

С.Н. КРИВОШАПКО¹

¹ФГАОУ ВО «Российский университет дружбы народов», г. Москва

ТОРСОВЫЕ ПОВЕРХНОСТИ НА ПРЯМОУГОЛЬНОМ ПЛАНЕ С ДВУМЯ ПЛОСКИМИ КРИВЫМИ НА ПРОТИВОПОЛОЖНЫХ ТОРЦАХ

Аннотация. Исследования геометрических проблем торсовых поверхностей с ребром возврата, начало которым положил Г. Монж, не прекращаются до настоящего времени. Намного меньше работ посвящено изучению напряженно-деформированного состояния, устойчивости и колебаниям тонких торсовых оболочек. Видимо это связано с отсутствием реальных проектов сооружений в форме торсов, за исключением изделий в форме разворачивающихся геликоидов и объектов малой архитектуры. Предлагаемая статья посвящена реализации методики проектирования формы торсовой поверхности с двумя заданными направляющими плоскими кривыми на противоположных сторонах прямоугольного плана и прямыми образующими совпадающими с двумя другими сторонами прямоугольного плана. Теоретические построения проиллюстрированы и визуализированы с помощью компьютерной графики на пяти торсовых поверхностях с заданными условиями на краях прямоугольного плана. В качестве направляющих кривых выбраны алгебраические кривые второго порядка, суперэллипсы и биквадратная парабола. Перечень используемых плоских кривых можно без труда расширить, если кривые допускают задание в явном, параметрическом или векторном виде.

Ключевые слова: плоская кривая, алгебраическая кривая, суперэллипс, торсовая поверхность, неортогональные криволинейные координаты, торс с двумя плоскими кривыми, архитектура оболочек, судостроение.

S.N. KRIVOSHAPKO¹

¹«The Peoples' Friendship University of Russia», Moscow

TORSE SURFACES ON A RECTANGULAR PLAN WITH TWO PLANE CURVES ON THE OPPOSITE ENDS

Abstract. Research of geometrical problems of torse surfaces with cuspidal edge, the outset of which was put by G. Monge, are not stopped till present time. Much less of works were devoted to study of stress-strain state, stability, and to vibration of thin torse shells. Apparently, this is connected with absence of real projects of structures in the form of torsos, with the exception of products in the form of developable helicoids and objects of garden architecture. The offered paper is devoted to the realization of the methodic of design of form of torse surface with two directrix plane curves given in advance. This surface is placed on the rectangular plan and has the straight generatrixes coinciding with two sides of this rectangular plan. Theoretical constructions were illustrated and visualized with the help computer graphics. Five torse surfaces with geometrical condition given in advance were constructed. Algebraical curves of the second order, superellipses, and biquadratic parabola were chosen as directrix curves. One can increase a list of used plane curves if curves can be defined in explicit, parametrical, or in vector form.

Key words: plane curve, algebraical curve, superellipse, torse surface, nonorthogonal curvilinear coordinates, torse with two plane curves, architecture of shells, shipbuilding.

Введение

Торсовые поверхности – это линейчатые поверхности нулевой гауссовой кривизны. Цилиндрические и конические поверхности являются вырожденными торсами, у которых ребра возврата удалятся на бесконечность или вырождаются в точку, соответственно. Торсовые поверхности позволяют решить некоторые геометрические задачи, возникающие при проектировании криволинейных сооружений, которые невозможно решить с помощью вырожденных торсовых поверхностей [1].

© Кривошанко С.Н., 2025

Например, необходимо построить линейчатую поверхность нулевой гауссовой кривизны на прямоугольном плане с разными плоскими кривыми на противоположных сторонах прямоугольного плана. Известны несколько научных статей, где даны методы построения торсовых поверхностей на четырехугольном плане, причем у большинства поверхностей две контурные противоположные прямолинейные образующие не совпадают с двумя горизонтальными сторонами опорного четырехугольника [2, 3, 4]. Известны поверхности с двумя полуэллипсами или с полуэллипсом и полуокружностью на противоположных краях, где две горизонтальные направляющие прямые торса будут совпадать с двумя противоположными сторонами горизонтального опорного четырехугольника [5].

Если взять две тождественные плоские кривые на противоположных параллельных торцах, то можно получить линейчатую поверхность нулевой гауссовой кривизны на прямоугольном плане, причем получаемая поверхность будет только цилиндрической [6]. Если взять две плоские кривые одинакового типа, но с разными геометрическими параметрами, на противоположных параллельных торцах, то можно получить коническую поверхность [2].

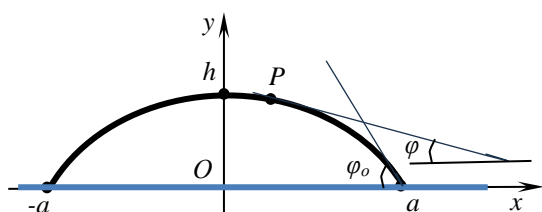


Рисунок 1 – Постоянные геометрические параметры кривых

Торсовые поверхности, содержащие две заданные плоские кривые могут иметь практическое значение, что подтверждается материалами работ [7, 8, 9]. Исследователи тонких оболочек в форме этих торсовых поверхностей приступили к изучению напряженно-деформированного состояния торсовых оболочек [10, 11], используя МКЭ в перемещениях [12].

Образующие прямые торса, содержащего две заданные плоские кривые, лежащие в параллельных плоскостях, будут лежать в горизонтальной плоскости, если касательные к заданным плоским кривым в точках пересечения этих кривых с горизонтальной плоскостью будут параллельны (Рисунок 1).

Модели и методы исследования

1. Плоские алгебраические кривые в качестве направляющих кривых торсов

Рассмотрим несколько плоских кривых, которые затем будут приняты в качестве направляющих кривых торсовой поверхности. Габаритные размеры кривых a , h принимаются для всех кривых одинаковыми (Рисунок 1).

1.1. Парабола (алгебраическая кривая второго порядка)

Каноническое явное уравнение параболы:

$$y = y(x) = h \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right).$$

Параметрические уравнения этой кривой можно представить в виде:

$$x = x(u) = au, \quad y = y(u) = h(1 - u^2),$$

где u – безразмерный независимый параметр, $-1 \leq u \leq 1$.

Тангенс угла наклона φ касательной прямой к горизонтальной плоскости в произвольной точке P параболы (рис. 1) будет

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{dy}{dx} = -h \frac{2x}{a^2},$$

а в точке $x = a$, $y = 0$:

$$\operatorname{tg}\varphi_0 = -\frac{2h}{a}. \quad (1)$$

1.2. Фрагмент эллипса (алгебраическая кривая второго порядка)

Неявное уравнение фрагмента эллипса:

$$\frac{x^2}{a_1^2} + \left(\frac{y}{h_1} + \sqrt{1 - \frac{a^2}{a_1^2}} \right)^2 = 1,$$

где a_1 и h_1 размеры полуосей полного эллипса, $a_1 \geq a$. Если задаться значением a_1 , можно определить величину другой полуоси полного эллипса h_1 [6]:

$$h_1 = \frac{h_3}{1 - \sqrt{1 - a^2/a_1^2}} = \frac{h_3}{1 - m}.$$

Параметрические уравнения рассматриваемой кривой можно представить в виде:

$$x = x(u) = au, \quad y = y(u) = h_1 \left(\sqrt{1 - u^2 a^2/a_1^2} - \sqrt{1 - a^2/a_1^2} \right).$$

Тангенс угла наклона φ касательной прямой к горизонтальной плоскости в произвольной точке P эллипса (Рисунок 1) будет

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{dy}{dx} = -\frac{h_1 x}{a_1^2 \sqrt{1 - x^2/a_1^2}},$$

Тангенс угла наклона φ_0 касательной прямой к горизонтальной плоскости в точке $x = a, y = 0$ пересечения эллипса с осью Ox (Рисунок 1) будет:

$$\operatorname{tg}\varphi_0 = -\frac{ah_1}{a_1^2 \sqrt{1 - a^2/a_1^2}}. \quad (2)$$

1.3. Фрагмент окружности (алгебраическая кривая второго порядка)

Для фрагмента окружности можно использовать формулы, полученные в разделе 1.2, но нужно принять $a_1 = R, h_1 = R$, тогда

$$x^2 + \left(y + \sqrt{R^2 - a^2} \right)^2 = R^2,$$

$$x_1 = x(u) = au, \quad y_1 = y(u) = \sqrt{R^2 - a^2 u^2} - \sqrt{R^2 - a^2}, \quad z_1 = 0.$$

Стрелу подъёма торцевой окружности можно вычислить благодаря теоремы

Пифагора:

$$h_0 = R - \sqrt{R^2 - a^2}$$

Тангенсы углов наклона φ и φ_0 касательных окружности к горизонтальной плоскости:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}}, \quad \operatorname{tg}\varphi_0 = -\frac{a}{\sqrt{R^2 - a^2}}. \quad (3)$$

1.4. Гипербола (алгебраическая кривая второго порядка)

Неявное уравнение гиперболы I записывается в виде:

$$\frac{y^2}{c^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1,$$

откуда находится параметр b^2 из условия, что при $x = \pm a$ имеем

$$y = -c - h:$$

$$b^2 = \frac{a^2 c^2}{h(2c + h)},$$

или для одной ветви гиперболы I (рис. 2)

$$y = -c \sqrt{1 + \frac{x^2}{b^2}} = -\sqrt{c^2 + \frac{x^2 h(2c + h)}{a^2}}$$

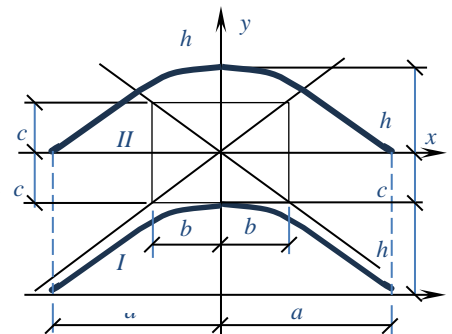


Рисунок 2 – Перенос гиперболы I в положение гиперболы II

Явное уравнение одной ветви гиперболы II можно записать в виде [6]:

$$y = h + c - \sqrt{c^2 + \frac{x^2 h(2c + h)}{a^2}}$$

где для рассматриваемых ветвей гипербол I и II значение b^2 будет одинаковым.

Значение параметра c выбирается произвольно, но $c \neq 0$.

Параметрические уравнения рассматриваемой гиперболы II можно представить в виде:

$$x = x(u) = au, \quad y = c + h - \sqrt{c^2 + hu^2(2c + h)}$$

Тангенсы углов наклона φ и φ_0 касательных гиперболы к горизонтальной плоскости:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{dy}{dx} = -\frac{hx(2c + h)}{a\sqrt{a^2c^2 + hx^2(2c + h)}}, \quad \operatorname{tg}\varphi_0 = \frac{-h(2c + h)}{a\sqrt{c^2 + h(2c + h)}} = -\frac{h(2c + h)}{a(c + h)}. \quad (4)$$

1.5. Биквадратная парабола (алгебраическая кривая четвертого порядка)

Каноническое явное уравнение параболы:

$$y = y(x) = h \left(1 - \frac{x^4}{a^4} \right).$$

Параметрические уравнения этой кривой можно представить в виде:

$$x = x(u) = au, \quad y = y(u) = h(1 - u^4),$$

где u – безразмерный независимый параметр, $-1 \leq u \leq 1$.

Тангенс угла наклона φ касательной прямой к горизонтальной плоскости в произвольной точке P параболы (рис. 1) будет

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{dy}{dx} = -h \frac{4x^3}{a^4},$$

а в точке $x = a$, $y = 0$:

$$\operatorname{tg}\varphi_0 = -\frac{4h}{a}. \quad (5)$$

1.6. Суперэллипс

Суперэллипс – это замкнутая кривая, задаваемая в декартовой системе координат уравнением

$$|y|^r = h^r \left(1 - \frac{|x|^t}{a^t} \right), \quad (6)$$

где для выпуклых кривых $r, t > 1$; для вогнутых кривых $r, t < 1$. Если принять $r = t = 1$, то кривая (6) вырождается в ломаную прямую линию, то есть суперэллипс вырождается в ромб. Если принять $h = a$, то суперэллипс (6) становится кривой Ламе (овалом Ламе) [13]. Чем больше значение параметров r, t тем точнее форма суперэллипса приближается к прямоугольному контуру. Суперэллипс при $r = t = 2$ и $a \neq h$ называют эллипсом.

Параметрические уравнения суперэллипса (6) при $y \geq 0$ можно представить в виде:

$$x = x(u) = au, \quad y = y(u) = h^r \sqrt[r]{1 - |u|^t},$$

где u – безразмерный независимый параметр, $-1 \leq u \leq 1$.

Тангенс угла наклона φ касательной прямой к горизонтальной плоскости в произвольной точке P суперэллипса будет:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{dy}{dx} = -\frac{htu^{t-1}}{ar[1 - u^t]^{1-\frac{1}{r}}}$$

а в точке $x = a$, то есть при $u = 1$, $y = 0$:

$$\operatorname{tg}\varphi_0 = -\infty, \quad \varphi_0 = 90^\circ.$$

Таким образом, угол наклона φ_0 касательной к выпуклому суперэллипсу ($r, t > 1$) в точке пересечения суперэллипса с горизонтальной плоскостью xOz равен $\pi/2$ (Рисунок 1).

2. Направляющие кривые торсовой поверхности с одинаковыми значениями угла φ_0

Для построения торсовой поверхности, которая содержит плоские кривые в параллельных плоскостях xOy , то есть при $z = 0$, и в плоскости $z = l$, и у которой противоположные прямые образующие лежат в горизонтальной плоскости xOz параллельно координатной плоскости yOz , необходимо принять, что углы φ_0 у обеих направляющих кривых равны.

2.1. Фрагмент эллипса + парабола

В этом случае, используя формулы (1) и (2) можно записать:

$$\operatorname{tg}\varphi_0 = -\frac{2h}{a} = -\frac{ah_1}{a_1^2\sqrt{1-a^2/a_1^2}},$$

откуда находится необходимое условие:

$$h_3 = \frac{2ha_1^2}{a^2}(m - m^2),$$

где $m = [1 - a^2/a_1^2]^{1/2}$, $0 \leq m < 1$, h_1 – размер полуоси эллипса, приведен в разделе 1.2.

Таким образом, направляющие плоские кривые необходимо записывать в виде

$$x_1 = x(u) = au, y_1 = y(u) = \frac{2ha_1^2}{a^2} \left[m \sqrt{1 - u^2 \frac{a^2}{a_1^2} - m^2} \right], z_1 = 0, \text{ (фрагмент эллипса)}$$

$$x_2 = x(v) = av, y_2 = y(v) = h(1 - v^2), z_2 = l \text{ (парабола)}, \quad (7)$$

где $-1 \leq u \leq 1$, $-1 \leq v \leq 1$.

Здесь пролет параболы и пролет эллипса одинаков, равен $2a$, а стрела подъема параболы обозначена h , фрагмента эллипса h_3 . Прямолинейные образующие торса лежат на противоположных сторонах прямоугольника $2a \times l$.

2.2. Фрагмент окружности + парабола

Для построения направляющих кривых с заданным условием используем формулы (1) и (3):

$$\operatorname{tg}\varphi_0 = -\frac{2h}{a} = -\frac{a}{\sqrt{R^2 - a^2}}$$

откуда находится необходимое условие:

$$h = \frac{a^2}{2\sqrt{R^2 - a^2}} = \frac{a^2}{2mR}, \quad (8)$$

где введено обозначение:

$$m = \frac{\sqrt{R^2 - a^2}}{R}.$$

Поставленное условие, чтобы прямолинейные образующие торса на опорах, совпадающих с противоположными сторонами прямоугольного плана, лежали в горизонтальной плоскости, нельзя выполнить при одинаковых геометрических параметрах a и h для обеих торцевых направляющих кривых в форме параболы и фрагмента окружности. Между этими геометрическими параметрами и радиусом окружности R должно выполняться условие (8).

Таким образом, направляющие плоские кривые необходимо записывать в виде:

$$x_1 = x(u) = au, y_1 = y(u) = \sqrt{R^2 - a^2}u^2 - \sqrt{R^2 - a^2}, z_1 = 0, \text{ (фрагмент окружности)}$$

$$x_2 = x(v) = av, y_2 = y(v) = h \cdot (1 - v^2), z_2 = l \text{ (парабола)}, \quad (9)$$

где $-1 \leq u \leq 1$, $-1 \leq v \leq 1$.

2.3. Гипербола + парабола

Для построения направляющих кривых с заданным условием равенства угла φ_0 у обеих направляющих кривых (Рисунок 1) используем формулы (1) и (4):

$$\operatorname{tg}\varphi_0 = -\frac{2h_p}{a} = -\frac{h(2c+h)}{a(c+h)},$$

откуда находится необходимое условие:

$$h_p = \frac{h(2c+h)}{2(c+h)}$$

а направляющие кривые можно записать в виде:

$$\begin{aligned} x_1 = x(u) = au, \quad y_1 = y(u) = c + h - \sqrt{c^2 + hu^2(2c+h)}, \quad z_1 = 0, \text{ (гипербола)} \\ x_2 = x(v) = av, \quad y_2 = y(v) = h_p(1-v^2), \quad z_2 = l \text{ (парабола)}. \end{aligned} \quad (10)$$

2.4. Парабола + биквадратная парабола

Запишем условие равенства углов наклона φ_0 у двух рассматриваемых плоских кривых, для этого необходимо использовать формулы (1) и (5):

$$\operatorname{tg}\varphi_0 = -\frac{2h}{a} = -\frac{4h_{6п}}{a},$$

откуда

$$h_{6п} = h/2,$$

а направляющие кривые можно записать в виде:

$$\begin{aligned} x_1 = x(u) = au, \quad y_1 = y(u) = h(1-u^2), \quad z_1 = 0 \text{ (парабола)}, \\ x_2 = x(v) = av, \quad y_2 = y(v) = h(1-v^4)/2, \quad z_2 = l \text{ (биквадратная парабола)}. \end{aligned} \quad (11)$$

2.5. Суперэллипс $c r = t = m > 1$ + суперэллипс $c r = t = n > 1$

Параметрические уравнения суперэллипсов (6) при $y \geq 0$ можно представить в виде:

$$\begin{aligned} x_1 = x(u) = au, \quad y_1 = y(u) = h^m \sqrt{1-|u|^m}, \\ x_2 = x(v) = av, \quad y_2 = y(v) = h^n \sqrt{1-|v|^n}, \end{aligned} \quad (12)$$

где $-1 \leq u \leq 1$, $-1 \leq v \leq 1$.

Запишем условие равенства углов наклона φ_0 у двух суперэллипсов:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}\varphi_1 = -h_1 \frac{(1-|u|^m)^{\frac{1}{m}-1} m|u|^{m-1}}{a} = -h_1 \frac{m|u|^{m-1}}{a(1-|u|^m)^{1-\frac{1}{m}}}, \\ \operatorname{tg}\varphi_2 = -h_2 \frac{(1-|v|^n)^{\frac{1}{n}-1} n|v|^{n-1}}{a} = -h_2 \frac{n|v|^{n-1}}{a(1-|v|^n)^{1-\frac{1}{n}}}, \end{aligned}$$

то есть $\operatorname{tg}\varphi_0 = \infty$, а $\varphi_0 = \pi/2$ на стороне $u = \pm 1$.

3. Конструирование торсовой поверхности по двум заданным направляющим кривым в параллельных плоскостях, проходящих через две противоположные стороны прямоугольного плана, причем торсовая поверхность опирается на свои прямые образующие, совпадающие с другими противоположными сторонами прямоугольного плана

В разделе 2 представлены пары плоских кривых, которые могут быть приняты за направляющие плоские кривые конструируемых торсов. Определены условия, выполнение которых гарантирует опирание торсов на противоположные стороны горизонтального прямоугольника. Помимо рассмотренных комбинаций двух плоских кривых можно взять большое число других кривых и используя предложенную методику построить

соответствующие торсовые поверхности. В представленной статье выбраны пять вариантов двоек плоских кривых в качестве направляющих кривых.

3.1. Принятая методика определения уравнений торсовых поверхностей

Если дана пара направляющих кривых, заданных уравнениями

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_1(u) \text{ и } \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_2(v) \quad (13)$$

относительно полюса O , где u, v – соответствующие параметры, тогда уравнение торса можно представить в виде [2]:

$$\mathbf{r}(u, \lambda) = \mathbf{r}_1(u) + \lambda[\mathbf{r}_2(v) - \mathbf{r}_1(u)], \quad (14)$$

где λ – безразмерный параметр, $0 \leq \lambda \leq 1$. Приняв

$$\mathbf{r}_2(v) = \mathbf{r}_2[v(u)] = \mathbf{R}(u),$$

и обозначив $\mathbf{m}(u) = \mathbf{R}(u) - \mathbf{r}_1(u)$, уравнение торса (14) можно записать как

$$\mathbf{r}(u, \lambda) = \mathbf{r}_1(u) + \lambda\mathbf{m}(u). \quad (15)$$

При задании торса в виде (15) координатные линии $\lambda = 0$ и $\lambda = 1$ совпадают с направляющими кривыми (13). Между параметрами u и v должно существовать соотношение [14]:

$$\frac{y'_1(u)}{x'_1(u)} = \frac{y'_2(v)}{x'_2(v)}. \quad (16)$$

Геометрический смысл уравнения (16) состоит в том, что прямолинейная образующая торса проходит через две соответствующие точки плоских кривых, для которых угловые коэффициенты касательных равны, т. е. касательные, проведенные через соответствующие точки двух кривых, должны быть параллельны. Это утверждение уже использовалось в разделах 2 и 3 для нахождения $\text{tg}\varphi$.

Векторное уравнение (15) можно представить в параметрической форме:

$$\begin{aligned} x &= x(u, \lambda) = x_1(u)(1 - \lambda) + \lambda x_2[v(u)], \\ y &= y(u, \lambda) = y_1(u)(1 - \lambda) + \lambda y_2[v(u)], \\ z &= z(\lambda) = \lambda l. \end{aligned} \quad (17)$$

3.2. Примеры торсовых поверхностей на прямоугольном плане с опорами на две прямые образующие на противоположных краях горизонтального прямоугольника

3.2.1. Фрагмент эллипса + парабола

Из формулы (16) получаем:

$$v = \frac{um}{\sqrt{1 - u^2 a^2 / a_1^2}}, \quad (18)$$

тогда уравнения (17) с учетом формул (7) принимают вид:

$$\begin{aligned} x &= x(u, \lambda) = au(1 - \lambda) + \frac{\lambda u m a}{\sqrt{1 - u^2 \frac{a^2}{a_1^2}}}, \\ y &= y(u, \lambda) = \frac{2ha_1^2}{a^2} \left(m \sqrt{1 - u^2 \frac{a^2}{a_1^2}} - m^2 \right) (1 - \lambda) + \lambda h \left[1 - \frac{u^2 m^2}{1 - u^2 \frac{a^2}{a_1^2}} \right], \quad z = z(\lambda) = \lambda l, \end{aligned} \quad (19)$$

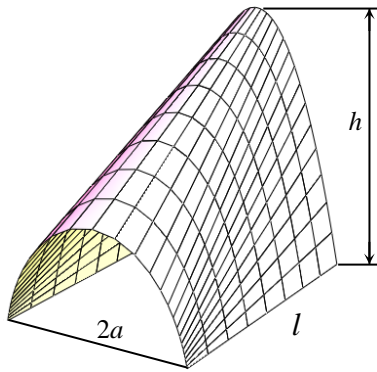


Рисунок 3 – Торс с параболой и эллипсом на торцах

где $-1 \leq u \leq 1$, $0 \leq \lambda \leq 1$. Формулы (19) представляют собой параметрические уравнения торсовой поверхности (рис. 3) с направляющими кривыми в виде эллипса и параболы (7).

Подобная задача была решена в монографии [15], а также в статье [5], где была использована методика Г. Монжа, согласно которой необходимо предварительно определить параметрические уравнения ребра возврата проектируемой торсовой поверхности.

3.2.2. Фрагмент окружности + парабола

Из формулы (16) получаем:

$$v = \frac{ua^2}{2h\sqrt{R^2 - a^2u^2}} = \frac{umR}{\sqrt{R^2 - a^2u^2}},$$

где h определяется по формуле (8). Параметрические уравнения торсовой поверхности с окружностью и параболой (9) на торцах записываются при помощи уравнений (17):

$$\begin{aligned} x &= x(u, \lambda) = au(1 - \lambda) + \lambda a \frac{umR}{\sqrt{R^2 - a^2u^2}}, \\ y &= y(u, \lambda) = \left(\sqrt{R^2 - a^2u^2} - \sqrt{R^2 - a^2} \right) (1 - \lambda) + \lambda h \left(1 - \frac{u^2 m^2 R^2}{R^2 - a^2u^2} \right), \\ z &= z(\lambda) = \lambda l. \end{aligned}$$

где $-1 \leq u \leq 1$, $0 \leq \lambda \leq 1$.

Торсовая поверхность с окружностью и параболой в параллельных плоскостях привлекла также внимание Ж.Н. Горбатович [16].

3.2.3. Гипербола + парабола

Из формулы (16) получаем:

$$v = \frac{u(c + h)}{\sqrt{c^2 + u^2(2c + h)}},$$

где h – стрела подъема гиперболы на торце $z = 0$ (Рисунок 4), задается по проекту.

Параметрические уравнения торсовой поверхности с гиперболой и параболой (9) на торцах (Рисунок 4) записываются при помощи уравнений (17):

$$\begin{aligned} x &= x(u, \lambda) = au(1 - \lambda) + \lambda a \frac{u(c + h)}{\sqrt{c^2 + u^2(2c + h)}}, \\ y &= y(u, \lambda) = \left[h + c - \sqrt{c^2 + u^2(2c + h)} \right] (1 - \lambda) + \lambda \frac{hc^2(2c + h)(1 - u^2)}{(c + h)[c^2 + u^2(2c + h)]}, \\ z &= z(\lambda) = \lambda l. \end{aligned}$$

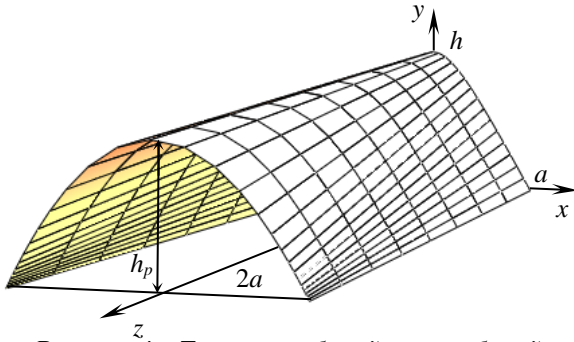


Рисунок 4 – Торс с параболой и гиперболой на торцах

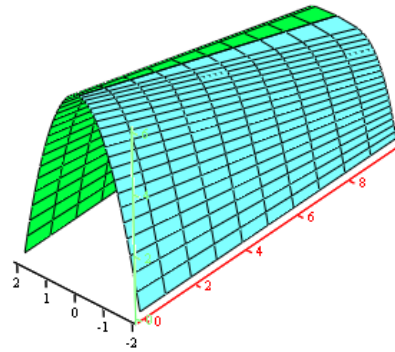


Рисунок 5 – Торс с параболой второго и четвертого порядков на торцах

3.2.4. Парабола + биквадратная парабола

Из формулы (16) получаем $v = u^{1/3}$, а параметрические уравнения искомой торсовой поверхности (Рисунок 5) находим из системы (17):

$$\begin{aligned} x = x(u, \lambda) &= au(1 - \lambda) + a\lambda u^{1/3}, & y = y(u, \lambda) &= h(1 - u^2)(1 - \lambda) + h\lambda(1 - u^{4/3})/2, \\ z &= \lambda l, \end{aligned}$$

где $-1 \leq u \leq 1$, $0 \leq \lambda \leq 1$.

3.2.5. Суперэллипс $c r = t = m > 1$ + суперэллипс $c r = t = n > 1$

Построение торса с двумя полусуперэллипсами на торцах проиллюстрируем на конкретном примере с $m = 2$ и $n = 3$, тогда формулы (12) предстанут в виде:

$$\begin{aligned} x_2 = x(v) &= av, & y_2 = y(v) &= h\sqrt{1 - |v|^2}, \\ x_1 = x(u) &= au, & y_1 = y(u) &= h^3\sqrt{1 - |u|^3}, \end{aligned} \quad (20)$$

а соотношения между u и v примут вид:

$$v = \frac{u^2}{\sqrt{(1 - |u|^3)^{4/3} + u^4}}$$

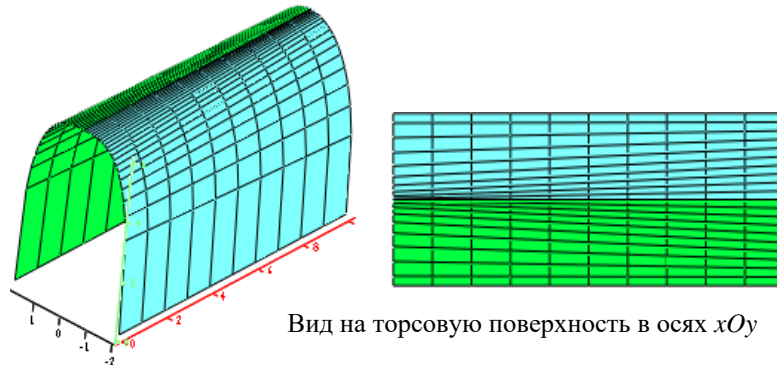


Рисунок 6 – Торсовая поверхность с суперэллипсами при $m = 2$, $n = 3$ на торцах

Параметрические уравнения торса с суперэллипсами при $m = 2$ и $n = 3$ (рис. 6) получаем из системы (17):

$$x = x(u, v) = au(1 - \lambda) + \frac{\lambda au^2}{\sqrt{(1 - |u|^3)^{4/3} + u^4}}$$

$$y = y(u, v) = h\sqrt[3]{1 - |u|^3}(1 - \lambda) + \lambda h \sqrt[3]{1 - \frac{u^4}{(1 - |u|^3)^{4/3} + u^4}}, z = z(\lambda) = \lambda l.$$

Результаты исследования и их анализ

1. Продемонстрирована методика построения торсовых поверхностей с двумя плоскими направляющими кривыми на торцах [2, 17]. В основном, применялись в качестве направляющих кривых алгебраические кривые второго порядка [6, 18].

2. Предложены для дальнейшего использования пять торсовых поверхностей с заданными торцевыми плоскими кривыми и с прямыми образующими, совпадающими с двумя сторонами прямоугольного плана [5].

3. Доказано, что, взяв за направляющие кривые в параллельных плоскостях два суперэллипса с разными показателями степеней [19] можно получить торс с одинаковыми стрелами подъема на торцах и с прямыми образующими, совпадающими с двумя противоположными сторонами прямоугольного плана. Причем, это будет поверхность нулевой гауссовой кривизны, но ни цилиндрическая и ни коническая [11].

4. Намечены дальнейшие направления в исследовании предложенных торсовых поверхностей и тонких оболочек на прямоугольных планах. Эти исследования можно развивать в направлении построения разверток на плоскость [20], раскроя плоских криволинейных судовых корпусов [14, 21] и текстильных изделий [22], расчетов оболочек на прочность [23], динамику и на температурные воздействия, поисков оптимальной оболочки [24] по выбранному критерию оптимальности, для построений новых торсов с двумя направляющими кривыми [25].

5. Краткий список опубликованных работ поможет найти новые направления в исследовании рассмотренных торсов и торсовых оболочек. До настоящего времени наиболее полные обзоры по уже известным торсовым поверхностям представлены в работах [26, 27, 28 with 144 references, 29]. В монографии [30] с 386 использованными источниками дается информация об исследованиях по геометрии, о расчете на прочность и о применении торсовых поверхностей и оболочек.

Выводы

Выбранный в статье метод задания торсовых поверхностей с двумя плоскими направляющими кривыми на параллельных торцах дает возможность построить криволинейную неортогональную сопряженную систему координат на проектируемых торсах.

Рассмотренные поверхности нулевой гауссовой кривизны можно принять в качестве форм строительных или машиностроительных оболочек, которые будут иметь больше независимых геометрических параметров, что даст архитекторам и инженерам больше свободы в выборе форм объектов по сравнению с цилиндрическими и коническими поверхностями.

Далее можно использовать при аналитическом определении параметров напряженно-деформированного состояния тонких оболочек со срединными поверхностями в форме рассматриваемых торсов систему двадцати расчетных уравнений, предложенную впервые А.Л. Гольденвейзером в 1953 году или применить типовые компьютерные комплексы, созданные на основе численных методов расчета оболочек в произвольных криволинейных координатах.

Представленные в статье торсовые поверхности имеют одно неоспоримое преимущество: они полностью разворачиваются на плоскость без разрывов и складок.

Полученные в статье результаты, основанные на методах аналитической геометрии, могут быть полезны как самим геометрам, так и архитекторам, работающим с криволинейными объектами, а также инженерам-механикам, разрабатывающими методы расчета криволинейных строительных и машиностроительных тонкостенных конструкций типа оболочек.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кривошапко С.Н., Барамзин А.Д. О применении торсовых оболочек// Военно-строительный бюллетень. 1979. №2. С.15-16.
2. Bhattacharya B. Theory of a new class of shells// Symposium on Industrialized Spatial and Shell Structures. Poland, 1973. P. 115-124.
3. Amol Bhanage. An overview of flat pattern development (FPD) methodologies used in blank development of sheet metal components of aircraft // Int. J. Mech. Eng. & Rob. Res. (IJMERR). April 2014. Vol. 3. No. 2. Pp. 33-43. ISSN 2278 – 0149 www.ijmerr.com
4. Hayakawa, K., Ohsaki, M. Form generation of discrete piecewise developable surface and its interior boundaries using local gauss map// Summaries of Technical Papers of Annual Meeting. Architectural Institute of Japan. 2023. Structures-1. 997–998. (in Japanese)
5. Кривошапко С.Н. Торсовые поверхности для перекрытия заданного прямоугольного плана// Вестник Российского университета дружбы народов. Серия «Инженерные исследования. Спец. выпуск». 2002. №1. С. 47–51. ISSN 0869–8732
6. Пищулина И. Я., Кукушкина Е. В. Поверхности второго порядка. Екатеринбург: УрФУ, 2012. 166 с. ISBN 978-5-321-02192-7
7. Кривошапко С.Н. Модельные поверхности соединительных участков двух трубопроводов// Монтажные и специальные работы в строительстве. 2005. № 10. С. 25–29. EDN: VYOTKL
8. Todd G. Nelson, Trent K. Zimmerman, Spencer P. Magleby, Robert J. Lang, and Larry L. Howell. Developable mechanisms on developable surfaces. *Science Robotics*. 13 Feb 2019. Vol. 4. Issue 27. eaau5171 [DOI: 10.1126/scirobotics.aau5171].
9. Булгаков В.Я. Конструирование поверхностей оболочек из отсеков торсов 4-го порядка// Прикладная геометрия и инженерная графика. Киев. 1976. Вып. 21. С. 134–137.
10. Krivoshapko S.N. Static analysis of shells with developable middle surfaces// Applied Mechanics Reviews. Vol. 51. No12. Part 1. December 1998. P. 731-746 [DOI: 10.1115/1.3098985 EID: 2-s2.0-0008891169].
11. Bhattacharya B. Membrane theory of new class of developable shells// Journal of Structural Engineering. 1983. Vol. 10, N. 3. P. 81–88.
12. Алёшина О.О., Иванов В.Н., Гринько Е.А. Исследование напряженного состояния торсовой оболочки одинакового ската аналитическим и численными методами // Строительная механика и расчет сооружений. 2020. № 6 (293). С. 2–13. <https://doi.org/10.37538/0039-2383.2020.6.2.13>
13. Weisstein, Eric W. Lamé Curve. From MathWorld--A Wolfram Web Resource. <https://mathworld.wolfram.com/LameCurve.html>
14. Павленко Г.Е. Об упрощенных формах судов. М.: Изд-во МРФ СССР, 1948. 28 с.
15. Polanski Stanislaw, Pianowski Leslaw. Rozwinięcia powierzchni w technice. Konstrukcje wspomagane komputerowo. Warszawa: Wydawnictwo Naukowe, PWN, 2001. 412 p.
16. Горбатович, Ж. Н. Конструирование торсовых поверхностей по двум плоским сечениям // Труды Белорусского государственного технологического университета. Серия 5. Физико-математические науки. 1995. Вып. 2. С. 33-36. <https://elib.belstu.by/handle/123456789/65082>
17. Krivoshapko S.N., Shambina S.L. Design of developable surfaces and the application of thin-walled developable structures// Serbian Architectural Journal (SAJ). 2012. Vol. 4. № 3. P.298-317. DOI:10.5937/SAJ1203298K
18. Matvejevs Aleksandrs, Dzenite Ilona. New practical methods of analysis of second order curves on a plane // Proc.: 18th Conference of Applied Mathematics APLIMAT 2019. February 2019. Pp. 803-816.
19. Абрамович, Н.А., Нестерович Н.Д. Суперэллипс в экосистеме APPLE // Материалы докладов 54-й Международной научно-технической конференции преподавателей и студентов: в 2 т. УО "ВГТУ". Витебск, 2021. Том 2. С. 102–104 [URI: <http://rep.vstu.by/handle/123456789/14813>].
20. Баджория Г.Ч. Об одном методе построения развертки торсовой поверхности// Судостроение. 1984. № 9. С. 37–38.
21. Chalfant Julie Steele. Analysis and Design of Developable Surfaces for Shipbuilding. Dissertation: Naval Postgraduate School, California, USA, 1997. 109 p. <http://hdl.handle.net/10945/7877>
22. Ito Miori, Imaoka Haruki. A method of predicting sewn shapes and a possibility of sewing by the theory of developable surfaces// Journal of the Japan Research Association for Textile End-Uses. Vol. 48. No 1. 2007. P. 42–51.
23. Гольденвейзер А.Л. Теория упругих тонких оболочек. М.: ГТТИ, 1953. 544 с.

24. Абрамов Н. И., Александров В.Т. Об использовании математических методов оптимизации в проектировании // Строительная механика и расчет сооружений. 1989. № 4. С.40-41.
25. Francisco Perez-Arribas, Leonardo Fernandez-Jambrina. Computer-aided design of developable surfaces: designing with developable surfaces // Journal of Computers. October 2018. Vol. 13. Nu 10. Pp. 1171-1176. doi: 10.17706/jcp.13.10.1171-1176
26. Lawrence Snežana. Developable surfaces: their history and application. Nexus Network Journal. 2011. 13 (3): 701–714. DOI:10.1007/s00004-011-0087-z
27. Glaeser Georg; Gruber Franz. Developable surfaces in contemporary architecture // Journal of Mathematics and the Arts, 2007. Vol. 1. Issue 1. March 2007. pp. 59-71. DOI:10.1080/17513470701230004
28. Chao Yuan, Nan Cao, and Yang Shi. A survey of developable surfaces: from shape modeling to manufacturing. arXiv: 2304.09587v2 [cs. GR] 14 June 2023, 20 p. Дата обращения 6 декабря 2024.
29. Бхаттачария Биноянанда. Расчет оболочек в виде торсовых поверхностей с двумя произвольными плоскими направляющими кривыми. УДН: Дис. к.физ.-мат. наук. 1970. 177 с. <https://repository.rudn.ru/ru/records/dissertation/record/49668/>
30. Кривошапко С.Н. Геометрия линейчатых поверхностей с ребром возврата и линейная теория расчета торсовых оболочек: Монография. М.: Изд-во РУДН. 2009. 357 с. ISBN 978-5-209-03087-4

REFERENCES

1. Krivoshapko S.N., Baramzin A.D. On application of torse shells. *Voенно-Stroitelnyy Bulletin [Military-and-Building Bulletin]*. 1979. №2. Pp.15-16.
2. Bhattacharya B. Theory of a new class of shells. Symposium on Industrialized Spatial and Shell Structures. Poland, 1973. P. 115-124.
3. Amol Bhanage. An overview of flat pattern development (FPD) methodologies used in blank development of sheet metal components of aircraft. *Int. J. Mech. Eng. & Rob. Res. (IJMERR)*. April 2014. Vol. 3. No. 2. Pp. 33-43. ISSN 2278 – 0149 www.ijmerr.com
4. Hayakawa, K. and Ohsaki, M. Form generation of discrete piecewise developable surface and its interior boundaries using local gauss map. Summaries of Technical Papers of Annual Meeting, Architectural Institute of Japan, 2023, Structures-1. 997–998. (in Japanese)
5. Krivoshapko S.N. Developable surfaces for covering of the rectangular plan. *Vestnik Rossiiskogo Universiteta Druzhby Narodov [RUDN Journal of Engineering Research]*. Special Issue». 2002. No1. Pp. 47–51. ISSN 0869–8732
6. Pischulina I.Ya., Kukushkina E.V. The Second Order Surfaces. Ekaterinburg: UrFU, 2012. 166 p. ISBN 978-5-321-02192-7
7. Krivoshapko S.N. Model surfaces of connecting sites of two pipelines. *Montazhnye i Spetsial'nye Raboty v Stroitel'stve*. 2005. (10). Pp. 25–28. EDN: VYOTKL
8. Todd G. Nelson, Trent K. Zimmerman, Spencer P. Magleby, Robert J. Lang, and Larry L. Howell. Developable mechanisms on developable surfaces. *Science Robotics*. 13 Feb 2019. Vol. 4. Issue 27. eaau5171 [DOI: 10.1126/scirobotics.aau5171].
9. Bulgakov V.Ya. Design of shell surfaces from fragments of the fourth order torsos. *Prikladnaya Geometriya i Inzhenernaya Graphika [Applied Geometry and Engineering Graphics]*. Kiev. 1976. Iss. 21. Pp. 134–137.
10. Krivoshapko S.N. Static analysis of shells with developable middle surfaces. *Applied Mechanics Reviews*. Vol. 51. No12, Part 1. December 1998. P. 731-746 [DOI: 10.1115/1.3098985 EID: 2-s2.0-0008891169].
11. Bhattacharya B. Membrane theory of new class of developable shells. *Journal of Structural Engineering*. 1983. Vol. 10, N. 3. P. 81–88.
12. Aleshina O.O., Ivanov V.N., Grinko E.A. Investigation of stress state of the equal slope torse shell by analytical and numerical methods. *Structural Mechanics and Analysis of Constructions*. 2020. № 6 (293). Pp. 2–13. <https://doi.org/10.37538/0039-2383.2020.6.2.13>
13. Weisstein, Eric W. Lamé Curve. From MathWorld--A Wolfram Web Resource. <https://mathworld.wolfram.com/LameCurve.html>
14. Pavlenko G.E. Simplified Shapes of Ships, M.: MRF SSSR, 1948. 28 p.
15. Polanski Stanislaw, Pianowski Leslaw. Rozwinięcia powierzchni w technice. Konstrukcje wspomaganie komputerowo. Warszawa: Wydawnictwo Naukowe, PWN. 2001. 412 p.
16. Gorbatovich Zh.N. Design of torse surfaces with two plane section. *Trudy Belorusskogo Gos. Tehnologicheskogo Univ. Ser. 5. Physic-and-Mathematic Sciences*. 1995. Iss. 2. Pp. 33–36. <https://elib.belstu.by/handle/123456789/65082> (in Russian)
17. Krivoshapko S.N., Shambina S.L. Design of developable surfaces and the application of thin-walled developable structures. *Serbian Architectural Journal (SAJ)*. 2012. Vol. 4. № 3. P.298-317. DOI:10.5937/SAJ1203298K

18. Matvejevs Aleksandrs, Dzenite Ilona. New practical methods of analysis of second order curves on a plane. Proc.: 18th Conference of Applied Mathematics APLIMAT 2019. February 2019. Pp. 803-816.
19. Abramovich N.A., Nesterovich N.D. Superellipse in the ecosystem APPLE. Materialy Dokladov 54-oi Mezhdunarodnoy Nauchno-Tehnicheskoy Konferentsii Prepodavateley i Studentov: Two volumes, UO "VGTU". Vitebsk, 2021. Vol. 2. Pp. 102–104 [URI: <http://rep.vstu.by/handle/123456789/14813>].
20. Bajoria G.Ch. On one method of design of development of torse surface. *Sudostroeniye* [Shipbuilding], 1984. No 9. Pp. 37-38.
21. Chalfant Julie Steele. Analysis and Design of Developable Surfaces for Shipbuilding. Dissertation: Naval Postgraduate School, California, USA, 1997. 109 p. <http://hdl.handle.net/10945/7877>
22. Ito Miori, Imaoka Haruki. A method of predicting sewn shapes and a possibility of sewing by the theory of developable surfaces. *Journal of the Japan Research Association for Textile End-Uses*. Vol. 48. No 1. 2007. P. 42-51.
23. Goldenveizer A.L. Theory of Elastic Thin Shells. Published by Pergamon Press. New York. 1961. 544 p.
24. Abramov N. I., Aleksandrov V. T. Ob ispolzovanii matematicheskikh osnov optimizatsii v proektirovanii [On using mathematical methods of optimization in designing]. *Stroit. Meh. i Raschet Soor.* 1989. № 4. Pp. 40–41.
25. Francisco Perez-Arribas, Leonardo Fernandez-Jambrina. Computer-aided design of developable surfaces: designing with developable surfaces. *Journal of Computers*. October 2018. Vol. 13. Nu 10. Pp. 1171-1176. doi: 10.17706/jcp.13.10.1171-1176
26. Lawrence Snežana. Developable surfaces: their history and application. *Nexus Network Journal*. 2011. 13 (3): 701–714. DOI:10.1007/s00004-011-0087-z
27. Glaeser, Georg; Gruber, Franz. Developable surfaces in contemporary architecture. *Journal of Mathematics and the Arts*. 2007. Vol. 1. Issue 1. March 2007. Pp. 59-71. DOI:10.1080/17513470701230004
28. Chao Yuan, Nan Cao, and Yang Shi. A survey of developable surfaces: from shape modeling to manufacturing. arXiv: 2304.09587v2 [cs. GR] 14 June 2023, 20 p. [The data of access: December 6, 2024].
29. Bhattacharya B. Analysis of Shells in the Form of Torse Surfaces with Two Arbitrary Plane Directrix Curves. UDN: Diss. kand. phiz.-mat. nauk, 1970. 177 p. <https://repository.rudn.ru/ru/records/dissertation/record/49668/>
30. Krivoshapko, S.N. Geometry of ruled surfaces with cuspidal edge and linear theory of developable surfaces' analysis: Monograph, Moscow: 2009, RUDN, 358 p. (in Russian).

Информация об авторе

Кривошاپко Сергей Николаевич

ФГАОУ ВО «Российский университет дружбы народов», г. Москва, Россия, доктор технических наук, профессор.
Профессор-консультант
E-mail: sn_krivoshapko@mail.ru

Information about author

Krivoshapko Sergey Nikolaevich

The Engineering Academy of the Peoples' Friendship University, Moscow, Russia, Doctor of Tech. Sc., Professor
E-mail: sn_krivoshapko@mail.ru