10. Iakovenko I., Kolchunov Vl. The development of fracture mechanics hypotheses applicable to the calculation of reinforced concrete structures for the second group of limit states. *Journal of Applied Engineering Science*, 2017, vol. 15, no. 3, pp. 366–375. DOI: 10.5937/jaes15-14662.
11. Dem'yanov A.I., Salnikov A.S. The estimation of spatial cracks formation in reinforced concrete structures under the action torsion with bending. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, 2018, vol. 365, no. 5, p. 052019.
12. Kumpyak O.G., Galyautdinov Z.R., Galyautdinov D.R. Vliyaniye raspory na prochnost' zhelezobetonnykh balok na podatlivykh oporakh pri kratkovremennom dinamicheskem nagruzhenii [Influence of Thrust on the Strength of Reinforced Concrete Beams on Flexible Supports Under Short-Term Dynamic Loading]. *Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Stroitel'stvo*, 2023, no. 1 (769), pp. 5–16. DOI: 10.32683/0536-1052-2023-769-1-5-16. (In Russian).

13. Kumpyak O., Galyautdinov Z., Galyautdinov D., Rakimova T. Dynamic Analysis of Reinforced Concrete Beams on Yielding Supports. *Lecture Notes in Civil Engineering*, 2022, vol. 170, pp. 303–312. DOI: 10.1007/978-3-030-79983-0\_28.
14. Koyankin A.A., Mitasov V.M. Raschet sborno-monolitnogo izgibayemogo elementa po deformatsiyam i treshchinostoykosti [Calculation of a Precast-Monolithic Bending Element by Deformations and Crack Resistance]. *Vestnik Sibirskogo Gosudarstvennogo Universiteta Putey Soobshcheniya*, 2023, no. 2 (65), pp. 48–54. DOI: 10.52170/1815-9265\_2023\_65\_48. (In Russian).
15. Mitasov V.M., Adishchev V.V. O primeneniil energeticheskikh sootnosheniy v teorii soprotivleniya zhelezobetona [On the Application of Energy Ratios in the Theory of Reinforced Concrete Resistance]. *Izvestiya Vuzov. Stroitel'stvo i Arkhitektura*, 1990, no. 4, pp. 33–37. (In Russian).
16. Alexeytsev A.V. Poisk ratsional'nykh parametrov stroitel'nykh konstruktsiy na osnove mnogokriterial'noy evolyutsionnoy optimizatsii [Search for Rational Parameters of Building Structures Based on Multi-Criteria Evolutionary Optimization]. *Promyshlennoye i Grazhdanskoye Stroitel'stvo*, 2019, no. 9, pp. 45–50. (In Russian).
17. Rahal K.N. Combined Torsion and Bending in Reinforced and Prestressed Concrete beams Using Simplified Method for Combined Stress-Resultants. *ACI Structural Journal*, 2007, vol. 104, no. 4, pp. 402–411.
18. Rahal K.N. Torsional strength of normal and high strength reinforced concrete beams. *Engineering Structures*, 2013, vol. 56, pp. 2206–2216.
19. Faron A., Rombach G.A. Simulation of crack growth in reinforced concrete beams using extended finite element method. *Engineering Failure Analysis*, 2020, vol. 116, p. 104698.
20. Fu Q.-L., Tan L., Long B., Kang S.-B. Numerical Investigations of Progressive Collapse Behaviour of Multi-Storey Reinforced Concrete Frames. *Buildings*, 2023, vol. 13, no. 2, p. 533. DOI: 10.3390/buildings13020533.
21. Rahal K.N. A unified approach to shear and torsion in reinforced concrete. *Structural Engineering and Mechanics*, 2021, vol. 77, no. 5, pp. 691–703. DOI: 10.12989/sem.2021.77.5.691.
22. Rodevich V.V., Arzamastsev S.A. K raschetu zhelezobetonnykh elementov na izgib s krushcheniem [On the Calculation of Reinforced Concrete Elements for Bending with Torsion]. *Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Stroitel'stvo*, 2015, no. 9, pp. 99–109. (In Russian).
23. Thomas F.G. Cracking in reinforced concrete. *The Structural Engineer*, 1936, vol. 14, no. 8, pp. 298–320.
24. Tan E.L., Varsani H., Liao F. Experimental study on demountable steel-concrete connectors subjected to combined shear and tension. *Engineering Structures*, 2019, vol. 183, pp. 110–123.
25. Kolchunov V.I. Model' rascheta parametrov predel'nykh sostoyaniy zhelezobetonnykh konstruktsiy [Model for Calculating Limit State Parameters of Reinforced Concrete Structures]. *Stroitel'stvo i Rekonstruktsiya*, 2025, no. 2 (118), pp. 4–13. DOI: 10.33979/2073-7416-2025-118-2-4-13. (In Russian).
26. Kolchunov V.I., Fedorova N.V., Savin S.Y., Moskovtseva V.S. Analytical Model of Crack Opening in Reinforced Concrete Structures Based on DCE. *Buildings*, 2025, vol. 15, no. 12, p. 2096. DOI: 10.3390/buildings15122096.

#### Информация об авторах:

##### **Колчунов Владимир Иванович**

Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет (НИУ МГСУ), г. Москва, Россия, Член-корреспондент РААСН, доктор технических наук, профессор, профессор кафедры инженерной графики и компьютерного моделирования. Научно-исследовательский институт строительной физики Российской академии архитектуры и строительных наук, г. Москва, Россия, ведущий научный сотрудник. E-mail: vlik52@mail.ru

#### Information about authors:

##### **Kolchunov Vladimir Iv.**

Moscow State University of Civil Engineering (NIU MGSU), Moscow, Russia, Corresponding Member of the Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, doctor of technical sciences, professor, professor of the Department of Engineering Graphics and Computer Modeling. Research Institute of Construction Physics of the Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, Moscow, Russia, leading researcher.

E-mail: [vlik52@mail.ru](mailto:vlik52@mail.ru)

Статья поступила в редакцию 18.11.2025

Одобрена после рецензирования 21.11.2025

Принята к публикации 01.12.2025

The article was submitted 18.11.2025

Approved after reviewing 21.11.2025

Accepted for publication 01.12.2025