

В.Г. СЕБЕШЕВ<sup>1</sup>, Н.А. ЛЮФТ,<sup>1</sup> Ю.А. ГЕРБЕР<sup>1</sup>

<sup>1</sup>ФГБОУ ВО «Новосибирский государственный архитектурно-строительный университет (Сибстрин)»,  
г. Новосибирск, Россия

## МЕТОД РАСЧЕТА ПАРАМЕТРОВ КОМПЛЕКСОВ ДИНАМИЧЕСКИХ ГАСИТЕЛЕЙ КОЛЕБАНИЙ КАК РЕГУЛЯТОРОВ НАПРЯЖЕННО- ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ СООРУЖЕНИЙ И КОНСТРУКЦИЙ ПРИ ПОЛИГАРМОНИЧЕСКИХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

*Аннотация.* Работа посвящена актуальной проблеме защиты зданий и сооружений от различных по природе и происхождению динамических воздействий. Рассматривается эффективное средство подавления вибраций – динамические гасители колебаний. Предложена обобщенная модель системы многомассовых гасителей и рациональный, инженерно-ориентированный, метод расчета их параметров при полигармонических описаниях сложных динамических воздействий на строительные объекты, с использованием понятий и методов теории регулирования напряженно-деформированного состояния сооружений и конструкций, где роль регуляторов играют гасители. На основе декомпозиционного подхода получено аналитическое решение задачи определения параметров комплекса гасителей по заранее сформулированным требованиям к результатам регулирования динамического состояния деформируемой системы (сооружения, конструкции). На тестовых задачах выполнены оценки и анализ точности результатов расчетов модельных систем по разработанным методикам, алгоритмам и формулам.

*Ключевые слова:* полигармонические воздействия, гашение колебаний, регулирование, многомассовые динамические гасители, декомпозиция

V.G. SEBESHEV<sup>1</sup>, N.A. LYUFT<sup>1</sup>, YU.A. GERBER<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Novosibirsk State University of Architecture and Civil Engineering (Sibstrin), Novosibirsk, Russia

## METHOD FOR CALCULATION PARAMETERS OF DYNAMIC VIBRATION DAMPERS' COMPLEXES AS REGULATORS OF STRUCTURES' AND CONSTRUCTIONS' STRESS-STRAIN STATE UNDER POLYHARMONIC EXCITATIONS

*Abstract.* The article is devoted to the urgent problem of protecting buildings and structures from dynamic influences of various nature and origin. An effective means of vibration suppression is being considered namely dynamic vibration dampers. A generalized model of a system of multi-mass dampers and a rational, engineering-oriented method for calculating their parameters at conditions of polyharmonic descriptions of complex dynamic excitations on construction objects are proposed, using the concepts and methods of the theory of regulating the stress-strain state of structures, where dampers play the role of regulators. Based on the decomposition approach, an analytical solution to the problem of determining the parameters of a complex of dampers according to pre-formulated requirements for the results of regulating the dynamic state of a deformable system (buildings, structures) is obtained. The test tasks were used to evaluate and analyze the accuracy of the results of calculations of model systems according to the developed methods, algorithms and formulas.

*Keywords:* polyharmonic excitations, damping of vibrations, regulation, multi-mass dampers, decomposition.

## Введение

Строительные системы (здания, сооружения, конструкции) в процессе эксплуатации подвергаются различным воздействиям, которые могут иметь как природное, так и техногенное происхождение и быть различными по характеру: силовые (статические и динамические нагрузки), температурные и кинематические (в том числе сейсмические – всегда динамические) [1, 2].

В современных условиях динамические аспекты состояния сооружений и конструкций на разных стадиях их жизненного цикла играют все более значимую роль, поэтому актуальным является их учет и корректное отражение в расчетах с применением современных подходов, методик и специализированного программного обеспечения для компьютерного моделирования [3].

Следует отметить, что большинство динамических воздействий и колебания, ими вызванные, могут рассматриваться как полигармонические – либо по причине естественной близости их характеристик к указанному закону, либо (в расчетах) как результат описания реальных процессов аппроксимацией по методу Фурье. Такой подход позволяет решать разнообразные задачи динамики сооружений – в случаях, когда возможна интерференция разночастотных колебаний, порождающая сложные динамические эффекты (колебания, вызванные движением транспорта на мостах, вибрации от одновременной работы оборудования на разных частотах, воздействия ветра на высотные здания и сооружения и др.). Особое значение имеют расчеты сооружений на действие сейсмических волн, в которых на основании спектрального анализа кинематическое возмущение представляется в виде суммы гармонических компонентов. Динамические воздействия создают риски возникновения опасных резонансных явлений или накопления усталостных повреждений, способных привести к разрушению или повреждению конструкций. В связи с этим для обеспечения надежности и долговечности строительных объектов актуальными и практически ориентированными являются вопросы их защиты от нежелательных проявлений динамики [4]. Одним из эффективных способов решения этой проблемы является применение динамических гасителей колебаний (ДГК) – устройств, позволяющих значительно уменьшать амплитуды перемещений, усилий и напряжений, возникающих от землетрясений, ветровых нагрузок, вибраций от оборудования и др. [5-19].

В настоящей работе представлен метод решения задач гашения полигармонических колебаний с помощью комплексов многомассовых ДГК – в постановке, позволяющей варьировать количество, места расположения, ориентацию и инерционно-жесткостные параметры гасителей. При этом задача гашения рассматривается как задача регулирования, где требуемые характеристики гасителей определяются по условиям (требованиям) получения заранее установленных (заданных) значений определенных параметров динамического напряженно-деформированного состояния защищаемой системы (сооружения, конструкции).

**Расчетные модели, методы и вычисления.** В работе рассматриваются линейно деформируемые системы с конечным числом степеней свободы и произвольным числом многомассовых ДГК, настроенных на различные частоты гармонического воздействия (рисунок 1).

В общем случае  $s$ -е перемещение некоторой массы из  $n$  масс рассчитываемой системы описывается неоднородным дифференциальным уравнением второго порядка:

$$\frac{d^2 y_s(t)}{dt^2} = a_s y_1(t) + b_s y_2(t) + \dots + c_s y_n(t) + d_s \cdot \frac{dy_s(t)}{dt} + f_p(t). \quad (1)$$

В большинстве случаев представляют интерес колебания конструкций на низких частотах, когда демпфирование, ввиду невысоких скоростей масс, не оказывает существенного влияния на частотные характеристики, а в отношении амплитуды

перемещений пренебрежение им идет в запас [7, 20, 21]. Ввиду этого в уравнении (1) можно положить  $d_s = 0$ , в итоге получается:

$$\frac{d^2 y_s(t)}{dt^2} = a_s y_1(t) + b_s y_2(t) + \dots + c_s y_n(t) + f_p(t), \quad (2)$$

где  $f_p(t)$  – функция правой части, описывающая воздействие на систему как полигармоническое:

$$f_p(t) = \sum_{k=1}^{n_f} A_{p,k} \sin(\omega_k t);$$

$n_f$  – количество гармонических составляющих в представлении  $f_p(t)$ .

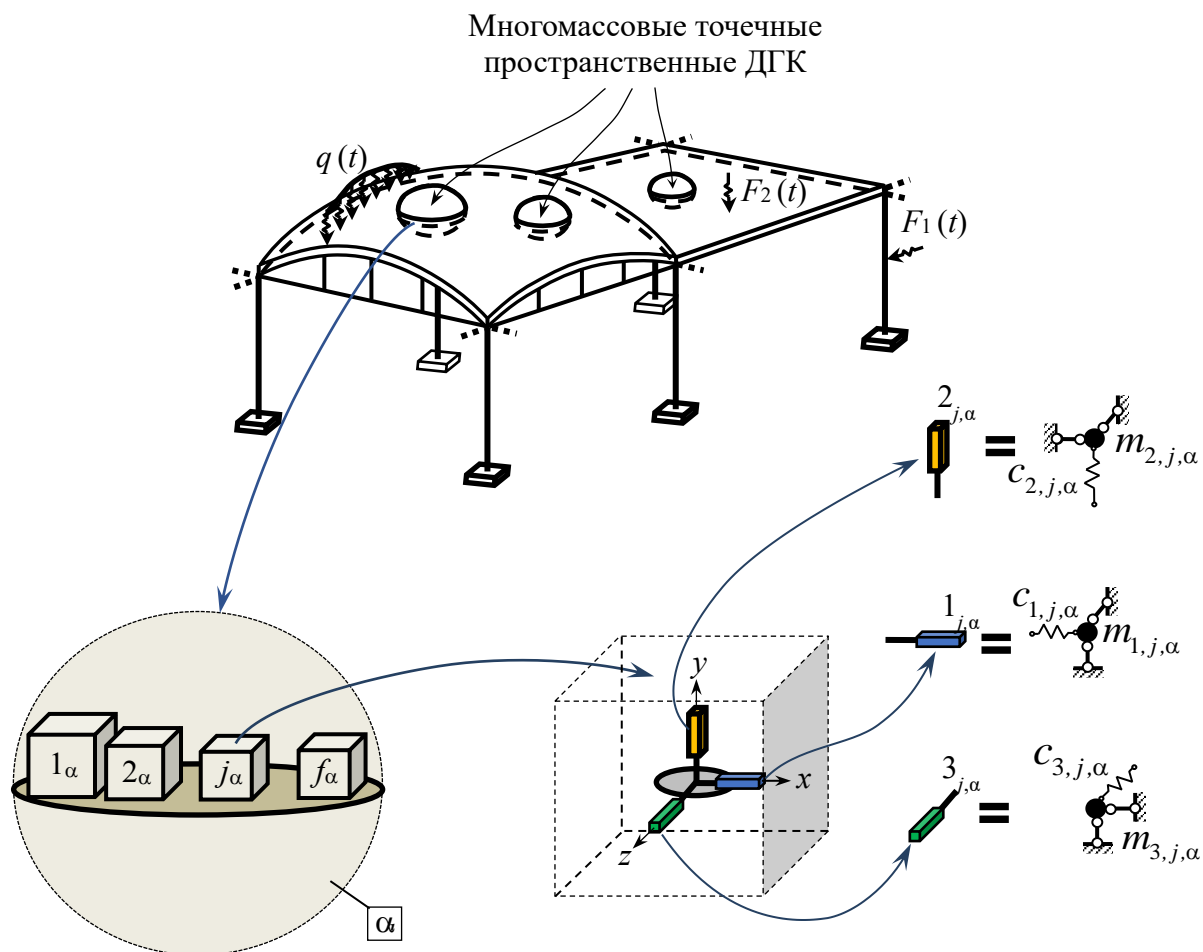


Рисунок 1 - Принципиальная схема динамически деформируемой системы с комплексом гасителей колебаний

Наличие в выражении (2) функции  $f_p(t)$ , содержащей слагаемые с различными аргументами  $\omega_k$  тригонометрических функций, обуславливает невозможность перехода от дифференциальных уравнений к уравнениям в амплитудах искомых величин (как в случае моногармонического воздействия [7, 18, 19]), что затрудняет решение задачи гашения колебаний.

Предлагаемый метод основан на *декомпозиционном подходе*, заключающемся в разделении (декомпозиции) исходной задачи с полигармоническим воздействием на отдельные подзадачи, в каждой из которых все воздействия – моногармонические составляющие исходного полигармонического воздействия. Это позволяет перейти от

дифференциальных уравнений (2) к уравнениям в амплитудах (перемещений масс [21] или сил инерции [7]). Получаемое таким образом решение – приближенное, но, по предварительному анализу, приемлемое по точности ввиду малого взаимного влияния разночастотно настроенных гасителей как упруго-инерционных частей защищенной системы, обладающих относительно малыми массами в сравнении с общей массой системы. Далее это подтверждается верификационными решениями модельных задач.

Уравнения (в амплитудах сил инерции) динамического состояния системы с комплексом многомассовых ДГК при воздействиях по  $i$ -й гармонике записываются в матричном виде:

$$[\delta^{*(i)}] \cdot [J^{(i)}] + [\Delta_F^{(i)}] = 0, \quad (3)$$

где  $[\delta^{*(i)}]$  – матрица динамической податливости системы при  $i$ -й гармонике поличастотного воздействия:

$$[\delta^{*(i)}] = \begin{bmatrix} \delta_{J_s}^{*(i)} \\ \delta_{J_d}^{*(i)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_{J_s J_s}^{*(i)} & \delta_{J_s J_d}^{*(i)} \\ \delta_{J_d J_s}^{*(i)} & \delta_{J_d J_d}^{*(i)} \end{bmatrix}; \quad (4)$$

$[J^{(i)}]$  – вектор неизвестных сил инерции, действующих на массы системы, при воздействии по  $i$ -й гармонике:

$$[J^{(i)}] = \begin{bmatrix} J_s^{(i)} \\ J_d^{(i)} \end{bmatrix}; \quad (5)$$

$[\Delta_F^{(i)}]$  – вектор свободных членов при  $i$ -й гармонике:

$$[\Delta_F^{(i)}] = \begin{bmatrix} \Delta_{J_s, F}^{(i)} \\ \Delta_{J_d, F}^{(i)} \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Для характерных точек системы ( $k = 1, 2, \dots, k^{(i)}$ ) формируются условия регулирования в виде требования равенства амплитудных перемещений  $\Delta_k^{r(i)}$  этих точек заданным значениям  $\langle \Delta_k^{r(i)} \rangle$ :

$$\begin{bmatrix} \Delta_1^{r(i)} \\ \vdots \\ \Delta_{k^{(i)}}^{r(i)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle \Delta_1^{r(i)} \rangle \\ \vdots \\ \langle \Delta_{k^{(i)}}^{r(i)} \rangle \end{bmatrix}, \quad (7)$$

здесь  $k^{(i)}$  – количество характерных точек, в которых регулируется перемещение для гармоники  $i = 1, 2, \dots, n_f$ .

Условия (7) используются для формирования уравнений регулирования:

$$\begin{bmatrix} \delta_{k,1} & \dots & \delta_{k,n} & \delta_{k,n+1} & \dots & \delta_{k,n+n_d} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta_{k+k^{(i)},1} & \dots & \delta_{k+k^{(i)},n} & \delta_{k+k^{(i)},n+1} & \dots & \delta_{k+k^{(i)},n+n_d} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_1^{(i)} \\ \vdots \\ J_n^{(i)} \\ \dots \\ J_{n+1}^{(i)} \\ \vdots \\ J_{n+n_d}^{(i)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta_{k, F_i} \\ \vdots \\ \Delta_{k+k^{(i)}, F_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle \Delta_1^{r(i)} \rangle \\ \vdots \\ \langle \Delta_{k^{(i)}}^{r(i)} \rangle \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Таким образом, возникает необходимость решения обратной задачи по изначально задаваемым (требуемым) регулируемым параметрам. Известно, что в общем случае обратная

задача может иметь либо бесконечно много решений, либо одно решение или вовсе не иметь решения. В случае, когда число регулируемых параметров (перемещений и/или усилий в системе) меньше количества регуляторов (ДГК), решение не единственно; в противном случае (больше) решение отсутствует.

Если рассматривать решение при  $k^{(i)} = n_d^{(i)}$  ( $n_d^{(i)}$  – количество ДГК, настроенных на гашение  $i$ -й гармоники), тогда, ввиду равенства векторов сил инерции в (3) и (8), можем заменить в (3)  $n_d^{(i)}$  уравнений для  $j$ -й группы гасителей на уравнения регулирования (8). Получим следующую систему:

$$\begin{bmatrix} \delta_{J_s}^{*(i)} \\ \delta_{d^{(1)}}^{*(i)} \\ \dots \\ \delta_{d^{(j)}}^{*r(i)} \\ \dots \\ \delta_{d^{(n_f)}}^{*(i)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} J_s^{(i)} \\ J_{d^{(1)}}^{(i)} \\ \dots \\ J_{d^{(j)}}^{(i)} \\ \dots \\ J_{d^{(n_f)}}^{(i)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta_{J_s, F}^{(i)} \\ \Delta_{d^{(1)}, F}^{(i)} \\ \dots \\ \Delta_{d^{(j)}}^{k(i)} - \langle \Delta^{r(j)} \rangle \\ \dots \\ \Delta_{d^{(n_f)}, F}^{(i)} \end{bmatrix} = 0. \quad (9)$$

Из уравнений (9) выражаются силы инерции (в виде функций с неизвестными параметрами ДГК в качестве аргументов), действующие на все массы системы (кроме масс  $j$ -й группы гасителей), включая массы групп гасителей, настроенных на все остальные гармоники  $i \neq j$ :

$$[J^{(i)}] = \frac{1}{D_0^{(i)}} [D^{(i)}], \quad (10)$$

где  $D_0^{(i)}$  – определитель матрицы коэффициентов при неизвестных силах инерции в (9)

$$D_0^{(i)} = \left| \left[ \delta_{J_s}^{*(i)} \mid \delta_{d^{(1)}}^{*(i)} \mid \dots \mid \delta_k^{r(i)} \mid \dots \mid \delta_{d^{(n_f)}}^{*(i)} \right]^T \right|;$$

$[D^{(i)}]$  – вектор определителей матрицы, составленной по правилу Крамера заменой  $i$ -го ( $i = 1, 2, \dots, n + n_d$ ) столбца матрицы  $D_0^{(i)}$  на вектор свободных членов из (9).

Имея функции (10) для всех сил инерции, выраженных через неизвестные параметры  $j$ -й группы гасителей, из замененных уравнений в (3), содержащих неизвестные параметры гасителей  $i$ -й группы ( $i \neq j$ ), получим выражение связи между параметрами жесткости ДГК:

$$c_{u,i,\alpha} = \frac{m_{u,i,\alpha} \cdot \omega_{F_i}^2 \cdot D_j^{(i)}}{D_j^{(i)} - m_{u,i,\alpha} \cdot \omega_{F_i}^2 \cdot \left( D_0^{(i)} \cdot \Delta_j^{(i)} + \sum_{g=1}^{j-1} \delta_{j,g} \cdot D_g^{(i)} + \sum_{g=j+1}^{n+n_d} \delta_{j,g} \cdot D_g^{(i)} \right)}, \quad (11)$$

в котором  $u, i$  и  $\alpha$  принимаются в соответствии с обозначениями на рисунке 1.

Из (11) как частный случай следует зависимость, ранее представленная в [7].

При декомпозиции полигармонического воздействия и рассмотрении всех подзадач (с 1-й до  $n_f$ -й гармоник) получаем систему из  $n_d$  уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} c_{u,1,\alpha} = \frac{m_{u,1,\alpha} \cdot \omega_{F_1}^2 \cdot D_j^{(1)}}{D_j^{(1)} - m_{u,1,\alpha} \cdot \omega_{F_1}^2 \cdot \left( D_0^{(1)} \cdot \Delta_j^{(1)} + \sum_{g=1}^{j-1} \delta_{j,g} \cdot D_g^{(1)} + \sum_{g=j+1}^{n+n_d} \delta_{j,g} \cdot D_g^{(1)} \right)}, \\ \vdots \\ c_{u,i,\alpha} - \text{см. (11)}, \\ \vdots \\ c_{u,n_f,\alpha} = \frac{m_{u,n_f,\alpha} \cdot \omega_{F_f}^2 \cdot D_j^{(f)}}{D_j^{(n_f)} - m_{u,n_f,\alpha} \cdot \omega_{F_f}^2 \cdot \left( D_0^{(f)} \cdot \Delta_j^{(n_f)} + \sum_{g=1}^{j-1} \delta_{j,g} \cdot D_g^{(n_f)} + \sum_{g=j+1}^{n+n_d} \delta_{j,g} \cdot D_g^{(n_f)} \right)}, \\ \vdots \end{array} \right. \quad (12)$$

в которой для  $i = 1: j = n + 1, \dots, n + n_d^{(i)}$ ; для  $2 \leq i \leq n_f: j = n + \sum_{t=1}^{i-1} n_d^{(t)} + 1, \dots, n + \sum_{t=1}^{i-1} n_d^{(t)} + n_d^{(i)}$ .

Рассмотрим применение предлагаемого метода определения параметров многомассовых ДГК на модельной задаче (рисунок 2).

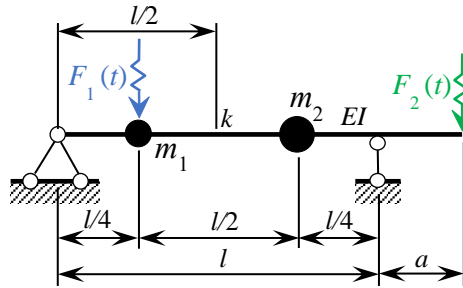


Рисунок 2 - Расчетная схема модельной задачи

**Исходные данные:** однопролетная невесомая балка ( $EI = 1,79 \text{ МН} \cdot \text{м}^2$  – соответствует изгибной жесткости двутавра №16) пролетом  $l = 4 \text{ м}$  с консольным свесом  $a = 1 \text{ м}$  и двумя сосредоточенными массами  $m_1 = 1 \text{ т}$  и  $m_2 = 2 \text{ т}$  подвержена одновременному воздействию двух разночастотных воздействий  $F_1(t)$  и  $F_2(t)$ :

$$\begin{array}{ll} F_1(t) = F_1 \sin(\omega_{F_1} t + \varphi_1); & F_2(t) = F_2 \sin(\omega_{F_2} t + \varphi_2); \\ \omega_{F_1} = 23,747 \text{ с}^{-1}; \varphi_1 = 0; & \omega_{F_2} = 81,449 \text{ с}^{-1}; \varphi_2 = 0; \\ F_1 = 10 \text{ кН}; & F_2 = 20 \text{ кН}. \end{array}$$

Необходимо определить такие параметры  $m_{2,1,1}$ ,  $m_{2,2,1}$ ,  $c_{2,1,1}$  и  $c_{2,2,1}$  многомассового ДГК, чтобы амплитудное перемещение (вертикальное) в точке  $k$  принимало значения:

$$\begin{array}{l} \langle \Delta_{k,F_1}^r \rangle = 0,77 \Delta_{k,F_1} \text{ при 1-й гармонике – от } F_1(t); \\ \langle \Delta_{k,F_2}^r \rangle = 0,71 \Delta_{k,F_2} \text{ при 2-й гармонике – от } F_2(t); \end{array}$$

где  $\Delta_{k,F_1}$ ,  $\Delta_{k,F_2}$  – амплитудные перемещения точки  $k$  незащищенной системы от 1-й и 2-й гармоник соответственно.

Принятые обозначения для многомассового гасителя представлены на рисунке 3.

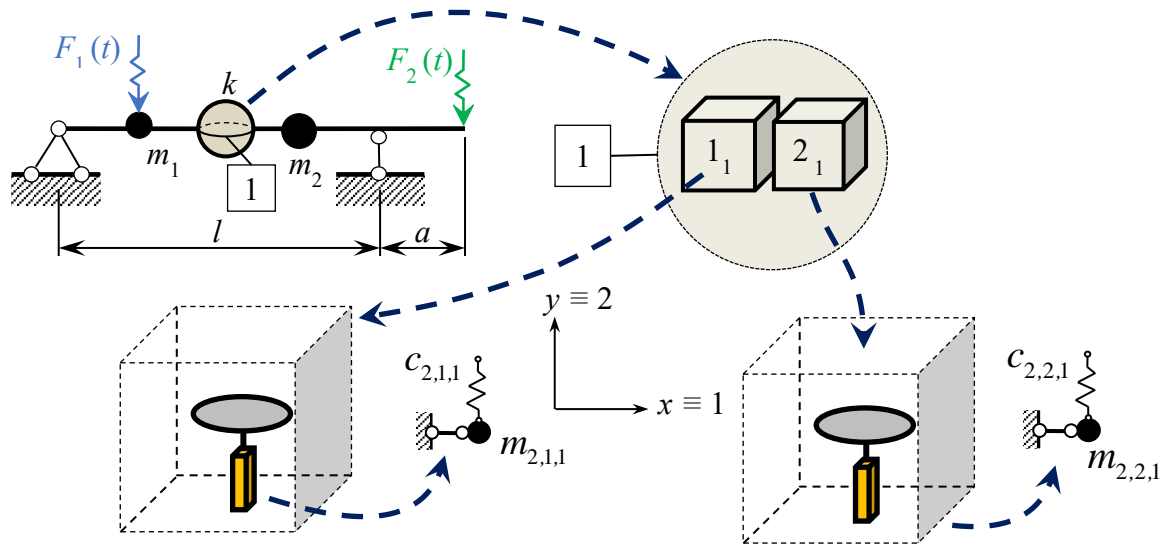


Рисунок 3 - Условно-графическое представление многомассового ДГК.  
(индексация параметров гасителей – согласно рисунку 1)

**Результаты и обсуждение.** Для регулирования амплитудного перемещения точки  $k$  рассматривались схемы с различными местами установки гасителей (рисунок 4). Возможны и иные комбинации расположения гасителей (в частности, на консоли балки).

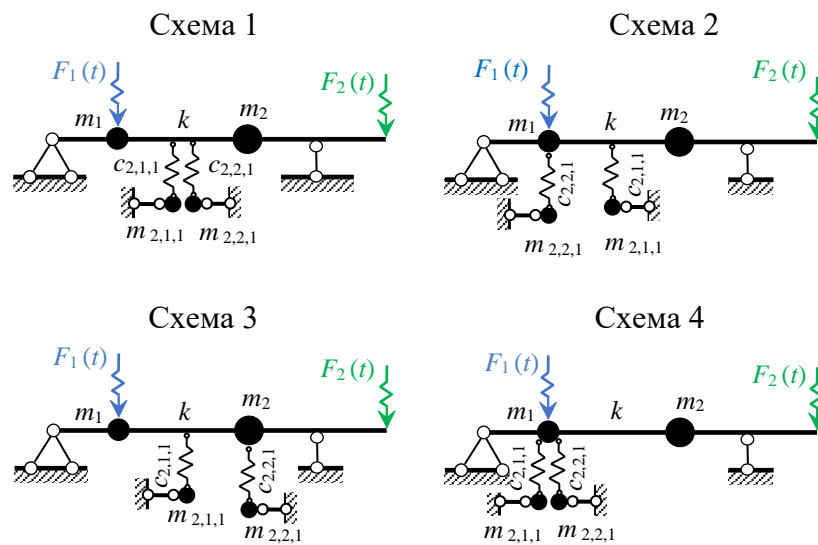


Рисунок 4 – Схемы гашения (варианты расположения ДГК)

На примере 1-й схемы расположения ДГК представим формульный аппарат предлагаемого метода в численном выражении.

Матрица динамической податливости системы при воздействии по 1-й гармонике:

$$\delta^{*(1)} = \begin{bmatrix} -13,54 & 3,26 & 5,12 & 5,12 \\ 3,26 & -4,68 & 5,12 & 5,12 \\ 5,12 & 5,12 & \left( \frac{1}{c_{2,1,1}} - \frac{1}{m_{2,1,1} \cdot \omega_{F_1}^2} \right) & 7,45 \\ 5,12 & 5,12 & 7,45 & \left( \frac{1}{c_{2,2,1}} - \frac{1}{m_{2,2,1} \cdot \omega_{F_1}^2} \right) \end{bmatrix} \cdot 10^{-7} \left( \frac{\text{М}}{\text{Н}} \right);$$

Система уравнений для 1-й гармоники (с произведенной заменой на уравнения регулирования):

$$\begin{bmatrix} -13,54 & 3,26 & 5,12 & 5,12 \\ 3,26 & -4,68 & 5,12 & 5,12 \\ 5,12 & 5,12 & 7,45 & 7,45 \\ 5,12 & 5,12 & 7,45 & \left( \frac{1}{c_{2,2,1}} - \frac{1}{m_{2,2,1} \cdot (23,747 \text{ с}^{-1})^2} \right) \end{bmatrix} \cdot 10^{-7} \cdot \begin{bmatrix} J_1^{(1)} \\ J_2^{(1)} \\ J_3^{(1)} \\ J_4^{(1)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4,19 \\ 3,26 \\ 5,12 - 3 \\ 5,12 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3} = 0.$$

Определитель  $D_0^{(1)}$  этой системы уравнений:

$$D_0^{(1)} = \begin{vmatrix} -13,54 & 3,26 & 5,12 & 5,12 \\ 3,26 & -4,68 & 5,12 & 5,12 \\ 5,12 & 5,12 & 7,45 & 7,45 \\ 5,12 & 5,12 & 7,45 & \left( \frac{1}{c_{2,2,1}} - \frac{1}{m_{2,2,1} \cdot (23,747 \text{ с}^{-1})^2} \right) \end{vmatrix} \cdot 10^{-7} =$$

$$= \left( -\frac{0,185 \cdot 10^{-3}}{m_{2,2,1}} + \frac{0,104}{c_{2,2,1}} - 0,776 \cdot 10^{-7} \right) \cdot 10^{-17} \left[ \left( \frac{\text{М}}{\text{Н}} \right)^4 \right]$$

Вектор определителей  $[D^{(1)}]$ :

$$[D^{(1)}] = \begin{bmatrix} D_1^{(1)} \\ D_2^{(1)} \\ D_3^{(1)} \\ D_4^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left( \frac{0,163}{c_{2,2,1}} - \frac{0,290 \cdot 10^{-3}}{m_{2,2,1}} - 0,122 \cdot 10^{-6} \right) \cdot 10^{-14} \\ \left( \frac{0,223}{c_{2,2,1}} - \frac{0,397 \cdot 10^{-3}}{m_{2,2,1}} - 0,167 \cdot 10^{-6} \right) \cdot 10^{-14} \\ \left( -\frac{0,562}{c_{2,2,1}} + \frac{0,997 \cdot 10^{-3}}{m_{2,2,1}} + 0,731 \cdot 10^{-6} \right) \cdot 10^{-14} \\ -0,312 \cdot 10^{-20} \end{bmatrix} \left( \frac{\text{М}^4}{\text{Н}^3} \right)$$



Вектор сил инерции  $[J^{(1)}]$ :

$$[I^{(1)}] = \frac{[D^{(1)}]}{D_0^{(1)}} = \begin{bmatrix} I_1^{(1)} \\ I_2^{(1)} \\ I_3^{(1)} \\ I_4^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1568,7 \\ 2147,4 \\ \frac{(-9,42822 \cdot 10^3 c_{2,2,1} + 7,25017 \cdot 10^9) m_{2,2,1} - 1,28567 \cdot 10^7 c_{2,2,1}}{2,38027 \cdot 10^3 c_{2,2,1} + (c_{2,2,1} - 1,34228 \cdot 10^6) m_{2,2,1}} \\ \frac{4,02685 \cdot 10^3 c_{2,2,1} \cdot m_{2,2,1}}{2,38027 \cdot 10^3 c_{2,2,1} + (c_{2,2,1} - 1,34228 \cdot 10^6) m_{2,2,1}} \end{bmatrix} \quad (\text{H}).$$

Зависимость (11), связывающая параметры жесткости первой группы гасителей с параметрами второй группы (1-го и 2-го гасителей) при настройке на частоту 1-й гармоники:

$$c_{2,1,1} = \frac{m_{2,1,1} \cdot (23,747 \text{ с}^{-1})^2 \cdot D_3^{(1)}}{D_3^{(1)} - m_{2,1,1} \cdot (23,747 \text{ с}^{-1})^2 \cdot D_0^{(1)} \cdot (5,12 \cdot 10^{-3} + 10^{-7} \cdot (5,12 \cdot I_1^{(1)} + 5,12 \cdot I_2^{(1)} + 7,45 \cdot I_4^{(1)}))} \quad (13)$$

Зададимся массами гасителей  $m_{2,1,1} = 80$  кг и  $m_{2,2,1} = 30$  кг. После подстановки в (13) всех ранее найденных величин и значений масс:

$$c_{2,1,1} = \frac{1,53566 \cdot 10^5}{c_{2,2,1} - 1,6557 \cdot 10^4} + 4,26229 \cdot 10^4.$$

Аналогичным образом, рассматривая подзадачу со 2-й гармоникой, приходим к выражению:

$$c_{2,2,1} = \frac{4,56684 \cdot 10^2 c_{2,1,1} - 1,73694 \cdot 10^8}{(c_{2,1,1})^2 - 7,60626 \cdot 10^5 c_{2,1,1} + 1,44638 \cdot 10^{11}}.$$

Из системы уравнений

$$\begin{cases} c_{2,1,1} = \frac{1,53566 \cdot 10^5}{c_{2,2,1} - 1,6557 \cdot 10^4} + 4,26229 \cdot 10^4, \\ c_{2,2,1} = \frac{4,56684 \cdot 10^2 c_{2,1,1} - 1,73694 \cdot 10^8}{(c_{2,1,1})^2 - 7,60626 \cdot 10^5 c_{2,1,1} + 1,44638 \cdot 10^{11}} \end{cases}$$

получается разрешающее (квадратное) уравнение, двум корням которого соответствуют два варианта комбинаций жесткостей гасителей, ориентированных на выполнение исходных требований регулирования при заданных массах:

$$\begin{pmatrix} c_{2,1,1}^{(m_{2,1,1}=80)} & c_{2,2,1}^{(m_{2,2,1}=30)} \\ c_{2,2,1}^{(m_{2,2,1}=80)} & c_{2,1,1}^{(m_{2,1,1}=30)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 42,62 & 173,31 \\ 380,34 & 16,56 \end{pmatrix} \begin{matrix} \frac{\text{кН}}{\text{м}} & - 1\text{-й вариант,} \\ & - 2\text{-й вариант.} \end{matrix}$$

По 2-му варианту суммарная материалоемкость упругих элементов гасителей больше, чем по 1-му, но при этом размах колебаний масс гасителей меньше.

Результаты определения параметров многомассового гасителя по изначально задаваемым (требуемым) амплитудным перемещениям при воздействии каждой из гармоник бигармонического воздействия и для всех рассмотренных схем гашения приведены в таблицах 1 и 2.

Таблица 1 - Результаты гашения колебаний при 1-й гармонике ( $i = 1$ )

Амплитудное перемещение $\Delta_{k,F1}$ точки $k$ в незащищенной системе, мм	Требуемое амплитудное перемещение $< \Delta_{k,F1}^r >$ точки $k$ , мм коэффициент гашения	Номер схемы гашения (рис. 4)	Жесткость ДГК $c_{2,1,1}$ , кН/м	Полученное амплитудное перемещение, мм коэффициент гашения
1	2	3	4	5
13,7	$\frac{3}{0,78}$	1	42,62	$\frac{5,5}{0,60}$
			16,56	$\frac{5,6}{0,59}$
		2	42,62	$\frac{5,5}{0,60}$
			16,73	$\frac{3,9}{0,72}$
		3	42,62	$\frac{5,5}{0,60}$
			16,75	$\frac{3,2}{0,77}$
		4	43,49	$\frac{6,2}{0,55}$
			16,69	$\frac{6,2}{0,55}$

Таблица 2 - Результаты гашения колебаний при 2-й гармонике ( $i = 2$ )

Амплитудное перемещение $\Delta_{k,F2}$ точки $k$ в незащищенной системе, мм	Требуемое амплитудное перемещение $< \Delta_{k,F2}^r >$ точки $k$ , мм коэффициент гашения	Номер схемы гашения (рис. 4)	Жесткость ДГК $c_{2,2,1}$ , кН/м	Полученное амплитудное перемещение, мм коэффициент гашения
1	2	3	4	5
4,9	$\frac{1,4}{0,71}$	1	173,31	$\frac{4,9}{0}$
			380,34	$\frac{4,9}{0}$
		2	177,91	$\frac{3,9}{0,2}$
			380,40	$\frac{4,2}{0,14}$
		3	183,56	$\frac{4,2}{0,14}$
			380,43	$\frac{4,3}{0,12}$
		4	195,20	$\frac{3,2}{0,35}$
			505,13	$\frac{3,2}{0,35}$

Характеристики ДГК, отвечающие изначально сформулированным требованиям регулирования амплитудного перемещения выбранной точки системы, аналитически определены без решения систем дифференциальных уравнений или перебора большого количества комбинаций параметров (численного подбора).

Степень гашения амплитудного перемещения точки  $k$  от 1-й гармоники поличастотного воздействия (таблица 1) в зависимости от схемы гашения (рисунок 4) находилась в пределах от 0,55 до 0,77 (при изначально требуемом уровне/коэффициенте гашения 0,78).

Относительно лучший эффект от использования гасителей при заданных условиях регулирования реализуется при 3-й схеме гашения ( $m_{2,1,1} = 30$  кг,  $m_{2,2,1} = 80$  кг,  $c_{2,1,1} = 16,75$  кН/м,  $c_{2,2,1} = 380,43$  кН/м): максимальное суммарное амплитудное перемещение – 7,5 мм (рисунок 5, график 2), что соответствует коэффициенту гашения 0,6 – в сравнении с максимальным суммарным амплитудным перемещением точки  $k$  незащищенной системы при заданном полигармоническом воздействии – 18,6 мм (рисунок 5, график 1).

При такой степени гашения обеспечено снижение уровня вибраций в системе до безопасного по циклической (усталостной) прочности.

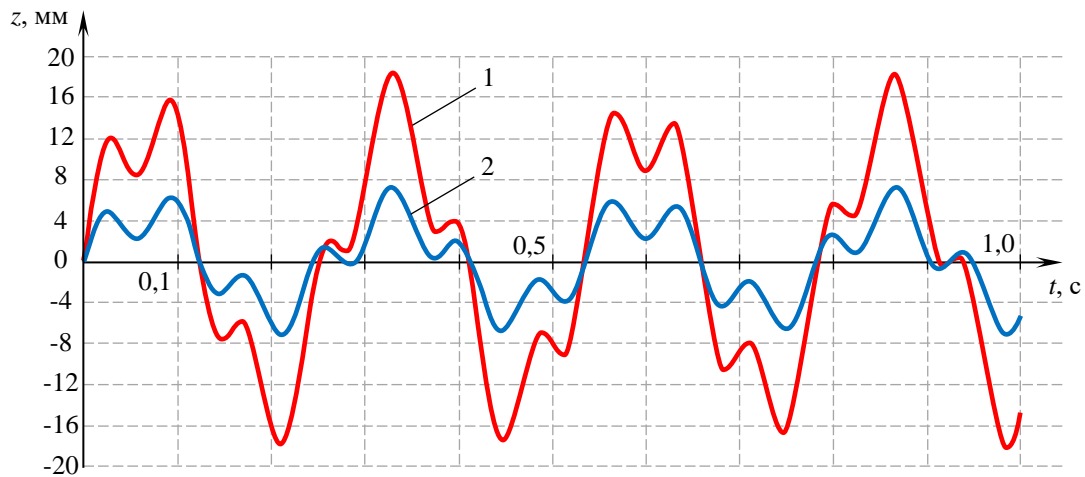


Рисунок 5 – График вертикального перемещения точки  $k$  при установившихся вынужденных колебаниях системы: 1 – без ДГК; 2 – с многомассовым ДГК по 3-ой схеме гашения

Полученные данные подтверждают качественно очевидный факт, что большое значение имеет выбор мест установки ДГК, так как от этого зависит и эффективность работы каждого входящего в комплекс гасителя, и результат гашения в целом. Для предварительного прогноза рационального решения по этому признаку целесообразен качественный анализ главных форм собственных колебаний и деформированных состояний незащищенной системы от всех (в отдельности) моногармонических составляющих общего полигармонического воздействия – соответствующие схемы перемещений балки в рассматриваемой задаче приведены на рисунке 6.

Оценка формы колебания системы при воздействии на нее гармоники с частотой  $\omega_{F_2}$  свидетельствует о том, что межопорная узловая точка располагается между массой  $m_2$  и точкой  $k$  (вблизи от них). Это означает, что установленный в какой-либо из этих точек гаситель (по схемам 1, 3 на рисунке 4) практически не включается в работу (почти неподвижен), то есть не может эффективно осуществлять гашение второй гармоники. По этой причине проигнорирован вариант с обоими гасителями в месте размещения массы  $m_2$ .

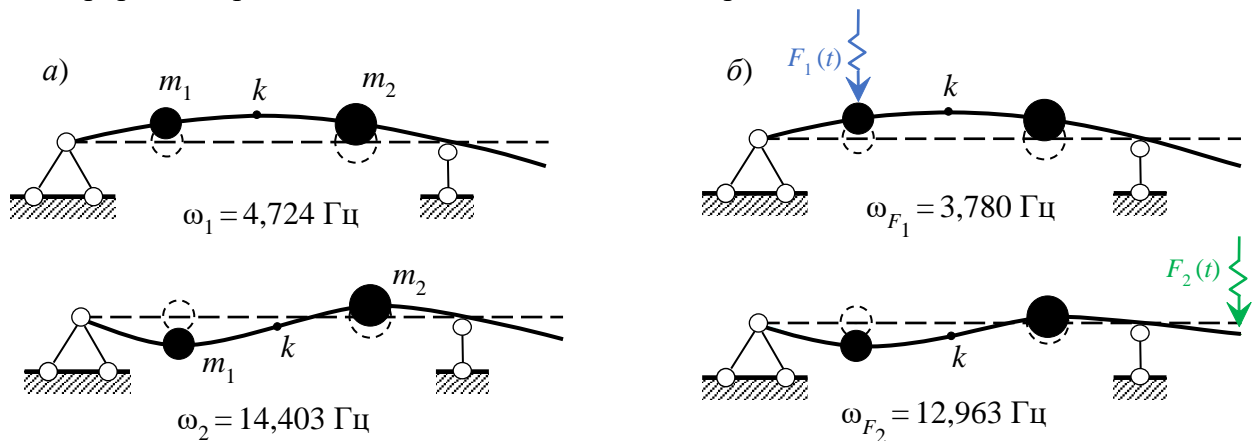


Рисунок 6 - Схемы колебаний незащищенной балки: а – формы собственных колебаний; б – парциальные формы вынужденных колебаний

Это подтверждается данными таблицы 2, по которым видно, что коэффициент гашения второй гармоники в 1-й и 3-й схемах не превышает 0,14 ввиду расположения ДГК в малоподвижных узлах системы. Качественный анализ главных форм собственных колебаний и парциальных форм вынужденных колебаний незащищенной системы (рис. 6) прогнозирует

повышение степени гашения второй гармоники при размещении гасителей под массой  $m_1$  (2-я и 4-я схемы гашения по рисунку 4), что соответствует полученным результатам: коэффициент гашения второй гармоники увеличился до 0,35. Но по суммарному эффекту регулирования наиболее выгодной из рассмотренных схем оказывается все-таки 3-я (по 2-му варианту комбинации жесткостей гасителей) вследствие существенного подавления доминирующей компоненты перемещения с частотой  $\omega_{F1}$ .

Расхождения между фактическими и исходно обусловленными значениями регулируемого параметра (здесь – перемещения) возникают из-за того, что предложенный упрощенный метод расчета характеристик регуляторов (ДГК) – приближенный, и порождаемые им небольшие погрешности влияют на результат определения перемещений. Это влияние усугубляется сгущенностью спектра собственных частот защищенной системы [5, 6, 22]. Улучшить результаты расчета можно, увеличив на 1...3% жесткости гасителей, найденные по приведенным выше зависимостям и формулам. Так, задав  $c_{2,1,1} = 17$  кН/м и  $c_{2,2,1} = 517$  кН/м (на 2% больше, чем в таблицах 1 и 2), для даже не самой удачной схемы 4 получаем «отрегулированные» перемещения  $\Delta'_{k,F1} = 0,4$  мм,  $\Delta'_{k,F2} = 1,3$  мм и суммарное амплитудное  $\Delta'_k = 1,7$  мм, что соответствует общему коэффициенту гашения 0,91.

Таким образом, эффективность гашения полигармонических колебаний зависит не только от выявленных расчетом рациональных параметров ДГК, но и существенно – от их расположения в защищаемой системе. Этот факт предопределяет необходимость в дальнейшем формулировать и рассматривать задачу регулирования динамического НДС строительных объектов в оптимизационной постановке в отношении инерционно-жесткостных характеристик системы гасителей и координат мест их размещения.

**Заключение.** Полученные результаты подтверждают, что предлагаемый метод решения задач гашения полигармонических колебаний с позиций теории регулирования позволяет получать по изначально задаваемым требованиям параметры комплекса многомассовых гасителей, радикально снижающих уровень колебаний в конструкциях.

Разработанный расчетный аппарат, в котором используются полученные компактные аналитические зависимости и формулы, позволяет упростить решение прикладных задач гашения полигармонических колебаний, по сравнению с традиционными подходами, связанными либо с решением систем дифференциальных уравнений, либо с перебором большого числа параметров ДГК. Это обуславливает инженерную пригодность предлагаемого метода, с перспективой внедрения в практику проектирования зданий, сооружений и конструкций, испытывающих динамические воздействия.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Болотин В.В. К расчету строительных конструкций на сейсмические воздействия // Строительная механика и расчет сооружений. 1980. № 1. С. 9-14.
2. Болотин В.В., Радин В.П., Чирков В.П. Моделирование динамических процессов в элементах строительных конструкций при землетрясениях // Известия вузов. Строительство. 1999. № 5. С. 17-21.
3. Зайнулин Д.А., Нестерова О.П. Применение BIM (ТИМ) технологий для мониторинга зданий и сооружений в сейсмически опасных районах // Наука и инновации в строительстве : Сборник докладов VIII Международной научно-практической конференции, посвященной 70-летию со дня образования БГТУ им. В.Г. Шухова, Белгород, 15 апреля 2024 года. Белгород: Белгородский государственный технологический университет им. В.Г. Шухова, 2024. С. 204-207.
4. Шейн А.И., Быков А.Н. Гашение колебаний конструкций зданий и сооружений. Современное состояние проблемы // Моделирование и механика конструкций. 2024. № 20. С. 30-70.
5. Корнев Б.Г., Резников Л.М. Динамические гасители колебаний: Теория и технические приложения. М.: Наука, 1988. 304 с.
6. Дукарт А.В., Олейник А.И. Динамические гасители колебаний конструкций. М.: Изд-во АСВ, 2015. 248 с.

7. Себешев В.Г., Гербер Ю.А. Регулирование динамическими гасителями колебаний напряженно-деформированного состояния и надежности систем с сосредоточенными массами при гармонических воздействиях // Изв. вузов. Строительство. 2019. № 9. С. 5-18.
8. Вольников М.И. Моделирование виброударозащиты гетерогенных структур // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Технические науки. 2006. № 6. С. 373-379.
9. Вольников М.И. Динамическая модель балки с гасителем колебаний на дискретных рабочих средах // Современные проблемы развития техники и технологий, Пенза, 05-31 мая 2016 года. Пенза: Пензенский государственный технологический университет. 2016. С. 122-127.
10. Гусев А.А., Кузнецов А.И. Гашение колебаний упругой системы с маятниковым гасителем // Вестник Московского политехнического университета. 2018. № 2. С. 45-50.
11. Карапетян А.В. Инвариантные множества механических систем // Нелинейная механика. 2001. С. 62-88.
12. Крупенин В.Л. Параметрические колебания виброударных систем: дис. ... канд. физ.-мат. наук. М., 1979. 185 с.
13. Лонщик П.А. Tlumienie drgań mechanicznych robotów przemysłowych // Przegląd Mechaniczny (Механическое обозрение). 1990. № 24. С. 34-42.
14. Лонщик П.А. Динамическое гашение крутильных колебаний // Zagadnienia drgań nieliniowych (Вопросы нелинейных колебаний). 1979. № 20. С. 71-76.
15. Смогунов В.В., Вольников М.И. Динамика гетерогенных структур: виброударозащита гетерогенных структур. Пенза: Изд-во Пенз. гос. ун-та, 2005. 497 с.
16. Habib G., Romeo F. The Tuned Bistable Nonlinear Energy Sink // Non-linear Dynamics. 2017. No. 89(1). Pp. 179-196.
17. Желиостов Д.А., Медведева А.А., Уздин А.М., Нестерова О.П. Некоторые особенности подбора параметров двухмассовых динамических гасителей сейсмических колебаний // Природные и техногенные риски. Безопасность сооружений. 2023. № 1(62). С. 27-31.
18. Gerber Yu.A., Sebeshev V.G. Regulation of dynamic stress-strain state and reliability of deformable systems with vibration dampers under harmonic loads // IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering, Volume 972 (2020) 012013. Pp. 1-9.
19. Себешев В.Г., Гербер Ю.А. Регулирование с помощью динамических гасителей колебаний напряженно-деформированного состояния систем с конечным числом степеней свободы при гармонических воздействиях (решение в перемещениях масс с матрицей жесткости) // Изв. вузов. Строительство. 2021. № 6. С. 5-9.
20. Тараторкин А.И. Демпфирование резонансных колебаний гироскопических систем активным динамическим гасителем: дис. ... д-ра техн. наук. М., 2010.
21. Люфт Н.А., Себешев В.Г., Гербер Ю.А. Анализ эффектов идеализации и уточнение расчетных моделей в задачах динамики стержневых систем // Труды НГАСУ = Proceedings of the Novosibirsk State University of Architecture and Civil Engineering. 2024. Т. 27. № 4 (94). С. 35-60.
22. Гербер, Ю.А., Себешев В.Г. Надежность стержневых систем с динамическим гашением колебаний в областях сгущения спектра собственных частот // Труды НГАСУ = Proceedings of the Novosibirsk State University of Architecture and Civil Engineering. 2018. Т. 21. № 1(67). С. 59-74.

## REFERENCES

1. Bolotin V.V. To the calculation of building structures for seismic impacts. *Structural Mechanics and Analysis of Structures*. 1980. No. 1. Pp. 9-14. (rus)
2. Bolotin V.V., Radin V.P., Chirkov V.P. Modeling of dynamic processes in elements of building structures during earthquakes. *News of Higher Educational Institutions. Construction*. 1999. No. 5. Pp. 17-21. (rus)
3. Zainulin D.A., Nesterova O.P. Application of BIM (TIM) technologies for monitoring buildings and structures in seismically hazardous areas. Science and innovation in construction: Collection of reports of the VIII International scientific and practical conference dedicated to the 70th anniversary of the foundation of BSTU named after V.G. Shukhov, Belgorod, April 15, 2024. Belgorod: Belgorod State Technological University named after V.G. Shukhov. 2024. Pp. 204-207. (rus)
4. Shein A.I., Bykov A.N. Damping of vibrations of building structures. Current state of the problem. *Modeling and mechanics of structures*. 2024. No. 20. Pp. 30-70. (rus)
5. Korenev B.G., Reznikov L.M. Dynamic dampers of vibrations: Theory and technical applications. Moscow: Nauka [Science]. 1988. 304 p. (rus)
6. Dukart A.V. Oleinik A.I. Dynamic vibration dampers of structures. Moscow: Publishing office of the Association of Construction Higher Educational Institutions. 2015. 248 p. (rus)
7. Sebeshev V.G., Gerber Yu.A. Regulation of the stress-strain state of systems with concentrated masses by dynamic vibration dampers under harmonic excitations. *News of Higher Educational Institutions. Construction*. 2019. No. 9. Pp. 5-18. (rus)

8. Vol'nikov M.I. Modeling of vibration shock protection of heterogeneous structures. *University News. Volga Region. Engineering Sciences*. 2006. No. 6. Pp. 373-379. (rus)
9. Vol'nikov M.I., Skamorin M. A. Dynamic model of a beam with a vibration damper on discrete working media. *Modern Problems of Development of Engineering and Technologies*, Penza, May 05–31, 2016. Penza: Penza State Technological University. 2016. Pp. 122-127. (rus)
10. Gusev A.A., Kuznetsov A.I. Damping of oscillations of an elastic system with a pendulum damper // *Bulletin of the Moscow Polytechnic University*. 2018. No. 2. Pp. 45-50. (rus)
11. Karapetyan A.V. Invariant sets of mechanical systems. *Nonlinear Mechanics*. 2001. Pp. 62-88. (rus)
12. Krupenin V.L. Parametric oscillations of vibro-impact systems: Cand. Sci. (Phys.-Math.) diss. Moscow, 1979. 185 p. (rus)
13. Lontsikh P.A. Tlumienie drgań mechanicznych robotów przemysłowych [Damping of mechanical vibrations of industrial robots]. *Przegląd Mechaniczny (Mechanical Review)*. 1990. No. 24. P. 34-42.
14. Lontsikh P.A. Dynamic damping of torsional vibrations [Динамическое гашение крутильных колебаний]. *Zagadnienia drgań nieliniowych (Problems of Nonlinear Vibrations)*. 1979. No. 20. Pp. 71-76.
15. Smogunov V.V., Vol'nikov M.I. Dynamics of heterogeneous structures: Vibration shock protection of heterogeneous structures. Penza: Penza State University Publishing House. 2005. 497 p. (rus)
16. Habib G., Romeo F. The Tuned Bistable Nonlinear Energy Sink. *Non-linear Dynamics*. 2017. No. 89(1). Pp. 179-196.
17. Zheliostov D.A., Medvedeva A.A., Uzdin A.M., Nesterova O.P. Some features of the selection of parameters of two-mass dynamic dampers of seismic vibrations. *Natural and technogenic risks. Safety of structures*. 2023. No. 1 (62). Pp. 27-31. (rus)
18. Gerber Yu.A., Sebeshev V.G. Regulation of dynamic stress-strain state and reliability of deformable systems with vibration dampers under harmonic loads. *IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering*, Volume 972 (2020) 012013. Pp. 1-9.
19. Sebeshev V.G., Gerber Yu.A. Regulation of the multi-degree-of-freedom systems' stress-strain state under harmonic excitations by means of dynamic vibration dampers (solution in mass' displacements with a stiffness matrix). *News of Higher Educational Institutions. Construction*. 2021. No. 6. Pp. 5-19. (rus)
20. Taratorkin A.I. Damping of resonant vibrations of gyroscopic systems by an active dynamic damper: Dr. Sci. (Eng.) diss. Moscow. 2010. (rus)
21. Lyuft N.A., Sebeshev V.G., Gerber Yu.A. Analysis of Idealization Effects and Refinement of Computational Models in Problems of Dynamics of Rod Systems. *Proceedings of the Novosibirsk State University of Architecture and Civil Engineering*. 2024. Vol. 27. No. 4 (94). Pp. 35-60. (rus)
22. Gerber Yu.A., Sebeshev V.G. Reliability of Rod Systems with Dynamic Vibration Damping in Frequency Cluster Regions of Natural Frequencies. *Proceedings of the Novosibirsk State University of Architecture and Civil Engineering*. 2018. Vol. 21. No. 1(67). Pp. 59-74. (rus)

#### Информация об авторах:

##### **Себешев Владимир Григорьевич**

ФГБОУ ВО «Новосибирский государственный архитектурно-строительный университет (Сибстрин)»,  
г. Новосибирск, Россия,  
кандидат технических наук, профессор, поч. член РААСН, профессор кафедры строительной механики.  
E-mail: [sebeshev@sibstrin.ru](mailto:sebeshev@sibstrin.ru)

##### **Люфт Никита Андреевич**

ФГБОУ ВО «Новосибирский государственный архитектурно-строительный университет (Сибстрин)»,  
г. Новосибирск, Россия,  
аспирант кафедры строительной механики.  
E-mail: [n.lyuft@sibstrin.ru](mailto:n.lyuft@sibstrin.ru)

##### **Гербер Юрий Андреевич**

ФГБОУ ВО «Новосибирский государственный архитектурно-строительный университет (Сибстрин)»,  
г. Новосибирск, Россия,  
кандидат технических наук, доцент кафедры строительной механики.  
E-mail: [yu.gerber@sibstrin.ru](mailto:yu.gerber@sibstrin.ru)

**Information about authors:**

**Sebeshev Vladimir G.**

Novosibirsk State University of Architecture and Civil Engineering (Sibstrin), Novosibirsk, Russia,  
candidate of technical science, professor, Hon. Mem. RAACS, professor of the department of Structural Mechanics.  
E-mail: [sebeshev@sibstrin.ru](mailto:sebeshev@sibstrin.ru)

**Lyuft Nikita A.**

Novosibirsk State University of Architecture and Civil Engineering (Sibstrin), Novosibirsk, Russia,  
post-graduate Student of the department of Structural Mechanics.  
E-mail: [n.lyuft@sibstrin.ru](mailto:n.lyuft@sibstrin.ru)

**Gerber Yuriy A.**

Novosibirsk State University of Architecture and Civil Engineering (Sibstrin), Novosibirsk, Russia  
candidate of technical science, associated professor of the department of Structural Mechanics.  
E-mail: [yu.gerber@sibstrin.ru](mailto:yu.gerber@sibstrin.ru)

Статья поступила в редакцию 14.05.2025  
Одобрена после рецензирования 07.06.2025  
Принята к публикации 11.06.2025

The article was submitted 14.05.2025  
Approved after reviewing 07.06.2025  
Accepted for publication 11.06.2025