УДК 691.175.664 DOI: 10.33979/2073-7416-2025-119-3-60-72

В.А. СМИРНОВ[1,2]
[1]Научно-исследовательский институт строительной физики Российской академии архитектуры и строительных наук (НИИСФ РААСН), г. Москва, Россия
[2]ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет», г. Москва, Россия

ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ ВЯЗКОУПРУГИХ МАТЕРИАЛОВ ПО РЕЗУЛЬТАТАМ DMA-АНАЛИЗА

Аннотация. *В статье решается задача идентификации параметров моделей вязкоупругих материалов, выполненных из вспененного полиуретана с замкнутыми порами по результатам его испытаний на DMA-анализаторе (dynamical mechanical analysis). DMA-испытания позволяют определить вязкоупругие характеристики материалов – комплексный модуль упругости в широком диапазоне частот. Для инженерных приложений наиболее важным для практического применения является диапазон частот в пределах 1 – 1000 Гц – для решения проблем динамики (виброизоляции и сейсмоизоляции) и акустики (защита от структурной звукопередачи). При этом в инженерной практике используют разнообразные феноменологические модели материалов – начиная от модели Кельвина-Фойгта (КФ) и стандартного линейного твёрдого тела (СЛТ) – до моделей, содержащих дробные производные – дробная модель КФ, дробная модель СЛТ, в том числе с несколькими параметрами дробности. Используя результаты DMA-испытаний: зависимости действительной и мнимой частей модуля упругости от частоты, подбирают параметры указанных моделей используя метод наименьших квадратов. Оценивается точность аппроксимации, а также полученные параметры моделей для выбранного типа материала.*

Ключевые слова: *вязкоупругие материалы, диапазон частот, феноменологические модели материалов, динамический модуль упругости, дробные модели.*

V.A. SMIRNOV[1,2]
[1]Research Institute of Building Physics of the Russian Academy of Architecture and Construction Sciences (NIISF RAASN), Moscow, Russia
[2]Moscow State University of Civil Engineering (National Research University) (MGSU), Moscow, Russia

IDENTIFICATION OF VISCOELASTIC MATERIAL PARAMETERS BASED ON DMA ANALYSIS RESULTS

Abstract. *The article addresses the problem of identifying parameters for viscoelastic material models made from closed-cell polyurethane foam based on results obtained using a dynamic mechanical analyzer (DMA). DMA testing allows determining viscoelastic characteristics of materials — complex elastic modulus over a wide frequency range. For engineering applications, the most important practical application is within the frequency range of 1–1000 Hz to solve problems related to dynamics (vibration isolation and seismic insulation), as well as acoustics (protection against structural sound transmission). In engineering practice, various phenomenological material models are used, ranging from Kelvin-Voigt (KV) model and standard linear solid (SLS) model up to fractional derivative-based models such as fractional KV model, fractional SLS model including those with multiple fractional parameters. Using DMA test results—dependencies of real and imaginary parts of elastic modulus versus frequency, these models' parameters are adjusted by means of least squares method. The accuracy of approximation along with identified model parameters specific to the chosen type of material are evaluated.*

Keywords: *viscoelastic materials, frequency range, phenomenological material models, dynamic modulus, fractional model.*

Введение

Вязкоупругие материалы (резины, эластомерные композиции, пенополиуретаны и т.п.) широко применяют для гашения вибраций и шума в различных инженерных областях [1]. Их используют как виброизоляторы оборудования (например, вентиляционных агрегатов, насосов, компрессоров), опоры трубопроводов, упругого опирания фундаменто́в зданий, а также в элементах крепления облицовки, стеновых и потолочных панелей для акустической развязки (защиты от структурной звукопередачи) [2, 3]. Так, эластомерные виброопоры устанавливают под машинами и агрегатами, снижая передачу вибрации на строительные конструкции [2]. Резиновые виброизоляторы эффективно подавляют высокочастотные вибрации оборудования, но менее эффективны на низких частотах и со временем могут терять свойства (в следствии деградации свойств). Полиуретановые эластомеры рассматривают как более долговечную альтернативу традиционной резине: показано, что полиуретановые виброизолирующие пластины способны работать под большими статическими нагрузками и при вибрации, сохраняя свои свойства длительное время [4, 5]. В строительстве и промышленности такие материалы применяют в виде упругих прослоек и матов – например, Sylomer и Sylodyn (полиуретановые эластомеры компании Getzner) служат в качестве вибродемпфирующего мата для широкого спектра задач [5]. Отличительной особенностью Sylomer является стабильность виброизолирующих свойств в течение длительного срока эксплуатации и устойчивость к внешним воздействиям. Благодаря хорошо изученным статическим и динамическим характеристикам Sylomer, эффективность виброизоляции с его помощью может быть рассчитана заранее.

Виброизоляция оснований зданий и сооружений – еще одна область применения вязкоупругих материалов. В основе метода лежит установка фундамента на упругие эластомерные маты для отсечения передающих грунтовых колебаний [6]. Такая схема виброизоляции фундамента снижает колебания от транспорта (железнодорожного или автомобильного) и защищает здания и чувствительное оборудование внутри них [7]. Например, внедрение упругих подкладок Sylodyn под железнодорожными шпалами уменьшает вибрационную нагрузку на элементы верхнего строения пути и основание пути [8, 9]. В трубопроводах и инженерных сетях для вибро- и шумоизоляции применяют специальные решения: гибкие вставки, демпфирующие прокладки и подвесы. Для снижения структурного шума, передаваемого трубопроводами, используют упругие вибродемпфирующие вставки и прокладки в местах креплений и прохода через конструкции [3, 10]. Согласно отраслевым стандартам, высокоплотные вязкоупругие слои включают в конструкции кожухов и оболочек труб, выполняя роль акустического барьера [11]. В помещениях подвесы с эластомерными вибродемпфирующими элементами применяют при монтаже подвесных потолков и облицовок стен, предотвращая передачу вибрации на эти панели и тем самым повышая эффективность акустической изоляции. Необходимое снижение структурного шума в зданиях достигается именно посредством виброизоляции – то есть установки упругих элементов между источником вибрации и конструкциями здания. Благодаря этому колебания от оборудования инженерных систем (вентиляции, кондиционирования и др.) не распространяются на перекрытия и стены, что предотвращает преобразование колебаний в переизлучаемый шум. В целом, современная строительная практика широко использует вязкоупругие вибродемпфирующие материалы и устройства на их основе для защиты от вибраций и шума [1, 5].

Метод

Принципы DMA-анализа

Dynamic Mechanical Analysis (DMA, динамический механический анализ) – экспериментальный метод изучения вязкоупругих свойств материалов при контролируемом динамическом нагружении. При испытании образец материала подвергается малы́м гармоническим деформациям заданной амплитуды и частоты, при этом регистрируется отклик

– напряжение (или деформация) – с определенным сдвигом фаз относительно возбуждения [12]. Благодаря этому измеряют основные динамические параметры материала: комплексный модуль упругости $E^*(\omega)$ и его составляющие – действительную часть модуля упругости (модуль хранения, storage modulus) $E'(\omega)$ и мнимую часть модуля упругости (модуль потерь, loss modulus) $E''(\omega)$, а также коэффициент механических потерь tanδ. Комплексный модуль характеризует суммарную динамическую жесткость материала при заданной частоте, действительная часть модуля упругости E' отражает способность материала упруго накапливать энергию деформации, а мнимая часть E'' – способность безвозвратно рассеивать энергию за цикл нагружения. Эти компоненты вычисляют по амплитудно-фазовым соотношениям между напряжением и деформацией при гармоническом режиме нагружения:

$$\begin{gathered} E' = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}\cos\delta \\ E'' = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}\sin\delta \end{gathered}, \tag{1}$$

где δ – фазовый угол между напряжением и деформацией.

Отношение $\tan\delta = E''/E'$ характеризует долю рассеиваемой энергии в цикле. Например, при tanδ > 1 материал ведет себя преимущественно вязко (рассеивает больше энергии, чем накапливает упругой), а при tanδ < 1 – преимущественно как упругий (энергия в основном сохраняется в деформации) [13]. Вязкоупругим полимерам свойственно промежуточное поведение: так, для типичных эластомеров tanδ лежит в диапазоне ~0.1–1 и сильно зависит от условий (температуры, частоты и др.).

Оборудование для DMA представляет собой прецизионный механический анализатор с нагрузочным и измерительным узлами, часто интегрированный с термокамерой для контроля температуры испытания. Существуют различные конструкции – от одночастотных резонансных установок до современных приборов с электродинамическим нагружением. Примером является DMA Q800 (TA Instruments) – аппарат с линейным бесконтактным двигателем и оптическим датчиком деформаций, позволяющий исследовать материалы в диапазоне частот 0.01–200 Гц и температур от –150 до 600 °C. Для тестирования образцов применяют различные схемы нагружения: в стандартной комплектации имеются зажимы для испытаний в режимах изгиба (например, трёхточечного), растяжения тонких пленок и волокон, сжатия и сдвига – выбор зависит от формы и жесткости материала. Специальные аксессуары (например, криогенные или нагревательные камеры, ванны для испытаний во влажной среде) расширяют возможности DMA, позволяя проводить измерения свойств при различных внешних воздействиях.

Режимы испытаний DMA подразделяют на несколько типов в зависимости от управляемых параметров. Наиболее распространены следующие виды испытаний:

- **Амплитудный прогон (Amplitude Sweep):** испытание при постоянных частоте и температуре, но с постепенным увеличением амплитуды деформации. Цель – определить диапазон линейного поведения материала (границу линейно-вязкоупругого поведения, LVE). На малых деформациях модуль упругости E' остается примерно постоянным, но при превышении некоторого порога E' начинает снижаться – это сигнал о выходе из линейного режима. Таким образом находят допустимую амплитуду, при которой измерения будут характеризовать истинные свойства материала, независящие от величины деформации.

- **Частотный прогон (Frequency Sweep):** измерение динамических модулей при разных частотах нагружения (обычно в диапазоне от долей герца до сотен Гц) при фиксированных температуре и амплитуде (в пределах LVE). Такой тест позволяет получить спектр комплексного модуля $E^*(\omega)$, отражающий частотную зависимость жесткости и потерь материала. По результатам строятся кривые $E'(\omega)$, $E''(\omega)$ и $\tan\delta(\omega)$. Для полимеров обычно наблюдается характерное поведение: в низкочастотной области материал ведет себя более мягко (модуль ниже) и сильно поглощает энергию (потери высоки, $\tan\delta$ велик), а с ростом частоты модуль E' заметно увеличивается (переход от резиноподобного состояния к стеклообразному). Частотный анализ зачастую комбинируют с температурным, используя принцип температурно-временной суперпозиции (метод расширения частотного диапазона испытаний за счет серии измерений при различных температурах).

- **Температурный прогон (Temperature Sweep):** динамическое измерение при фиксированной частоте (обычно 1 Гц) и малой постоянной амплитуде, но с плавным изменением температуры образца. Полученные зависимости $E'(T)$, $E''(T)$, $\tan\delta(T)$ позволяют выявить температурные переходы материала – прежде всего температуру стеклования T_g, при которой происходит резкое падение модуля и максимум $\tan\delta$. DMA-метод считается одним из самых чувствительных к определению T_g полимеров, так как фиксирует даже слабые механические проявления перехода. На кривых $E'(T)$ стеклование проявляется как резкое снижение модуля (на несколько порядков), а на $E''(T)$ и $\tan\delta(T)$ – как выраженный пик поглощения.

- **Временной прогон (Time Sweep):** длительное выдерживание образца под динамической нагрузкой при постоянных частоте и температуре. Применяется для изучения эволюции свойств со временем – например, релаксации, кристаллизации или отверждения полимера. Так, можно следить за ростом модуля в процессе отверждения связующего или за ползучестью образца под постоянной нагрузкой с помощью периодических измерений модулей во времени.

Другие режимы включают изменение влажности окружающей среды для исследования влияния влаги на модуль упругости и различные комбинированные воздействия [12]. Разнообразие испытательных методик DMA делает его универсальным инструментом: он позволяет не только определять модуль упругости и коэффициент потерь материала, но и анализировать переходы состояния, долговременную релаксацию, усталостное поведение, а также оценивать эффективность вибродемпфирования. В частности, для пенополиуретановых вязкоупругих материалов высокий модуль потерь при рабочих частотах означает эффективное снижение передаваемых вибраций. Именно поэтому при выборе материалов для вибро- и шумоизоляции в строительстве и машиностроении разработчики широко используют DMA-испытания – они дают частотные зависимости динамического модуля, необходимые для расчета колебаний и шумовых характеристик конструкций [7, 14].

Феноменологические модели вязкоупругих материалов

Модели поведения вязкоупругих материалов позволяют по экспериментальным данным (например, DMA-спектрам) идентифицировать параметры, пригодные для инженерных расчетов. Классическая теория линейной вязкоупругости (представленная в работах Ферри, Кристенсена и др. [16, 17]) оперирует моделями на основе комбинаций идеального упругого элемента (пружины) с модулем E и идеального вязкого элемента (демпфера) с коэффициентом вязкости η. Простейшие из них – модели Максвелла и Кельвина–Фойгта – описывают ограниченные случаи релаксации, поэтому на практике часто применяются их обобщения: **стандартное линейное твердое тело** (модель Зинера-Ржаницына или Томсона-Пойтинга-Ишлинского) и более сложные **многоэлементные модели** (последовательные или параллельные соединения нескольких пружин и демпферов) [14]. При идентификации параметров по DMA-данным обычно подбирают такую модель и значения ее параметров, чтобы теоретическая частотная зависимость $E^*(\omega)$ наилучшим образом совпала с экспериментальной. Ниже рассмотрены основные модели и соответствующие им частотные характеристики.

Модель Кельвина–Фойгта (КФ), приведённая на рисунке 1, представляет собой параллельное соединение упругого элемента E и вязкого демпфера η. Напряжения и деформации в этой модели связаны соотношением:

$$\sigma(t) = E\varepsilon(t) + \eta\dot{\varepsilon}(t). \tag{2}$$

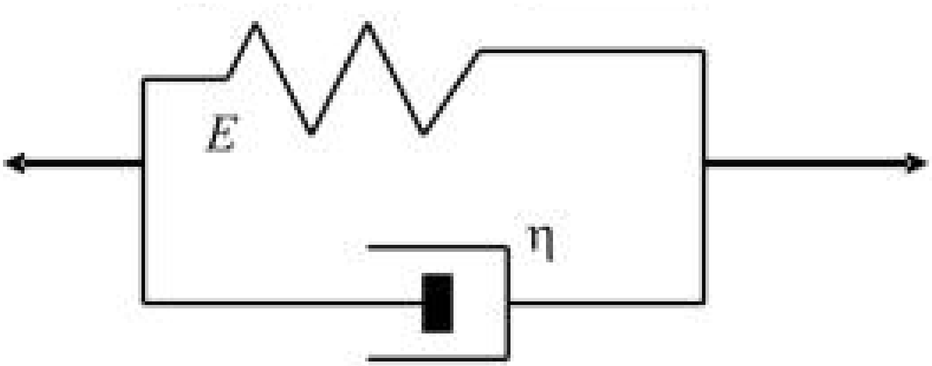


Рисунок 1 – Модель Кельвина-Фойгта

Соответственно *комплексный модуль* упругости примет вид:

$$E_{dyn}^{KV}(i\omega) = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} = E + i\eta\omega, \tag{3}$$

где ω=2πf – круговая частота.

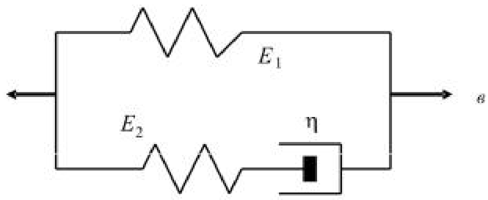
Действительная часть $E' = E$ здесь постоянна и равна мгновенному модулю упругости (материал не проявляет упругого упрочнения с частотой), а мнимая часть $E''=\eta\,\omega$ растет пропорционально частоте (потери увеличиваются на высоких частотах). Данная модель хорошо описывает поведение вязкоупругого материала на относительно *высоких частотах* (или коротких временах) – в пределе $\omega\to\infty$ она даёт конечный модуль $E'\to E$. Однако на низких частотах модель Кельвина–Фойгта предсказывает незатухающее демпфирование (поскольку $E''\to 0$ линейно по ω, а $\tan\delta = \dfrac{\eta\omega}{E} \to 0$).

В реальности же многие полимеры при предельно низких частотах проявляют эффект невязкой деформации течения. Поэтому модель КФ не способна отразить медленное релаксирующее разупрочнение материала. Тем не менее, благодаря простоте, она часто применяется для описания поведения вибродемпфирующих материалов и оценок демпфирования при небольших колебаниях. Например, экспериментально полученные высокочастотные кривые tanδ(f) у реальных эластомеров нередко убывают с частотой аналогично модели Кельвина–Фойгта (хотя абсолютные значения E'' при этом задаются более сложными механизмами внутреннего трения) [1].

Модель стандартного линейного твердого тела (СЛТ) – это простейшая модель с конечным временем релаксации, способная описывать как мгновенную, так и длительную упругость материала. Она реализуется сочетанием упругих элементов E_1, E_2 и демпфера η, как показано на рисунке 2. Дифференциальное уравнение модели Зенера можно записать как:

$$\dot{\varepsilon} + \frac{E_1}{\eta}\varepsilon = \frac{1}{\eta}\dot{\sigma} + \frac{E_1}{\eta}\sigma. \tag{4}$$

а)



б)

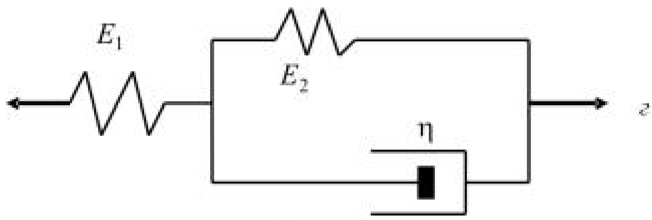


Рисунок 2 – Модель стандартного линейного твёрдого тела в постановке: а) Зинера-Ржаницына; б) Томпсона-Пойтинга-Ишлинского

Частотная зависимость комплексного модуля для СЛТ-модели выражается формулой:

$$E^{*}_{\text{Zener}}(i\omega) = E_{\infty} + \frac{E_0 - E_{\infty}}{1 + i\omega\tau}, \tag{5}$$

где E_0=E_1+E_2 – статический модуль (при ω→0); E_∞ = E_2 – стеклообразующий модуль (при ω→∞); τ=η/E_1 – характерное время релаксации.

Данная модель предсказывает, что на частотах, намного меньших 1/τ1, материал проявляет разупрочнение до уровня E_0 (полностью релаксированного модуля), а на высоких частотах – упрочняется до E_∞ (при отсутствии времени на релаксацию). Максимум механических потерь tanδ(ω) в модели Зенера достигается при ω=1/τ и равен:

$$\tan\delta_{\max} = \frac{E_0}{E_\infty}\frac{1}{2\sqrt{E_0 / E_\infty + 1}} \text{ (при } E_0 > E_\infty\text{).} \tag{6}$$

Таким образом, СЛТ-модель воспроизводит пик потерь при собственной частоте материала, что более точно соответствует экспериментальным DMA-спектрам полимеров, чем модель Кельвина–Фойгта [14]. Тем не менее, форма спектра tanδ(ω) по модели Зенера – симметричный пик (кривая Дебая). Реальные же полимерные материалы часто демонстрируют асимметричные, «растянутые» спектры потерь с более пологим спадом на высоких частотах [18]. Для описания такого поведения одной стандартной релаксации недостаточно; приходится либо усложнять модель добавлением элементов (несколько пар E, η с разными τ), либо использовать модели на основе дробных производных.

Дробные модели (фракционные производные)

Дробно-экспонентные модели вязкоупругости вводят параметры нецелого (дробного) порядка в известных моделях типа Кельвина–Фойгта и Зенера. Впервые математический аппарат *дробного исчисления* для описания реологических свойств был предложен в конце XIX века (Абелем) и развит в 1970-х годах (Капуто, 1969). Пионерными работами в применении дробных производных к реальным материалам стали исследования Бэгли и Торвика и Кёллера, показавшие эффективность такого подхода для моделирования вязкоупругих свойств полимеров [19, 20]. В последующем обзоры и развитие теории дробного анализа механических систем были расширены российскими учеными Россихиным и Шитиковой (1997) [21]. Главная идея состоит в обобщении классических вязких элементов: вводится новый элемент типа демпфера, обладающий промежуточными свойствами между чисто упругим и чисто вязким. Он характеризуется параметрами J и α (где 0<α<1), связывая напряжение и деформацию соотношением вида $\sigma = J\,{}_0D_t^{\alpha}\varepsilon$ (где D^α – оператор дифференцирования дробного порядка α по времени).

В частотной области такому элементу соответствует комплексная импедансная функция $J(i\omega)^{\alpha}$, т.е. в модель Кельвина–Фойгта с дробным демпфером формула модуля принимает вид: $E^{*} = E + (i\omega)^{\alpha} J$.

Дробная модель Зенера обычно вводится либо как замена обычного демпфера на дробный (однопараметрическая дробная модель), либо как замена сразу двух элементов – демпфера и одной из пружин – на элементы дробного порядка (двухпараметрическая модель). Например, *однопараметрическая* дробная модель Зенера задается соотношением:

$$E^{*}(i\omega) = E_{\infty} + \frac{E_0 - E_{\infty}}{1 + (i\omega\tau)^{\alpha}}, \tag{7}$$

В (7) показатель α описывает «растяжение» релаксационного спектра материала. При α=1 модель переходит в классическую модель Зенера, а при 0<α<1 дает более пологий спад модуля потерь $E''(\omega)$ на высоких частотах, лучше соответствующий эксперименту [18]. *Двухпараметрические* модели вводят два показателя α и β для описания разного поведения на низких и высоких частотах (например, модель Пуа – с дробным порядком в дифференциалах напряжения и деформации). Как показывают [18], различие порядков дробных производных в уравнении модели напрямую связано с асимптотическим значением коэффициента потерь на высоких частотах. Дробные модели обладают меньшим числом параметров по сравнению с эквивалентными каскадами классических моделей, но позволяют гибко подгонять форму спектра потерь.

В литературе накоплен значительный опыт применения дробных моделей для идентификации свойств материалов [21]. Так, T. Pritz предложил ряд моделей дробного порядка и успешно аппроксимировал ими экспериментальные динамические характеристики различных полимерных демпфирующих материалов. В частности, пятипараметрическая модель (с двумя дробными параметрами) хорошо описывает несимметричный пик потерь и высокочастотное плато на tanδ(f) для каучуков [18]. Различные модификации таких моделей обсуждались в [22] – ими введена так называемая *генерализованная дробная модель* на основе распределения релаксаций. Бэгли с соавторами применяли дробный оператор к описанию ползучести и релаксации пластиков [19], а Россихин и Шитикова исследовали решения задач колебаний одно- и многомассовых систем с учетом дробной модели материалов [21, 23, 24]. Таким образом, на сегодня дробно-реологические модели признаны мощным инструментом для описания динамического поведения реальных вязкоупругих материалов, и их использование оправдано при идентификации параметров по DMA-данным, особенно если материал проявляет сложные спектры демпфирования.

Объект исследования

В качестве объекта исследования выбран вспененный полиуретан с замкнутыми порами, широко применяемый для задач виброизоляции разноообразного оборудования, зданий и сооружений. Его динамические характеристики, полученные с помощью DMA-аппарата приведены на рисунке 1 а и б, в виде действительной части модуля упругости и коэффициента потерь, соответственно.

Целью данного исследования является определение параметров дробных моделей материалов, применяемых для описания динамических и реологических свойств и интеграции модели в более сложные задачи динамики сооружений. Выбраны три феноменологических модели материала, содержащие дробную производную для описания поведения такого типа материала. Для каждой из выбранных дробных моделей приведены выражения динамического модуля упругости и коэффициента потерь:

- Дробная модель Кельвина-Фойгта (fKV).

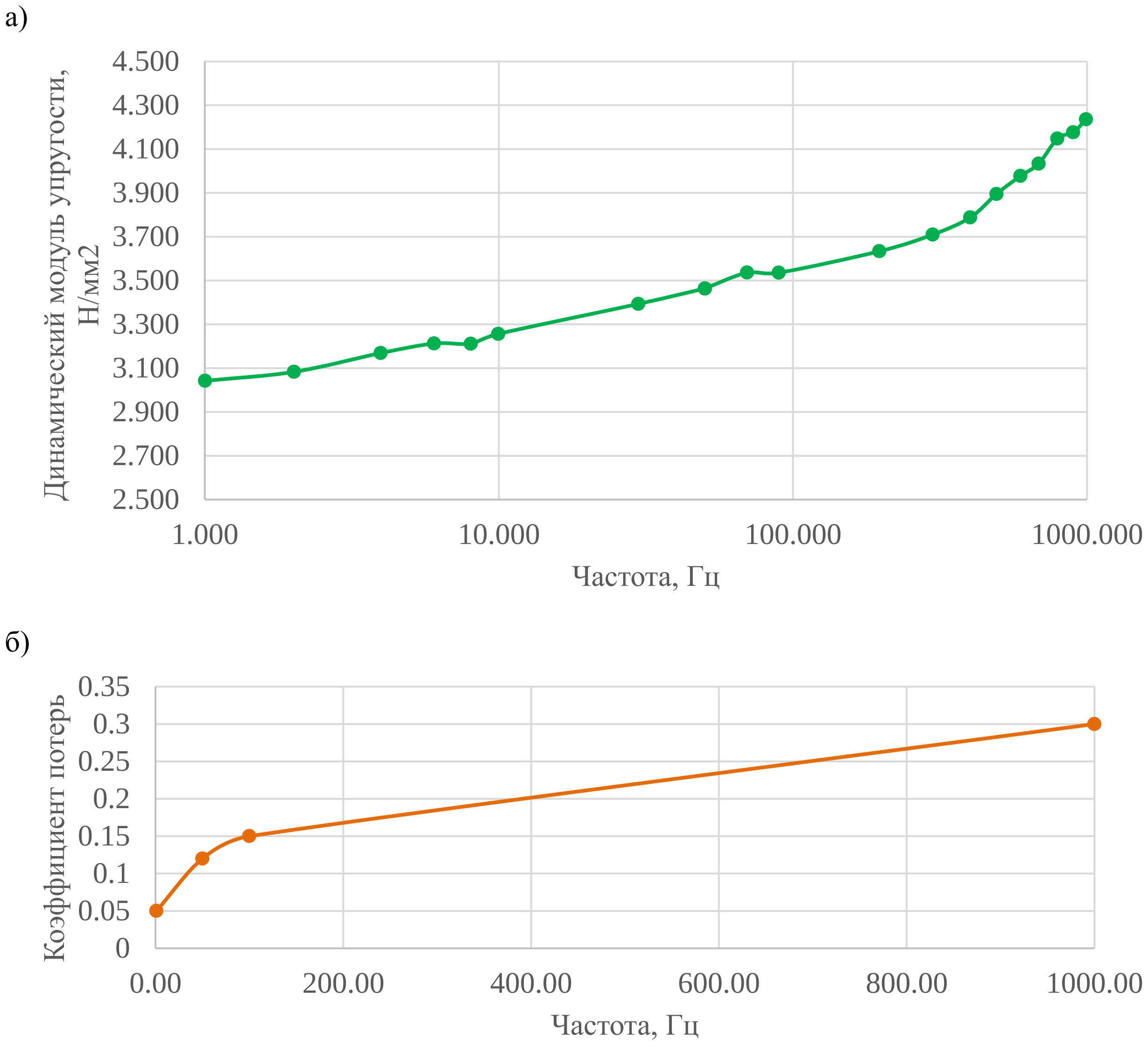


Рисунок 3 – Действительная (а) часть модуля упругости и коэффициент потерь (б) механической энергии при колебаниях для выбранного образца

Комплексный динамический модуль упругости определяется выражением:

$$E_{dyn}^{fKV} = E_0\left(1 + \tau_\sigma^\gamma (i\omega)^\gamma\right). \tag{8}$$

Действительная и мнимые части комплексного динамического модуля упругости примут вид:

$$E_1^{fKV} = Re\left[E_{dyn}^{fKV}\right] = E_0\left(1 + \tau_\sigma^\gamma \omega^\gamma \cos\frac{\gamma\pi}{2}\right)$$
$$E_2^{fKV} = Im\left[E_{dyn}^{fKV}\right] = \tau_\sigma^\gamma \omega^\gamma \sin\frac{\gamma\pi}{2}. \tag{9}$$

Тангенс угла потерь определится соотношением:

$$\tan\delta^{fKV} = \frac{Im\left[E_{dyn}^{fKV}\right]}{Re\left[E_{dyn}^{fKV}\right]} = \frac{\tau_\sigma^\gamma \omega^\gamma \sin\frac{\gamma\pi}{2}}{1+\tau_\sigma^\gamma \omega^\gamma \cos\frac{\gamma\pi}{2}}. \tag{10}$$

- Дробная модель СЛТ с 1 параметром дробности (fSLS1)

Комплексный динамический модуль упругости определяется выражением:

$$E_{dyn}^{fSLS1} = E_0\,\frac{1+\tau_\sigma^\gamma (i\omega)^\gamma}{1+\tau_\varepsilon^\gamma (i\omega)^\gamma}. \tag{11}$$

Действительная и мнимые части комплексного динамического модуля упругости примут вид:

$$E_1^{fSLS1} = Re\left[E_{dyn}^{fSLS1}\right] = E_0 \frac{1+\cos\frac{\gamma\pi}{2}\omega^\gamma\left(\tau_\varepsilon^\gamma+\tau_\sigma^\gamma\right)+\tau_\varepsilon^\gamma\tau_\sigma^\gamma\omega^{2\gamma}}{\left(1+\tau_\varepsilon^\gamma\omega^\gamma\cos\frac{\gamma\pi}{2}\right)^2+\left(\tau_\varepsilon^\gamma\omega^\gamma\sin\frac{\gamma\pi}{2}\right)^2}$$

$$E_2^{fSLS1} = Im\left[E_{dyn}^{fSLS1}\right] = E_0 \frac{\omega^\gamma \sin\frac{\gamma\pi}{2}\left(\tau_\sigma^\gamma-\tau_\varepsilon^\gamma\right)}{\left(1+\tau_\varepsilon^\gamma\omega^\gamma\cos\frac{\gamma\pi}{2}\right)^2+\left(\tau_\varepsilon^\gamma\omega^\gamma\sin\frac{\gamma\pi}{2}\right)^2}. \quad (12)$$

Тангенс угла потерь определится соотношением:

$$\tan\delta^{fSLS1} = \frac{Im\left[E_{dyn}^{fSLS1}\right]}{Re\left[E_{dyn}^{fSLS1}\right]} = \frac{\omega^\gamma \sin\frac{\gamma\pi}{2}\left(\tau_\sigma^\gamma-\tau_\varepsilon^\gamma\right)}{1+\cos\frac{\gamma\pi}{2}\omega^\gamma\left(\tau_\varepsilon^\gamma+\tau_\sigma^\gamma\right)+\tau_\varepsilon^\gamma\tau_\sigma^\gamma\omega^{2\gamma}}. \quad (13)$$

- Дробная модель СЛТ с 2мя параметрами дробности (fSLS2)

Комплексный динамический модуль упругости определяется выражением:

$$E_{dyn}^{fSLS2} = E_0 \frac{1+\tau_\sigma^\beta(i\omega)^\beta}{1+\tau_\varepsilon^\alpha(i\omega)^\alpha}. \quad (14)$$

Действительная и мнимые части комплексного динамического модуля упругости примут вид:

$$E_1^{fSLS2} = Re\left[E_{dyn}^{fSLS2}\right] = E_0 \frac{1+(\omega\tau_\sigma)^\beta\cos\left(\beta\frac{\pi}{2}\right)+(\omega\tau_\sigma)^\beta(\omega\tau_\varepsilon)^\alpha\cos(\beta-\alpha)\frac{\pi}{2}+(\omega\tau_\varepsilon)^\alpha\cos\left(\alpha\frac{\pi}{2}\right)}{1+(\omega\tau_\varepsilon)^{2\alpha}+2(\omega\tau_\varepsilon)^\alpha\cos\left(\alpha\frac{\pi}{2}\right)}$$

$$E_2^{fSLS2} = Im\left[E_{dyn}^{fSLS2}\right] = E_0 \frac{(\omega\tau_\sigma)^\beta\sin\left(\beta\frac{\pi}{2}\right)+(\omega\tau_\sigma)^\beta(\omega\tau_\varepsilon)^\alpha\sin(\beta-\alpha)\frac{\pi}{2}-(\omega\tau_\varepsilon)^\alpha\sin\left(\alpha\frac{\pi}{2}\right)}{1+(\omega\tau_\varepsilon)^{2\alpha}+2(\omega\tau_\varepsilon)^\alpha\cos\left(\alpha\frac{\pi}{2}\right)}. \quad (15)$$

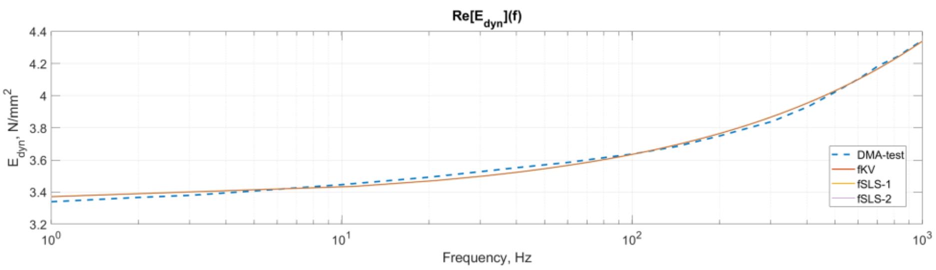
Тангенс угла потерь определится соотношением:

$$\tan\delta^{fSLS2} = \frac{Im\left[E_{dyn}^{fSLS2}\right]}{Re\left[E_{dyn}^{fSLS2}\right]} = \frac{(\omega\tau_\sigma)^\beta\sin\left(\beta\frac{\pi}{2}\right)+(\omega\tau_\sigma)^\beta(\omega\tau_\varepsilon)^\alpha\sin(\beta-\alpha)\frac{\pi}{2}-(\omega\tau_\varepsilon)^\alpha\sin\left(\alpha\frac{\pi}{2}\right)}{1+(\omega\tau_\sigma)^\beta\cos\left(\beta\frac{\pi}{2}\right)+(\omega\tau_\sigma)^\beta(\omega\tau_\varepsilon)^\alpha\cos(\beta-\alpha)\frac{\pi}{2}+(\omega\tau_\varepsilon)^\alpha\cos\left(\alpha\frac{\pi}{2}\right)}. \quad (16)$$

Результаты и обсуждение

Для идентификации параметров использовали нелинейный метод наименьших квадратов, реализованный в ПК MATLAB. Результаты аппроксимации действительной части динамического модуля упругости по рисунку 1а моделями (9), (12) и (15) приведены на рисунке 2 а – в.

а)



б)

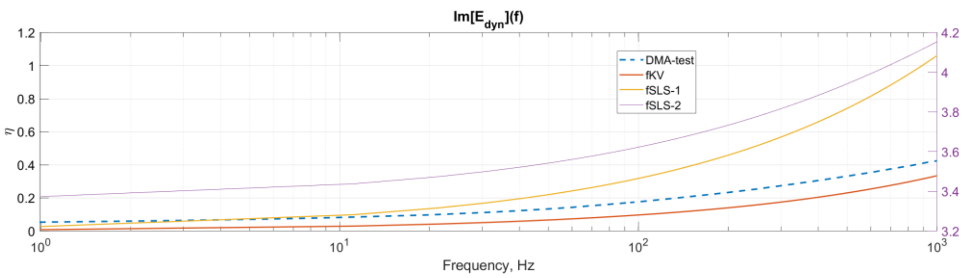


Рисунок 4 – Результат аппроксимации действительной (а) и мнимой (б) частей динамического модуля упругости материала дробными моделями

По результатам идентификации составлена таблица 1 с полученными параметрами сходимости для выбранных моделей.

Таблица 1 – Параметры сходимости

№ п/п	Наименование модели	R^2	SSE	DFE	RMSE
1	fKV	0,99739	0,00592	18	0,0181
2	fSLS1	0,9974	0,00589	17	0,0186
3	fSLS2	0,99769	0,00525	16	0,0181

Результаты аппроксимации экспериментальных данных показывают, что при прямой идентификации только действительной части комплексного модуля упругости, различия в представленных моделях в пределах выбранного диапазона частот практически нет. При незначительном повышении точности аппроксимации (по критерию R^2 или RMSE/SSE) более сложные модели – модели СЛТ с 2мя параметрами дробности показывают намного более хорошие результаты. Результаты идентификации параметров моделей (с 95% доверительным интервалом) приведены в таблице 2.

Таблица 2 – Идентифицированные параметры моделей

№ п/п	Наименование модели	Параметры модели				
		E_0	γ (α)	τ_σ	τ_ε	β
1	fKV	3,348	0,538	0,000224	-	-
2	fSLS1	3,348	0,538	0,000256	2.08E-6	-
3	fSLS2	3,343	0,98	0,000183	7,26E-5	0,5169

Как видно, для выбранного образца материала параметр дробности в 1-параметрических моделях fKV и fSLS1 практически совпадает, как и величина модуля E_0. При этом, следует заметить, что параметр дробности γ является нецелой величиной, меньшей единицы, т.е. материал проявляет промежуточные свойства между чисто упругими и чисто вязкими. Время релаксации τ_σ по всем выбранным моделям находится в относительной близости, в отличие от времени ретардации τ_ε, которое между моделями fSLS1 и fSLS2 отличается в 36 раз.

При этом если по результатам аппроксимации действительной части построить графики для мнимой части комплексного модуля упругости, наблюдаемая картина будет существенным образом отличаться от рассмотренной выше. В частности, аппроксимация моделью дробного Кельвина-Фойгта fKV будет давать более близкие значения к экспериментальной кривой, чем моделями стандартного линейного твёрдого тела fSLS1 и fSLS2. Это связано, в первую очередь, с более высокой чувствительностью моделей СЛТ, чем модели КФ в связи с наличием бо́льшего числа параметров и нелинейной зависимостью между ними. Кроме того, для повышения точности аппроксимации экспериментальных данных выбранными моделями рекомендуется использовать более широкий частотный диапазон (например, от 10^{-5} до 10^{5} Гц), который не всегда доступен исходя из возможностей приборов для DMA-анализа.

С целью повышения точности аппроксимации по рассмотренному подходу рекомендуется указывать прогнозируемые величины идентифицируемых параметров моделей материала в качестве начальных условий. В частности, в силу своего физического смысла, величину модуля E_0 можно задавать равным $E_{ст}$ для данного вида материала. Приближение для параметра дробности допускается указывать в диапазоне 0,5 – 0,8 в зависимости от типа материала. Кроме того, величину τ_σ следует назначать большей, чем τ_ε. исходя из термодинамических соотношений. Для начального приближения допустимо выбирать из 10^{-4} и 10^{-5} с, соответственно.

Заключение

Динамический механический анализ (DMA) является ключевым методом испытаний для идентификации параметров вязкоупругих материалов. По результатам DMA-испытаний получают частотные и температурные зависимости динамических модулей, которые затем аппроксимируют феноменологическими моделями. В статье показано, что классические модели (Кельвина–Фойгта, Максвелла, стандартное линейное тело и обобщенные их комбинации) позволяют описывать базовые характеристики полимеров – наличие конечного модуля при высоких частотах, наличие релаксации и пика потерь. Однако для многих современных материалов (например, высокодемпфирующих полиуретанов, эластомерных композитов) спектры механических потерь асимметричны и простираются на широкий диапазон частот. Для их описания более эффективны модели с дробными производными, которые вводят дополнительные степени свободы (нецелые показатели) и тем самым лучше согласуются с экспериментальными данными. Идентификация параметров сводится к нахождению такого набора констант модели, при котором расчетный комплексный модуль совпадает с DMA-спектром материала. Достоверность этой процедуры определяется правильным выбором модели – поэтому выбор математической модели является принципиальным этапом при обработке DMA-данных. Полученные параметры (модули упругости, времена релаксации или показатели дробных степеней) имеют ясный физический смысл и используются далее при расчетах колебаний и демпфирования.

Полученные параметры вязкоупругих материалов успешно внедряются в компьютерные модели зданий, машин и сооружений – позволяя инженерам эффективно прогнозировать вибрации и шум и обеспечивать требуемую вибро- и шумоизоляцию на практике.

Благодарности

Работа выполнена при поддержке гранта Российского научного фонда № 25-11-00140.

Acknowledgments

This research was supported by the Russian Science Foundation (Project No. 25-11-00140).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Skuratova T.B., Kirillov S.E., Syatkovskiy A.I. Dissipative Properties of Polymer Films and Composite Materials Based on Polyvinyl Acetate // *Russian Journal of Applied Chemistry*. 2019. Vol. 92, No. 7. Pp. 952-957. doi:10.1134/S1070427219070115
2. Волкова Н. Виброизоляция вентиляционного оборудования // *СОК*. 2011. №10.
3. Гусев В.П. Вибрация как источник структурного шума, создаваемого оборудованием инженерных систем, и средства виброизоляции // *Academia. Архитектура и строительство*. 2010. №3.
4. Яковлев С.Н., Мазурин В.Л. Виброизолирующие свойства полиуретановых эластомеров, применяемых в строительстве // *Инженерно-строительный журнал*. 2017. №6(74). С. 53-60. doi:10.18720/MCE.74.5
5. Ясафова С.А. Исследование оптимизации виброизолирующих материалов строительных конструкций // *E-Scio*. 2021. №2(53).
6. U.S. Department of Transportation Federal Transit Administration. Guidelines for Vibration Prediction in Rail Projects. 2020.
7. Cortazar-Noguerol J., Cortés F., Sarría I., Elejabarrieta M.J. Preload Influence on the Dynamic Properties of a Polyurethane Elastomeric Foam // *Polymers*. 2024. Vol. 16, No. 13. 1844. doi:10.3390/polym16131844
8. Somarathna H.M.C.C., Raman S.N., Mohotti D., Mutalib A.A., Badri K.H. The Use of Polyurethane for Structural and Infrastructural Engineering Applications: A State-of-the-Art Review // *Construction and Building Materials*. 2018. Vol. 190. Pp. 995-1014.
9. Ngamkhanong C., Kaewunruen S. Effects of under Sleeper Pads on Dynamic Responses of Railway Prestressed Concrete Sleepers Subjected to High Intensity Impact Loads // *Engineering Structures*. 2020. Vol. 214. 110604.
10. Гусев В.П. Опыт борьбы с шумом оборудования инженерных систем // *Academia. Архитектура и строительство*. 2009. №5.
11. Mohammad K., Asthana A., Cockerham G., Almond M. Innovative acoustic jacketing for oil and gas pipelines // *Proceedings of 6th World PetroCoal Congress*. New Delhi, India, 2016.
12. Anton Paar GmbH. Basics of Dynamic Mechanical Analysis (DMA). URL: https://wiki.anton-paar.com/us-en/basics-of-dynamic-mechanical-analysis-dma

13. Tain Instruments. Introduction to dynamic mechanical analysis and its application to testing of polymer solids. 2023. URL: https://www.tainstruments.com/applications-notes/introduction-to-dynamic-mechanical-analysis-and-its-application-to-testing-of-polymer-solids

14. Xu Y., Dong Y., Huang X., Luo Y., Zhao S. Properties Tests and Mathematical Modeling of Viscoelastic Damper at Low Temperature With Fractional Order Derivative // *Frontiers in Materials*. 2019. Vol. 6. 194. doi:10.3389/fmats.2019.00194

15. Lucklum R., Soares D. Viscoelastic Properties of Macromolecules // *Piezoelectric Transducers and Applications*. Berlin, Heidelberg: Springer, 2009. doi:10.1007/978-3-540-77508-9_7

16. Ферри Дж. Вязкоупругие свойства полимеров. М.: Издатинлит, 1963. 536 с.

17. Кристенсен Р. Введение в механику композитов. М.: Мир, 1982. 336 с.

18. Pritz T. Five-parameter fractional derivative model for polymeric damping materials // *Journal of Sound and Vibration*. 2003. Vol. 265. Pp. 935-952. doi:10.1016/S0022-460X(02)01530-4

19. Bagley R.L., Torvik P.J. Fractional Calculus—A Different Approach to the Analysis of Viscoelastically Damped Structures // *AIAA Journal*. 1983. Vol. 21. Pp. 741-748. doi:10.2514/3.8142

20. Koeller R.C. Applications of Fractional Calculus to the Theory of Viscoelasticity // *Journal of Applied Mechanics*. 1984. Vol. 51. Pp. 299-307. doi:10.1115/1.3167616

21. Rossikhin Y.A., Shitikova M.V. Applications of Fractional Calculus to Dynamic Problems of Linear and Nonlinear Hereditary Mechanics of Solids // *Applied Mechanics Reviews*. 1997. Vol. 50, No. 1. Pp. 15-67. doi:10.1115/1.3101682

22. Schiessel H., Metzler R., Blumen A., Nonnenmacher T. Generalized viscoelastic models: Their fractional equations with solutions // *Journal of Physics A: Mathematical and General*. 1995. Vol. 28. Pp. 6567-6584. doi:10.1088/0305-4470/28/23/012

23. Rossikhin Yu.A., Shitikova M.V. Comparative analysis of viscoelastic models involving fractional derivatives of different orders // *Fractional Calculus and Applied Analysis*. 2007. Vol. 10.

24. Shitikova M.V. Fractional Operator Viscoelastic Models in Dynamic Problems of Mechanics of Solids: A Review // *Mechanics of Solids*. 2021. Vol. 57. doi:10.3103/S0025654422010022

REFERENCES

1. Skuratova T.B., Kirillov S.E., Syatkovskiy A.I. Dissipative Properties of Polymer Films and Composite Materials Based on Polyvinyl Acetate. *Russian Journal of Applied Chemistry*. 2019. Vol. 92, No. 7. Pp. 952-957. doi:10.1134/S1070427219070115

2. Volkova N. Vibroizolyatsiya ventilyatsionnogo oborudovaniya [Vibration Isolation of Ventilation Equipment]. *SOK*. 2011. No. 10. (rus).

3. Gusev V.P. Vibratsiya kak istochnik strukturnogo shuma, sozdaemogo oborudovaniem inzhenernykh sistem, i sredstva vibroizolyatsii [Vibration as a Source of Structural Noise Created by Engineering Systems Equipment and Vibration Isolation Means]. *Academia. Arkhitektura i stroitelstvo*. 2010. No. 3. (rus).

4. Yakovlev S.N., Mazurin V.L. Vibroizoliruyushchie svoystva poliuretanovykh elastomerov, primenyaemykh v stroitelstve [Vibration Isolation Properties of Polyurethane Elastomers Used in Construction]. *Inzhenerno-stroitelnyy zhurnal*. 2017. No. 6(74). Pp. 53-60. doi:10.18720/MCE.74.5 (rus).

5. Yasafova S.A. Issledovanie optimizatsii vibroizoliruyushchikh materialov stroitelnykh konstruktsiy [Study of Optimization of Vibration Isolation Materials for Building Structures]. *E-Scio*. 2021. No. 2(53). (rus).

6. U.S. Department of Transportation Federal Transit Administration. *Guidelines for Vibration Prediction in Rail Projects*. 2020.

7. Cortazar-Noguerol J., Cortés F., Sarría I., Elejabarrieta M.J. Preload Influence on the Dynamic Properties of a Polyurethane Elastomeric Foam. *Polymers*. 2024. Vol. 16, No. 13. 1844. doi:10.3390/polym16131844

8. Somarathna H.M.C.C., Raman S.N., Mohotti D., Mutalib A.A., Badri K.H. The Use of Polyurethane for Structural and Infrastructural Engineering Applications: A State-of-the-Art Review. *Construction and Building Materials*. 2018. Vol. 190. Pp. 995-1014.

9. Ngamkhanong C., Kaewunruen S. Effects of under Sleeper Pads on Dynamic Responses of Railway Prestressed Concrete Sleepers Subjected to High Intensity Impact Loads. *Engineering Structures*. 2020. Vol. 214. 110604.

10. Gusev V.P. Opyt borby s shumom oborudovaniya inzhenernykh sistem [Experience in Combating Noise from Engineering Systems Equipment]. *Academia. Arkhitektura i stroitelstvo*. 2009. No. 5. (rus).

11. Mohammad K., Asthana A., Cockerham G., Almond M. Innovative acoustic jacketing for oil and gas pipelines. *Proceedings of 6th World PetroCoal Congress*. New Delhi, India, 2016.

12. Anton Paar GmbH. Basics of Dynamic Mechanical Analysis (DMA). URL: https://wiki.anton-paar.com/us-en/basics-of-dynamic-mechanical-analysis-dma

13. Tain Instruments. Introduction to dynamic mechanical analysis and its application to testing of polymer solids. 2023. URL: https://www.tainstruments.com/applications-notes/introduction-to-dynamic-mechanical-analysis-and-its-application-to-testing-of-polymer-solids

14. Xu Y., Dong Y., Huang X., Luo Y., Zhao S. Properties Tests and Mathematical Modeling of Viscoelastic Damper at Low Temperature With Fractional Order Derivative. *Frontiers in Materials*. 2019. Vol. 6. 194. doi:10.3389/fmats.2019.00194

15. Lucklum R., Soares D. Viscoelastic Properties of Macromolecules. In: *Piezoelectric Transducers and Applications*. Berlin, Heidelberg: Springer, 2009. doi:10.1007/978-3-540-77508-9_7

16. Ferry J.D. *Vyazkouprugie svoystva polimerov* [Viscoelastic Properties of Polymers]. Moscow: Izdatinlit, 1963. 536 p. (rus).

17. Christensen R. *Vvedenie v mekhaniku kompozitov* [Introduction to Mechanics of Composites]. Moscow: Mir, 1982. 336 p. (rus).

18. Pritz T. Five-parameter fractional derivative model for polymeric damping materials. *Journal of Sound and Vibration*. 2003. Vol. 265. Pp. 935-952. doi:10.1016/S0022-460X(02)01530-4

19. Bagley R.L., Torvik P.J. Fractional Calculus—A Different Approach to the Analysis of Viscoelastically Damped Structures. *AIAA Journal*. 1983. Vol. 21. Pp. 741-748. doi:10.2514/3.8142

20. Koeller R.C. Applications of Fractional Calculus to the Theory of Viscoelasticity. *Journal of Applied Mechanics*. 1984. Vol. 51. Pp. 299-307. doi:10.1115/1.3167616

21. Rossikhin Y.A., Shitikova M.V. Applications of Fractional Calculus to Dynamic Problems of Linear and Nonlinear Hereditary Mechanics of Solids. *Applied Mechanics Reviews*. 1997. Vol. 50, No. 1. Pp. 15-67. doi:10.1115/1.3101682

22. Schiessel H., Metzler R., Blumen A., Nonnenmacher T. Generalized viscoelastic models: Their fractional equations with solutions. *Journal of Physics A: Mathematical and General*. 1995. Vol. 28. Pp. 6567-6584. doi:10.1088/0305-4470/28/23/012

23. Rossikhin Yu.A., Shitikova M.V. Comparative analysis of viscoelastic models involving fractional derivatives of different orders. *Fractional Calculus and Applied Analysis*. 2007. Vol. 10.

24. Shitikova M.V. Fractional Operator Viscoelastic Models in Dynamic Problems of Mechanics of Solids: A Review. *Mechanics of Solids*. 2021. Vol. 57. doi:10.3103/S0025654422010022

Информация об авторах

Смирнов Владимир Александрович
Научно-исследовательский институт строительной физики Российской академии архитектуры и строительных наук (НИИСФ РААСН), г. Москва, Россия
Кандидат техн.наук, доцент кафедры Теоретической и строительной механики НИУ МГСУ, ведущий научный сотрудник лаборатории «Комплексные проблемы виброакустики» НИИСФ РААСН.
E-mail: belohvost@list.ru

Information about authors

Vladimir A. Smirnov
Research Institute of Building Physics of the Russian Academy of Architecture and Construction Sciences (NIISF RAASN), Moscow, Russia
PhD in Technical Sciences, Associate Professor of Theoretical and Structural Mechanics Department, Moscow State University of Civil Engineering (National Research University); Leading Researcher at the "Complex Problems of Vibroacoustics" Laboratory, NIISF RAASN.
E-mail: belohvost@list.ru

Статья поступила в редакцию 07.05.2025
Одобрена после рецензирования 09.06.2025
Принята к публикации 14.06.2025

The article was submitted 07.05.2025
Approved after reviewing 09.06.2025
Accepted for publication 14.06.2025