

А.А. ПОДДУБНЫЙ¹, В.А. ГОРДОН², Г.А. СЕМЕНОВА²
¹Белорусский государственный университет транспорта, г. Гомель, Беларусь,
²ФГБОУ ВО «ОГУ имени И.С. Тургенева», г. Орёл, Россия

РЕАКЦИЯ СИСТЕМЫ «БАЛКА-ОСНОВАНИЕ» НА ВНЕЗАПНОЕ ИЗМЕНЕНИЕ ИЗГИБНОЙ ЖЕСТКОСТИ БАЛКИ

Аннотация. Построена математическая модель динамического процесса, возбуждаемого в статически нагруженной системе «балка-основание» внезапным изменением изгибной жёсткости балки. Предполагается, что изменяется либо модуль упругости материала балки, либо осевой момент инерции поперечного сечения балки при её повороте на 90 градусов относительно продольной оси при сохранении направления нагрузки. Вынужденные колебания исследуются путем разложения нагрузки и статического прогиба исходной балки в ряды по формам собственных колебаний балки с изменившимися параметрами. Определение собственных частот и соответствующих форм перемещений и изгибающих моментов проводится методом начальных параметров с привлечением векторно-матричного представления состояний произвольных сечений балки. Для демонстрации возможностей подхода приведены численные результаты.

Ключевые слова: балка на упругом основании, внезапное изменение жёсткости балки, модуль упругости материала балки, момент инерции сечения, вынужденные колебания, изгибающий момент.

A.A. PODDUBNY¹, V.A. GORDON², G.A. SEMENOVA²
¹Belarusian State University transport, Gomel,
²Orel State University, Orel, Russia

RESPONSE OF THE BEAM-BASE SYSTEM TO A SUDDEN CHANGE IN THE MODULUS OF ELASTICITY OF THE BEAM MATERIAL

Abstract. A mathematical model of the dynamic process excited in a statically loaded beam-base system by a sudden change in the beam's bending rigidity is constructed. It is assumed that either the beam material's elastic modulus or the beam's cross-sectional axial moment of inertia changes when it is rotated by 90 degrees relative to the beam's longitudinal axis while maintaining the load direction. Forced vibrations are investigated by decomposing the load and static deflection of the initial beam into rows according to the beam's natural vibration modes with changed parameters. Natural frequencies and corresponding displacement and bending moment modes are determined by the initial parameter method using a vector-matrix representation of the states of arbitrary beam sections. Numerical results are provided to demonstrate the capabilities of the approach.

Keywords: beam on elastic foundation, sudden change in beam rigidity, beam material elastic modulus, section moment of inertia, forced vibrations, bending moment.

Введение

Создание методов расчета, учитывающих влияние на напряженно-деформированное состояние и динамику конструкций внезапных изменений их структуры и материалов, всё ещё является насущной необходимостью для прогнозирования их поведения и оценки живучести [1-3].

Целью настоящей работы является постановка и аналитическое решение задачи изгибных колебаний и их последствий в статически нагруженной системе «балка-основание», инициируемых внезапным изменением величины модуля упругости E материала балки или изменением осевого момента инерции поперечного сечения I балки после поворота её относительно продольной оси при сохранении направления нагрузки. Внезапное изменение изгибной жёсткости EI балки приводит к изменению общей жёсткости системы «балка-основание» и нарушению статического равновесия. Балка приходит в движение, в ходе которого перераспределяются и растут деформации и внутренние усилия. В результате возможны нарушения штатного функционирования несущей системы, потеря несущей способности, частичное или полное разрушение. Изменение модуля упругости материала балки может быть вызвано воздействием агрессивных сред и физических полей. Так, сульфатные, хлоридосодержащие среды – антиобледенители, морская вода, добавки – ускорители твердения бетонов, коррозионное растрескивание, водородное и радиационное охрупчивание – приводят к внезапным существенным, без заметных внешних проявлений, изменениям механических свойств конструкций, в том числе изменениям модуля упругости материала [13-17].

Материалы и методы

Упругая балка с изгибной жёсткостью EI опирается по всей длине L на упругое основание Винклера с коэффициентом жёсткости K и жёстко закреплена по концам. На балку действуют внешняя распределённая нагрузка интенсивности q и отпор основания, пропорциональный прогибу $r = Kw_{\text{ст}}$, где $w_{\text{ст}}$ – функция прогиба.

Предполагается, что в некоторый момент времени $t = 0$ жёсткость балки EI внезапно изменилась и приняла значение εEI . Внезапное изменение жёсткости балки приводит к изменению общей жёсткости системы «балка-основание», не обеспечивающей исходное статическое равновесие. Возникающие инерционные усилия приводят балку в движение $v(x, t)$, в ходе которого внутренние силовые факторы и перемещения получают динамические приращения.

В работе ставится задача оценить изменения в напряжённо-деформируемом состоянии балки, вызванные внезапным изменением величины её жёсткости.

Решение проблемы строится последовательным выполнением следующих действий.

1. Определяется статический прогиб и внутренние усилия в закреплённой на концах балке с изгибной жёсткостью EI , используемые в дальнейшем как начальные условия динамического процесса, инициируемого в системе «балка-основание» внезапным изменением жёсткости.

2. Определяются собственные формы и частоты изгибных колебаний той же балки, изгибная жёсткость которой изменилась, внезапно приняв значение εEI .

3. Определяются динамические прогибы и догружения из решения задачи о вынужденных колебаниях изменившейся балки путём разложения внешней нагрузки, статического прогиба исходной балки и искомого динамического прогиба и изгибающего момента в ряды по формам собственных колебаний изменившейся балки.

Статический изгиб закреплённой по концам балки на упругом основании Винклера

Статический изгиб балки на упругом основании Винклера описывается уравнением [6]

$$\frac{d^4 w_{\text{ст}}}{d\xi^4} + 4\alpha^4 w_{\text{ст}} = \bar{q} \quad (1)$$

в безразмерных переменных и параметрах

$$\xi = \frac{x}{L}; \quad w_{\text{ст}} = \frac{v}{L}; \quad \bar{q} = \frac{qL^3}{EI}; \quad \alpha = \sqrt[4]{\frac{KL^4}{4EI}}.$$

Общее решение уравнения (1) в случае заземления концов имеет вид

$$w_{\text{ст}} = \frac{\bar{q}}{4\alpha^4} (1 - K_4(\alpha\xi)) + w_0'' K_2(\alpha\xi) + w_0''' K_1(\alpha\xi) \quad (2)$$

где $K_i(\alpha\xi)$, $i = 1 \div 4$ – функции Крылова вида

$$K_1(\alpha\xi) = \frac{\sin \alpha\xi \operatorname{ch} \alpha\xi - \cos \alpha\xi \operatorname{sh} \alpha\xi}{4\alpha^3}; \quad K_2(\alpha\xi) = \frac{\sin \alpha\xi \operatorname{sh} \alpha\xi}{2\alpha^2};$$

$$K_3(\alpha\xi) = \frac{\sin \alpha\xi \operatorname{ch} \alpha\xi + \cos \alpha\xi \operatorname{sh} \alpha\xi}{2\alpha}; \quad K_4(\alpha\xi) = \cos \alpha\xi \operatorname{ch} \alpha\xi.$$

w_0'', w_0''' – начальные параметры, соответственно безразмерные изгибающий момент и перерезывающая сила в начале координат $\xi=0$,

$$w_0'' = \frac{\bar{q}}{K_2^2(\alpha) - K_1(\alpha)K_3(\alpha)} \left(\frac{K_4(\alpha) - 1}{4\alpha^4} K_2(\alpha) + K_1^2(\alpha) \right),$$

$$w_0''' = -\frac{\bar{q}}{K_2^2(\alpha) - K_1(\alpha)K_3(\alpha)} \left(\frac{K_4(\alpha) - 1}{4\alpha^4} K_3(\alpha) + K_1(\alpha)K_2(\alpha) \right).$$

Безразмерный изгибающий момент в статическом состоянии определяется функцией

$$w_{\text{ст}}''(\xi) = \bar{q} K_2(\alpha\xi) + w_0'' K_4(\alpha\xi) + w_0''' K_3(\alpha\xi) \quad (3)$$

На рисунке 1 изображены эпюры статических изгибающих моментов для балки с закреплёнными концами при различных значениях параметра обобщённой жёсткости системы «балка-основание» $\lambda = 4\alpha^4$.

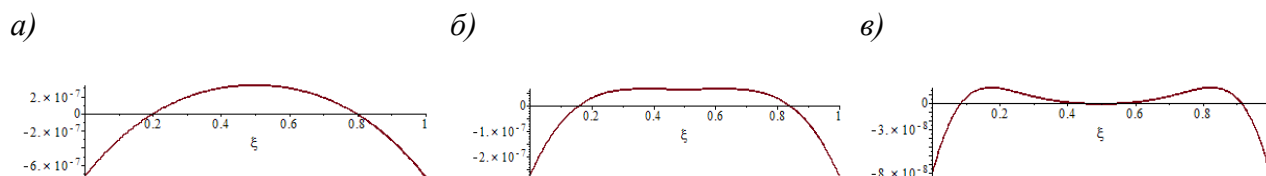


Рисунок 1 – Изгибающие моменты при различных значениях параметра жёсткости
а – $\alpha=3$, б – $\alpha=5$, в – $\alpha=9$

Необычный вид эпюр объясняется [7] совместным действием на балку внешней нагрузки и реакцией упругого основания.

1.2 Собственные изгибные колебания балки при внезапном изменении её жёсткости EI

Возникшее движение $v(x, t)$ после внезапного преобразования величины жёсткости (уменьшения или увеличения) до величины εEI описывается уравнением [8]

$$\frac{\partial^4 w_{\text{дин}}}{\partial \xi^4} + 4\bar{\alpha}^4 \left(w_{\text{дин}} + \frac{\partial^2 w_{\text{дин}}}{\partial \tau^2} \right) = \bar{q} \quad (4)$$

при соответствующих начальных и граничных условиях. В уравнении (4) введены новые безразмерные переменные и параметры

$$w_{\text{дин}} = \frac{v(x, t)}{L}; \quad \tau = \omega_0 t; \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{K}{\rho A}}; \quad \bar{\alpha} = \sqrt[4]{\frac{KL^4}{4\varepsilon EI}} = \frac{\alpha}{\varepsilon^{0,25}}.$$

Параметр ω_0 имеет размерность частоты и поэтому назван условной частотой.

Уравнение (4) описывает вынужденные колебания нагруженной балки. Для его решения необходимо предварительно рассмотреть собственные движения подобной балки на упругом основании, которые описываются уравнением (4) с обнулённой правой частью.

1.2.1 Варианты построения матричных уравнений состояния сечений балки

Полагая собственные колебания гармоническими, разделим переменные в уравнении

$$\frac{\partial^4 w_{\text{дин}}}{\partial \xi^4} + 4\bar{\alpha}^4 \left(w_{\text{дин}} + \frac{\partial^2 w_{\text{дин}}}{\partial \tau^2} \right) = 0 \quad (5)$$

представлением

$$w_{\text{дин}} = W(\xi) \sin \bar{\omega} \tau, \quad (6)$$

где $\bar{\omega} = \frac{\omega}{\omega_0}$ – безразмерная собственная частота изгибных колебаний балки на упругом основании.

Подстановка функции (6) в уравнение (5) приводит к уравнению собственных форм колебаний $W(\xi)$

$$\frac{d^4 W}{d\xi^4} + 4\bar{\alpha}^4(1 - \bar{\omega}^2)W = 0 \quad (7)$$

Используя условную частоту ω_0 , характеризующую жесткостные и инерционные свойства системы «балка-основание» и известную частоту изгибных колебаний $\omega_{св}$ такой же свободной (без поддерживающего основания) балки

$$\omega_{св} = \left(\frac{m}{L}\right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}},$$

$$\text{где } m = \begin{cases} 4,73 - \text{ для защемлённой по концам балки,} \\ \pi - \text{ для шарнирно опёртой балки,} \\ 3,93 - \text{ для балки с защемлением и шарниром,} \\ 1,875 - \text{ для консольной балки,} \end{cases}$$

приведём уравнение (7) к виду

$$\frac{d^4 W}{d\xi^4} + \frac{m^4}{\varepsilon}(\bar{\omega}_0^2 - \tilde{\omega}^2)W = 0, \quad (8)$$

где $\bar{\omega}_0 = \frac{\omega_0}{\omega_{св}}$ – относительная условная частота,

$\tilde{\omega} = \frac{\omega}{\omega_{св}}$ – относительная искомая частота.

Таким образом, все частоты, фигурирующие в исследовании: ω_0 – известная, если заданы все параметры балки и основания, ω – искомая – приведены к одной известной основной частоте собственных колебаний свободной балки, соответствующим образом закреплённой по концам.

Решение уравнения (8) ищем в виде функции

$$W = A e^{r\xi}, \quad (9)$$

подстановка которой в уравнение (8) приводит к характеристическому уравнению

$$r^4 + \frac{m^4}{\varepsilon}(\bar{\omega}_0^2 - \tilde{\omega}^2) = 0, \quad (10)$$

корни которого в зависимости от соотношения частот $\bar{\omega}_0$ и $\tilde{\omega}$ могут быть представлены следующим образом:

если $\tilde{\omega} > \bar{\omega}_0$, то корни уравнения (10) действительные и чисто мнимые

$$r_{1,2} = \pm\beta_1, \quad r_{3,4} = \pm i\beta_1, \quad \beta_1 = \frac{m}{\sqrt[4]{\varepsilon}} \sqrt[4]{\tilde{\omega}^2 - \bar{\omega}_0^2}, \quad (11)$$

при этом функция прогибов (6) имеет вид

$$W = A_1 \operatorname{ch} \beta_1 \xi + A_2 \operatorname{sh} \beta_1 \xi + A_3 \cos \beta_1 \xi + A_4 \sin \beta_1 \xi; \quad (12)$$

если $\tilde{\omega} < \bar{\omega}_0$, то корни уравнения (10) комплексные

$$r_{1,2,3,4} = (\pm 1 \pm i)\beta_2, \quad \beta_2 = \frac{m}{\sqrt[4]{\varepsilon}} \sqrt[4]{\bar{\omega}_0^2 - \tilde{\omega}^2},$$

при этом функция прогибов (6) имеет вид

$$W = A_1 \operatorname{sh} \beta_2 \xi \sin \beta_2 \xi + A_2 \operatorname{sh} \beta_2 \xi \cos \beta_2 \xi + A_3 \operatorname{ch} \beta_2 \xi \sin \beta_2 \xi + A_4 \operatorname{ch} \beta_2 \xi \cos \beta_2 \xi; \quad (13)$$

если же $\tilde{\omega} = \bar{\omega}_0$, то четырёхкратный корень равен нулю

$$r_{1,2,3,4} = 0,$$

и функция прогибов (6) становится

$$W = A_1 + A_2 \xi + A_3 \frac{\xi^2}{2} + A_4 \frac{\xi^3}{6}. \quad (14)$$

Заменяя постоянные интегрирования A_i ($i = 1, 2, 3, 4$) на начальные параметры задачи W_0, W_0', W_0'', W_0''' , получим функции прогибов.

Функция прогибов (12) принимает вид

$$W(\xi) = W_0 R_4(\beta_1 \xi) + W_0' R_3(\beta_1 \xi) + W_0'' R_2(\beta_1 \xi) + W_0''' R_1(\beta_1 \xi), \quad (15)$$

где $R_i(\beta_1 \xi)$, $i = 1 \div 4$ – функции Крылова вида

$$R_1(\beta_1 \xi) = \frac{\operatorname{sh} \beta_1 \xi - \sin \beta_1 \xi}{2\beta_1^3}, \quad R_2(\beta_1 \xi) = \frac{\operatorname{ch} \beta_1 \xi - \cos \beta_1 \xi}{2\beta_1^2},$$

$$R_3(\beta_1 \xi) = \frac{\operatorname{sh} \beta_1 \xi + \sin \beta_1 \xi}{2\beta_1}, \quad R_4(\beta_1 \xi) = \frac{\operatorname{ch} \beta_1 \xi + \cos \beta_1 \xi}{2}.$$

В этом случае состояние произвольного сечения ξ описывается матричным уравнением

$$\bar{W}(\xi) = V_1(\xi) \bar{W}_0, \quad (16)$$

где $\bar{W}(\xi) = \{W(\xi) \quad W'(\xi) \quad W''(\xi) \quad W'''(\xi)\}^T$ – вектор состояния произвольного сечения ξ ,

$\bar{W}_0 = \{W_0 \quad W'_0 \quad W''_0 \quad W'''_0\}^T$ – вектор начальных параметров,

$V_1(\xi)$ – функциональная матрица влияния начальных параметров на состояние сечения

$$V_1(\xi) = \begin{pmatrix} R_4(\beta_1 \xi) & R_3(\beta_1 \xi) & R_2(\beta_1 \xi) & R_1(\beta_1 \xi) \\ \beta_1^4 R_1(\beta_1 \xi) & R_4(\beta_1 \xi) & R_3(\beta_1 \xi) & R_2(\beta_1 \xi) \\ \beta_1^4 R_2(\beta_1 \xi) & \beta_1^4 R_1(\beta_1 \xi) & R_4(\beta_1 \xi) & R_3(\beta_1 \xi) \\ \beta_1^4 R_3(\beta_1 \xi) & \beta_1^4 R_2(\beta_1 \xi) & \beta_1^4 R_1(\beta_1 \xi) & R_4(\beta_1 \xi) \end{pmatrix}.$$

Аналогично, функция (13) принимает вид

$$W(\xi) = W_0 K_4(\beta_2 \xi) + W'_0 K_3(\beta_2 \xi) + W''_0 K_2(\beta_2 \xi) + W'''_0 K_1(\beta_2 \xi), \quad (17)$$

$$\bar{W}(\xi) = V_2(\xi) \bar{W}_0, \quad (18)$$

$$V_2(\xi) = \begin{pmatrix} K_4(\beta_2 \xi) & K_3(\beta_2 \xi) & K_2(\beta_2 \xi) & K_1(\beta_2 \xi) \\ -4\beta_2^4 K_1(\beta_2 \xi) & K_4(\beta_2 \xi) & K_3(\beta_2 \xi) & K_2(\beta_2 \xi) \\ -4\beta_2^4 K_2(\beta_2 \xi) & -4\beta_2^4 K_1(\beta_2 \xi) & K_4(\beta_2 \xi) & K_3(\beta_2 \xi) \\ -4\beta_2^4 K_3(\beta_2 \xi) & -4\beta_2^4 K_2(\beta_2 \xi) & -4\beta_2^4 K_1(\beta_2 \xi) & K_4(\beta_2 \xi) \end{pmatrix},$$

а функция (14)

$$W(\xi) = W_0 + W'_0 \xi + W''_0 \frac{\xi^2}{2} + W'''_0 \frac{\xi^3}{6}, \quad (19)$$

$$\bar{W}(\xi) = V_3(\xi) \bar{W}_0, \quad (20)$$

$$V_3(\xi) = \begin{pmatrix} 1 & \xi & \frac{\xi^2}{2} & \frac{\xi^3}{6} \\ 0 & 1 & \xi & \frac{\xi^2}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \xi \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.2.2 Анализ собственных частот и форм колебаний балки на упругом основании, защемлённой по концам

Граничные условия в этом случае следующие

$$W_0 = W'_0 = 0, \quad W(1) = W'(1) = 0. \quad (21)$$

С учётом первых двух условий (21), функция прогиба может принимать вид

$$W(\xi) = \begin{cases} W''_0 R_2(\beta_1 \xi) + W'''_0 R_1(\beta_1 \xi), & \text{если } \tilde{\omega} > \bar{\omega}_0 \\ W''_0 K_2(\beta_2 \xi) + W'''_0 K_1(\beta_2 \xi), & \text{если } \tilde{\omega} < \bar{\omega}_0 \end{cases} \quad (22)$$

$$W(\xi) = \begin{cases} W''_0 \frac{\xi^2}{2} + W'''_0 \frac{\xi^3}{6}, & \text{если } \tilde{\omega} = \bar{\omega}_0 \end{cases} \quad (23)$$

$$W(\xi) = \begin{cases} W''_0 \frac{\xi^2}{2} + W'''_0 \frac{\xi^3}{6}, & \text{если } \tilde{\omega} = \bar{\omega}_0 \end{cases} \quad (24)$$

1.2.2.1 Принимаем условие, согласно которому искомая частота $\tilde{\omega}$ будет равна известной условной частоте $\bar{\omega}_0$. Тогда, применяя у функции (24) вторую пару граничных условий (21), получим противоречивую пару уравнений относительно констант W''_0 и W'''_0

$$\begin{cases} W''_0 + \frac{1}{3} W'''_0 = 0 \\ W''_0 + \frac{1}{2} W'''_0 = 0 \end{cases}.$$

Таким образом, предположение о возможности равенства искомой частоты $\tilde{\omega}$ и условной частоты $\bar{\omega}_0$ противоречит физическим возможностям системы, как в случае консольной балки [6].

1.2.2.2 Принимаем предположение, что искомая частота $\tilde{\omega}$ больше условной частоты $\bar{\omega}_0$, то есть $\tilde{\omega} > \bar{\omega}_0$. Удовлетворяя второй паре граничных условий (21) и используя функцию

(22) и её первую производную, получаем систему алгебраических уравнений относительно неизвестных начальных параметров W_0'' и W_0'''

$$\begin{cases} W_0'' R_2(\beta_1) + W_0''' R_1(\beta_1) = 0 \\ W_0'' R_3(\beta_1) + W_0''' R_2(\beta_1) = 0 \end{cases}$$

Условием существования ненулевых решений данной системы уравнений является равенство нулю определителя матрицы коэффициентов системы. Раскрывая определитель, получаем частотное уравнение

$$\frac{1}{2\beta_1^4} (1 - \operatorname{ch} \beta_1 \cos \beta_1) = 0, \quad (25)$$

корни которого известны

$$\beta_{11} = 4,73; \quad \beta_{12} = 7,85; \quad \beta_{1n} = \frac{2n+1}{2} \pi \quad \text{при } n \geq 3.$$

Частоты собственных колебаний балки находим из формулы (11)

$$\bar{\omega}_n = \sqrt{\varepsilon \left(\frac{\beta_{1n}}{m} \right)^4 + \bar{\omega}_0^2} \quad (26)$$

или в размерном виде

$$\omega_n = \omega_{\text{св}} \sqrt{\varepsilon \left(\frac{\beta_{1n}}{m} \right)^4 + \bar{\omega}_0^2}. \quad (27)$$

Каждой частоте отвечает соответствующая форма колебаний

$$W_n = \left(R_2(\beta_{1n} \xi) - \frac{R_2(\beta_{1n})}{R_1(\beta_{1n})} R_1(\beta_{1n} \xi) \right) W_0''. \quad (28)$$

Таким образом, формы собственных колебаний балки остаются такими же, как и свободной балки, а частоты зависят от условной частоты $\bar{\omega}_0$ и по величине становятся в

$\sqrt{\varepsilon \left(\frac{\beta_{1n}}{m} \right)^4 + \bar{\omega}_0^2}$ раз больше соответствующих частот $\omega_{\text{св}}$ такой же свободной балки.

1.2.2.3 Предположение, что искомая частота $\tilde{\omega}$ будет ниже условной частоты $\bar{\omega}_0$, приводит с использованием функции (23) и граничных условий (21) к частотному уравнению

$$\operatorname{sh}^2 \beta_2 = \sin^2 \beta_2,$$

имеющему единственный нулевой корень. Этот факт позволяет сделать вывод, что физически реальный результат может дать только предположение $\tilde{\omega} > \bar{\omega}_0$.

1.3 Вынужденные колебания защемлённой по концам балки на упругом основании после внезапного изменения жёсткости балки

Решение уравнения (4) будем искать разложением функции $w_{\text{дин}}(\xi, \tau)$ в ряд по собственным функциям $W_n(\xi)$ с коэффициентами в виде неизвестных функций времени $Q_n(\tau)$

$$w_{\text{дин}}(\xi, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} Q_n(\tau) W_n(\xi). \quad (29)$$

Подставляя ряд (29) в уравнение (4), используя уравнение (7), умножая обе части полученного уравнения на $W_n(\xi)$, интегрируя обе части по ξ от 0 до 1, используя свойство ортогональности форм собственных колебаний $W_n(\xi)$, получим дифференциальное уравнение для функций $Q_n(\tau)$

$$\frac{d^2 Q_n}{d\tau^2} + \bar{\omega}_n^2 Q_n = R_n, \quad (30)$$

где
$$R_n = \frac{1}{4 \bar{\alpha}^4} \frac{\int_0^1 \bar{q} W_n(\xi) d\xi}{\int_0^1 W_n^2(\xi) d\xi}.$$

Общее решение неоднородного уравнения (30) есть сумма решения соответствующего однородного уравнения

$$Q_{0n}(\tau) = D_{1n} \cos \bar{\omega}_n \tau + D_{2n} \sin \bar{\omega}_n \tau,$$

где D_{1n} и D_{2n} – произвольные постоянные,

и частного решения, удовлетворяющего правой части R_n

$$Q_n^* = \frac{R_n}{\bar{\omega}_n^2},$$

то есть

$$Q_n(\tau) = D_{1n} \cos \bar{\omega}_n \tau + D_{2n} \sin \bar{\omega}_n \tau + \frac{R_n}{\bar{\omega}_n^2}. \quad (31)$$

Согласно (29), функция динамических прогибов принимает вид

$$w_{\text{дин}}(\xi, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(D_{1n} \cos \bar{\omega}_n \tau + D_{2n} \sin \bar{\omega}_n \tau + \frac{R_n}{\bar{\omega}_n^2} \right) W_n(\xi). \quad (32)$$

Постоянные D_{1n} и D_{2n} определяются из начальных условий динамического процесса, сформированных в разделе 1.1. А именно, полученная там функция $w_{\text{ст}}(\xi)$ статического прогиба неповреждённой балки используется в качестве начального условия при $\tau = 0$, то есть

$$w_{\text{дин}}(\xi, 0) = w_{\text{ст}}(\xi), \quad \left. \frac{\partial w_{\text{дин}}}{\partial \tau} \right|_{\xi, 0} = 0. \quad (33)$$

Второе условие (33) означает отсутствие скорости сечений балки при $\tau = 0$, откуда следует

$$D_{2n} = 0. \quad (34)$$

Из первого условия (33) получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(D_{1n} + \frac{R_n}{\bar{\omega}_n^2} \right) W_n(\xi) = w_{\text{ст}}(\xi). \quad (35)$$

Умножая обе части (35) на $W_n(\xi)$ и интегрируя по ξ от 0 до 1, получаем

$$D_{1n} = B_n - \frac{R_n}{\bar{\omega}_n^2}, \quad B_n = \frac{\int_0^1 \bar{q} W_n(\xi) d\xi}{\int_0^1 W_n^2(\xi) d\xi}. \quad (36)$$

Подставляя (34) и (36) в ряд (32) и учитывая тригонометрическое равенство

$$1 - \cos \bar{\omega}_n \tau = 2 \sin^2 \frac{\bar{\omega}_n \tau}{2},$$

получим функцию прогибов при вынужденных колебаниях балки

$$w_{\text{дин}}(\xi, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(B_n \cos \bar{\omega}_n \tau + C_n \sin^2 \frac{\bar{\omega}_n \tau}{2} \right) W_n(\xi). \quad (37)$$

где $C_n = \frac{2 R_n}{\bar{\omega}_n^2}$.

Дифференцируя функцию $w_{\text{дин}}(\xi, \tau)$ (37) дважды по ξ , получаем безразмерную функцию изгибающих моментов

$$w_{\text{дин}}''(\xi, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(B_n \cos \bar{\omega}_n \tau + C_n \sin^2 \frac{\bar{\omega}_n \tau}{2} \right) W_n''(\xi).$$

Результаты и обсуждения

В настоящем разделе рассматривается железобетонная балка длиной 6,7 м, прямоугольного сечения со сторонами: ширина $B = 0,25$ м, высота $h = 0,18$ м, площадь поперечного сечения $A = 0,045$ м². Момент инерции сечения $I = \frac{B h^3}{12} = 1,215 \cdot 10^{-4}$ м⁴. Модуль Юнга материала балки в статическом расчёте $E_{\text{ст}} = 3,05 \cdot 10^8 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}$. Материал основания принимается в расчётах в трёх вариантах: базовый – гравий с модулем жёсткости $K_{01} = 3,5$ МПа/м; материал менее жёсткий с модулем $0,1 K_{01}$, и более жёсткий с модулем $10 K_{01}$. Исследуется влияние факторов, внезапное изменение которых приводит находящуюся в состоянии статического равновесия систему «балка-основание» в движение, при остающейся неизменной жёсткости основания и при сохранении направления нагрузки. Этими факторами являются модуль Юнга материала E и момент инерции поперечного сечения I , определяющие изгибную жёсткость балки EI . Внешнюю нагрузку принимаем за $q = 1$ Н.

На рисунке 2 приводятся эпюры безразмерных статических прогибов и изгибающих моментов при указанных исходных данных.

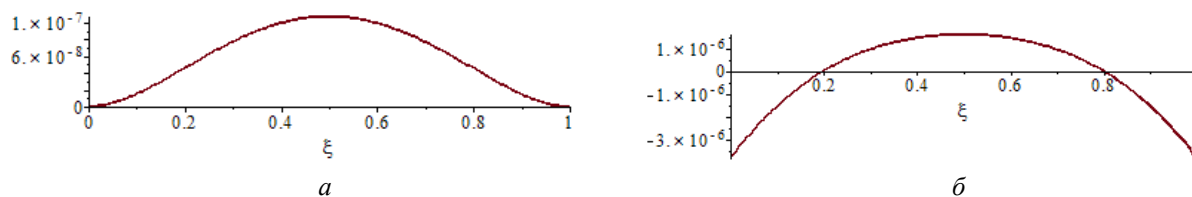


Рисунок 2 – Статический прогиб (а) и изгибающий момент (б)

На рисунке 3 показаны три первые собственные формы прогибов и изгибающих моментов, остающихся такими же, как у свободной без основания балки, но совершаемых с частотами, зависимиыми от модуля упругости материала балки.

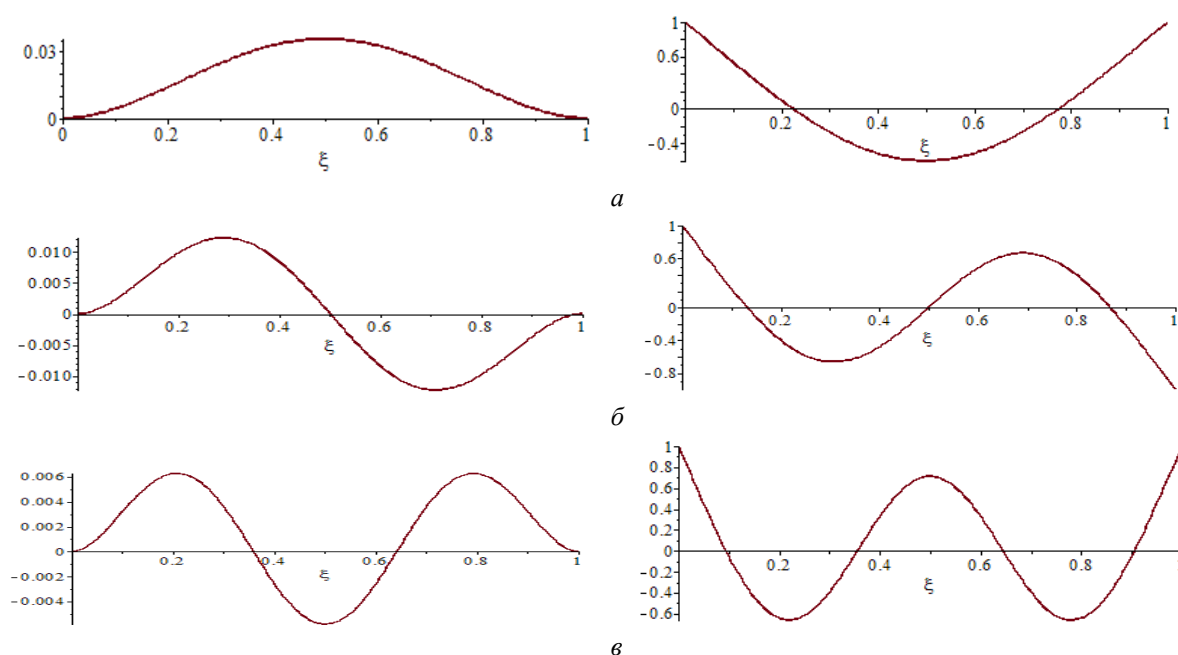


Рисунок 3 – Формы собственных колебаний и изгибающих моментов
а – первая, б – вторая, в – третья форма

В таблице 1 приводятся данные расчётов для балок с внезапно изменяющимся модулем Юнга E , опёртых на основания трёх видов, условно именуемых как основания пониженной, проектной и повышенной жёсткости. Предполагается внезапное изменение модуля $E_{ст}$ как в сторону уменьшения до величины $\varepsilon E_{ст} (\varepsilon < 1)$, так и в сторону увеличения до значения $\varepsilon E_{ст} (\varepsilon > 1)$. Рассчитывается безразмерный $w''(\xi, \tau)$ изгибающий момент в сечении $\xi = 0$ (или $\xi = 1$) в ходе возникших колебаний после внезапного изменения величины E . Как показывают результаты расчётов, внезапное шестикратное снижение модуля упругости незначительно увеличивает максимальный изгибающий момент при более жёстком основании (в 1,37 раза) и существенно (в 4 раза) увеличивает момент при основании пониженной жёсткости. Внезапное увеличение модуля упругости предсказуемо снижает максимальный изгибающий момент в балке.

Таблица 1 – Максимальные значения изгибающего момента $w''(0)$ при исходном статическом состоянии ($E \cdot 10^{-6}$) и в ходе колебаний ($\varepsilon E \cdot 10^{-6}$)

ε	Основание		
	Пониженная жёсткость, $0.1K$	Проектная жёсткость, K	Повышенная жёсткость, $10K$
1/6	25,00	7,84	1,62
1/4	19,40	6,75	1,47
1/2	11,10	5,04	1,19
1 (ст)	6,23	3,81	1,18
2	3,12	2,24	0,70
4	1,59	1,28	0,56
6	1,06	0,95	0,47

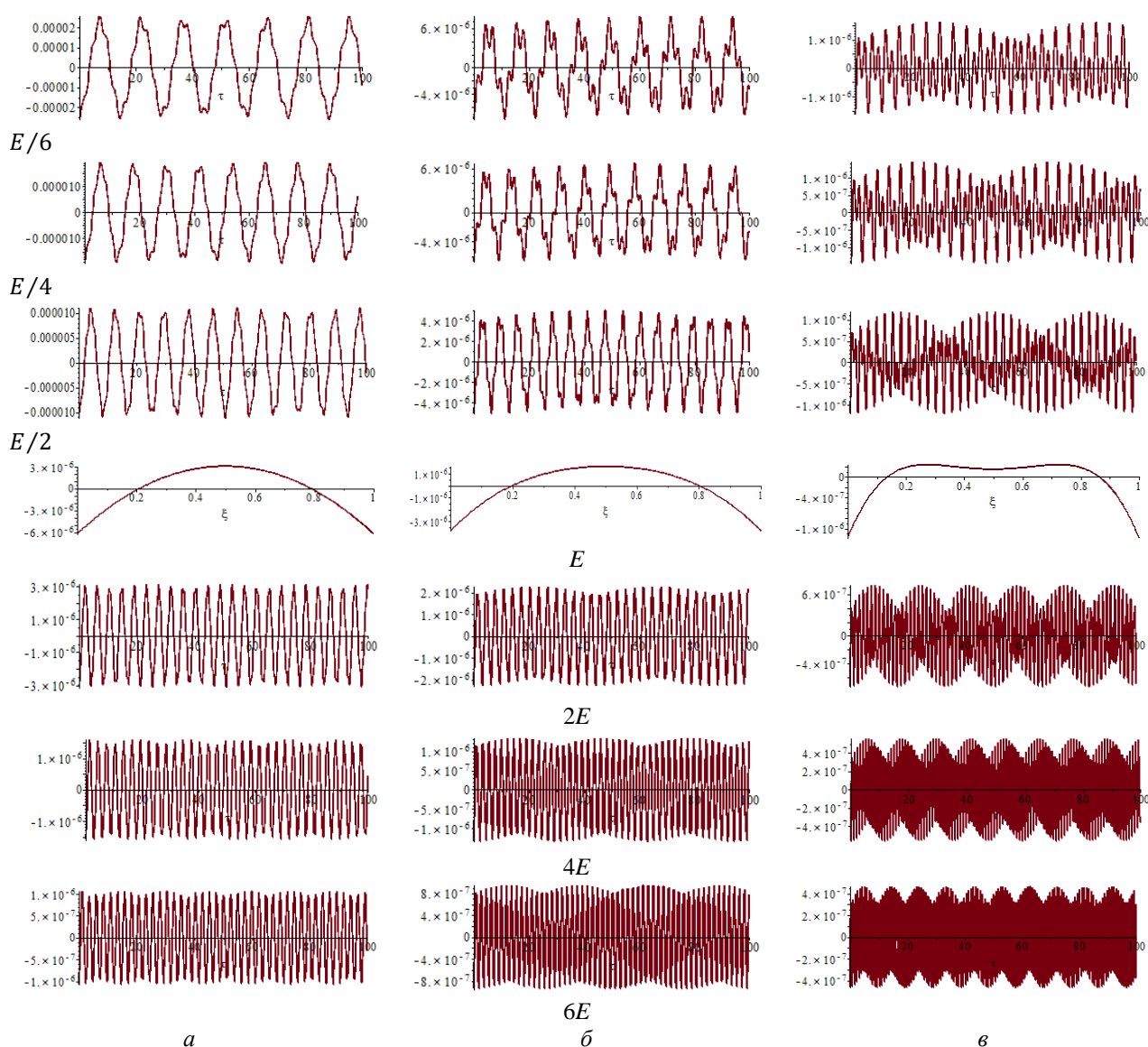


Рисунок 4 – Развёртки изменения во времени безразмерного изгибающего момента при трёх типах основания (а – пониженной, б – проектной, в – повышенной жёсткости) и разном модуле упругости E

На рисунке 4 представлены развёртки изменения во времени безразмерного прогибающего момента $w''(0, \tau)$, максимальные значения которого приведены в таблице 1.

2.2 Изменение момента инерции I поперечного сечения балки

Предполагается, что в статическом состоянии балка опирается на основание узкой стороной прямоугольного сечения, равной $h = 0,18$ м. Тогда при изгибе момент инерции сечения $I_1 = \frac{h B^3}{12}$. В некоторый момент времени $t = 0$ балка внезапно поворачивается на 90° вокруг продольной оси x , при этом основание остаётся неподвижным и направление нагрузки сохраняется. В результате момент инерции сечения внезапно становится равным $I_1 = \frac{B h^3}{12}$, статическое равновесие нарушается и балка приходит в движение (рисунок 5). Соответственно, коэффициент постели принимает значение $K = K_{01} \cdot B$.

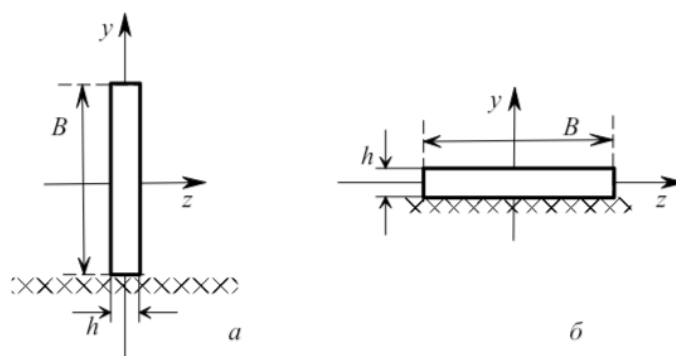


Рисунок 5 – Расположение балки относительно основания при внезапном повороте на 90°
а – статическое, б – динамическое состояние

Расчёт максимальных напряжений в сечениях заделки ($\xi = 0$ или $\xi = 1$)

$$\sigma_{\text{ст max}} = \frac{E I_1}{L} w''_{\text{ст max}}, \quad \sigma_{\text{дин max}} = \frac{E I}{L} w''_{\text{дин max}}$$

показывает снижение максимального напряжения в ходе колебаний по сравнению с исходным статическим состоянием в 1,45 раза, то есть

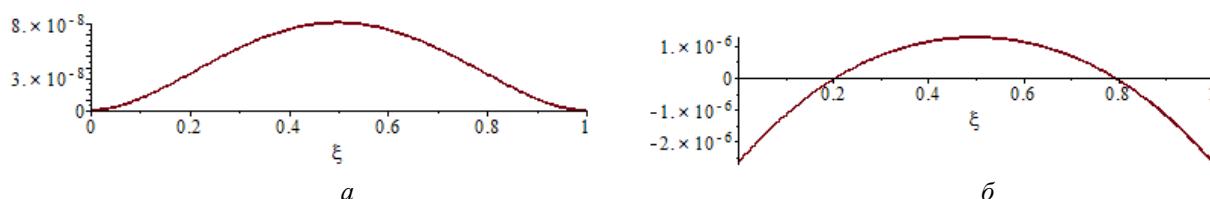
$$\frac{\sigma_{\text{дин max}}}{\sigma_{\text{ст max}}} = 1,45.$$

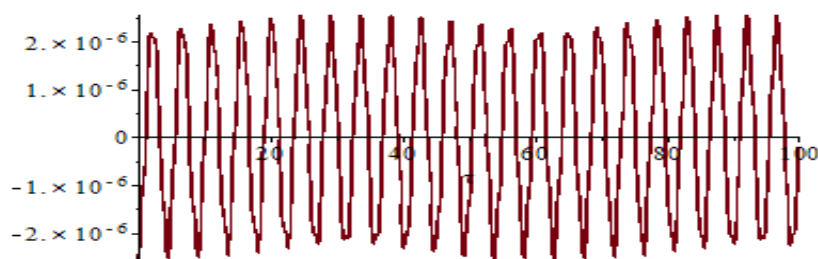
Данные показатели растут с увеличением разницы между шириной и высотой прямоугольного поперечного сечения балки (таблица 2).

Таблица 2 – Коэффициент динамичности при внезапном повороте сечения на 90°

	Коэффициент постели		
	$0,1K$	K	$10K$
$\frac{\sigma_{\text{дин max}}}{\sigma_{\text{ст max}}}$	1,84	1,45	1,13

На рисунке 6 приводятся эпюры статического прогиба и изгибающего момента в балке при положении а (рисунок 5) и развёртка изгибающего момента в заделке ($\xi = 0$ или $\xi = 1$) при положении б (рисунок 5).





6

Рисунок 6 – Эпюры прогиба (а) и изгибающего момента (б) в статическом состоянии и развёртка изгибающего момента (в) в заделке в ходе колебаний

Выводы

1. Внезапное изменение величины модуля упругости материала балки, взаимодействующей с упругим основанием, кардинально изменяет состояние несущей системы. Возникает знакопеременный динамический режим напряженно-деформированного состояния, не предусмотренный проектом, в ходе которого напряжения и деформации могут в несколько раз превышать проектные статические значения.
2. Особо опасные ситуации могут складываться при недостаточно жёстких основаниях.
3. Учёт возможности внезапных изменений механических характеристик материала балки, и, в частности, модуля упругости, необходим для несущих систем, взаимодействующих с агрессивными средами и физическими полями.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гениев, Г.А. Прочность и деформативность железобетонных конструкций при запроектных воздействиях / Г.А. Гениев, В.И. Колчунов, Н.В. Ключева, А.И. Никулин, К.П. Пятикрестовский. Научное издание. – М.: Изд-во АСВ, 2004. – 216с.
2. Travush, V. Mechanical safety and survivability of buildings and building structures under different loading types and impact / V. Travush, S. Emelianov, V. Kolchunov, A. Bulgakov // Procedia Engineering, 2016. – V.164. – P. 416-424.
3. Гордон, В.А. К анализу динамических явлений в стержнях, инициируемых внезапными структурными перестройками / В.А. Гордон // Успехи строительной механики и теории сооружений. Сб. научн. ст. к 75-летию В.В.Петрова. – Саратов: Изд-во СГТУ, 2010. – С.51-57.
4. Травуш, В.И. Динамическое деформирование балки при внезапном структурном изменении упругого основания / В.И. Травуш, В.А. Гордон, В.И. Колчунов, Е.В. Леонтьев // Инженерно-строительный журнал, 2019. – № 7(91). – С. 129-144.
5. Poddubny, A. Dynamic loading of the rod at a sudden change of elastic foundation structure / A. Poddubny, V. Gordon // IOP Conf. Ser: Mater. Sci. Eng. – 2021. – 1079, 042076.
6. Travush, V. Survivability of structural systems of buildings with special effects / V. Travush, N. Fedorova // Magazine of Civil Engineering. – 2018. – 81(5). – P. 73-80.
7. Travush, V. The response of the system «beam - foundation» on sudden changes of boundary conditions // IOP Conf. Ser. Mater. Sci. Eng. – 2018. № 1(456). 012130
8. Poddubny, A. Added stress of a cantilever under sudden alterations in its foundation / A. Poddubny, V. Gordon, N. Bakaeva, P. Morrev // AIP Conference Proceedings of The II Scientific Conference “Modelling and Methods of Structural Analysis”. – 2023. – Vol.2497.
9. Поддубный, А.А. Модель прогрессирующего разрушения системы «балка-основание» / А.А. Поддубный, В.А. Гордон, Г.А. Семенова // Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии. – 2024. – №2(364). – С.3-11.
10. Поддубный, А.А. Динамика конструктивно нелинейной системы «балка-основание» при внезапном образовании трещин / А.А. Поддубный, В.А. Гордон // Вестник Белорусского государственного университета транспорта, 2022. – №1(44). – С.84-87.
11. Колчунов, В.И. Устойчивость железобетонной колонны, подверженной сжатию с кручением в результате особого воздействия / В.И. Колчунов, С.Ю. Савин, М.А. Амелина // Строительство и реконструкция. – 2024. – №2. – С.59-73.
12. Ву, Н.Т. Динамический отклик железобетонного каркаса здания при сценарии удаления колонны / Н.Т. Ву, Н.В. Федорова // Строительство и реконструкция, 2024. – №5. – С.82-94.

13. Петров, В.В. Расчет элементов конструкций, взаимодействующих с агрессивной средой / В.В. Петров, И. Г. Овчинников, Ю. М. Шихов. – Саратов: Изд-во СГУ, 1987. – 288 с.
14. Трещев, А.А. Деформирование цилиндрической оболочки, выполненной из титановых сплавов в условиях газонасыщения / А.А. Трещев, А.В. Прохорова, Д.Г. Ковалев // Известия ТулГУ. Строительные материалы, конструкции и сооружения. – Тула: ТулГУ. – 2003. – Вып.5. – С. 119-123.
15. Овчинников, И.И. Модифицированная модель деформирования и разрушения материала, подвергающегося облучению / И.И. Овчинников // Строительная механика и расчет сооружений. – 2014. – №1. – С. 29–35.
16. Овчинников, И.И. Идентификация и верификация моделей коррозионных и деформационных процессов / И.И. Овчинников, И.Г. Овчинников. – Саратов: Изд-во СГТУ, 2014. – 164 с.
17. Кузнецова, В.О. Моделирование процесса влияния наводороживания на НДС пологой сферической оболочки из титанового сплава / В.О. Кузнецова, А.А. Трещев // Строительство и реконструкция, 2019. – №5(85). – С.48-62.
18. Гордон, В.А. Реакция системы «балка-упругое основание» на внезапное изменение граничных условий / В.А. Гордон, В.И. Колчунов, В.А. Трифонов // Строительство и реконструкция, 2018. – №1(75). – С. 8-21.
19. Цвей, А.Ю. Балки и плиты на упругом основании. Лекции с примерами расчета по спец. курсу строительной механики : учеб. пособие / А.Ю. Цвей. – М.: МАДИ, 2014. – 96 с.
20. Гордон, В.А. Динамическое догружение балки при внезапном повреждении упругого основания / В.А. Гордон, О.В. Филипенко // Междунар. научн. симпозиум «Проблемы прочности, пластичности и устойчивости в механике деформируемого твердого тела», посвященный 85-летию В.Г. Зубчанинова. – Тверь. – 2015. – С.127-132.

REFERENCES

1. Geniev, G.A. Prochnost' i deformativnost' zhelezobetonny'x konstrukcij pri zaproektny'x vozdeystviyax / G.A. Geniev, V.I. Kolchunov, N.V. Klyueva, A.I. Nikulin, K.P. Pyatikrestovskij. Nauchnoe izdanie. – M.: Izd-vo ASV, 2004. – 216s.
2. Travush, V. Mechanical safety and survivability of buildings and building structures under different loading types and impact. *Procedia Engineering*, 2016. – V.164. – P. 416-424.
3. Gordon, V.A. K analizu dinamicheskix yavlenij v sterzhnyax, iniciiruemym'x vnezapnym' strukturnym' perestrojkami. *Uspexi stroitel'noj mexaniki i teorii sooruzhenij*. Sb. nauchn. st. k 75-letiyu V.V.Petrova. – Saratov: Izd-vo SGTU, 2010. – S.51-57.
4. Travush, V.I. Dinamicheskoe deformirovanie balki pri vnezapnom strukturnom izmenenii uprugogo osnovaniya. *Inzhenerno-stroitel'ny'j zhurnal*, 2019. – № 7(91). – S. 129-144.
5. Poddubny, A. Dynamic loading of the rod at a sudden change of elastic foundation structure / A. Poddubny, V. Gordon. *IOP Conf. Ser: Mater. Sci. Eng.* – 2021. – 1079, 042076.
6. Travush, V. Survivability of structural systems of buildings with special effects. *Magazine of Civil Engineering*. – 2018. – 81(5). – P. 73-80.
7. Travush, V. The response of the system «beam - foundation» on sudden changes of boundary conditions. *IOP Conf. Ser. Mater. Sci. Eng.* – 2018. № 1(456). 012130
8. Poddubny, A. Added stress of a cantilever under sudden alterations in its foundation. *AIP Conference Proceedings of The II Scientific Conference “Modelling and Methods of Structural Analysis”*. – 2023. – Vol.2497.
9. Poddubny'j, A.A. Model' progressiruyushhego razrusheniya sistemy' «balka-osnovanie». *Fundamental'ny'e i prikladny'e problemy' tekhniki i tekhnologii*. – 2024. – №2(364). – S.3-11.
10. Poddubny'j, A.A. Dinamika konstruktivno nelinejnoj sistemy' «balka-osnovanie» pri vnezapnom obrazovanii treshhin. *Vestnik Belorusskogo gosudarstvennogo universiteta transporta*, 2022. – №1(44). – S. 84-87.
11. Kolchunov, V.I. Ustoichivost' zhelezobetonnoj kolonny', podverzhennoj szhatiyu s krucheniem v rezul'tate osobogo vozdeystviya. *Stroitel'stvo i rekonstrukciya*. – 2024. – №2. – S.59-73.
12. Vu, N.T. Dinamicheskij otklik zhelezobetonного karkasa zdaniya pri scenarii udaleniya kolonny. *Stroitel'stvo i rekonstrukciya*, 2024. – №5. – S.82-94.
13. Petrov, V.V. Raschet elementov konstrukcij, vzaimodejstvuyushix s agressivnoj sredoj. – Saratov: Izd-vo SGTU, 1987. – 288 s.
14. Treshhev, A.A. Deformirovanie cilindricheskoj obolochki, vy`polnennoj iz titanovy`x splavov v usloviyax gazonasy`shheniya. *Izvestiya TulGU. Stroitel'ny'e materialy, konstrukcii i sooruzheniya*. – Tula: TulGU. – 2003. – Vy`p.5. – S. 119-123.
15. Ovchinnikov, I.I. Modificirovannaya model' deformirovaniya i razrusheniya materiala, podvergayushhegosya oblucheniyu. *Stroitel'naya mexanika i raschet sooruzhenij*. – 2014. – №1. – S. 29–35.
16. Ovchinnikov, I.I. Identifikaciya i verifikaciya modelej korrozionny`x i deformacionny`x processov. Saratov: Izd-vo SGTU, 2014. – 164 s.

17. Kuzneczova, V.O. Modelirovanie processa vliyaniya navodorozhivaniya na NDS pologoj sfericheskoj obolochki iz titanovogo splava. *Stroitel'stvo i rekonstrukciya*, 2019. – №5(85). – S.48-62.
18. Gordon, V.A. Reakciya sistemy` «balka-uprugoe osnovanie» na vnezapnoe izmenenie granichny`x uslovij *Stroitel'stvo i rekonstrukciya*, 2018. – №1(75). – S. 8-21.
19. Czvej, A.Yu. Balki i plity` na uprugom osnovanii. Lekcii s primerami rascheta po specz. kursu stroitel`noj mexaniki : ucheb. posobi– M.: MADI, 2014. – 96 s.
20. Gordon, V.A. Dinamicheskoe dogruzhenie balki pri vnezapnom povrezhdenii uprugogo osnovaniya. *Mezhdunar. nauchn. simpozium «Problemy` prochnosti, plastichnosti i ustojchivosti v mexanike deformiruемого tverdogo tela»*, posvyashhenny`j 85-letiyu V.G. Zubchaninova. – Tver`. – 2015. – S.127-132.

Информация об авторах:

Поддубный Алексей Алексеевич

Белорусский государственный университет транспорта, г. Гомель
Кандидат физико-математических наук, доцент, начальник факультета
246653, г. Гомель, ул. Кирова, 34
E-mail: bsut@bsut.by

Гордон Владимир Александрович

ФГБОУ ВО «ОГУ имени И.С. Тургенева», г. Орёл
Доктор технических наук, профессор, профессор кафедры технической физики и математики
302026, г. Орёл, ул. Комсомольская, д. 95
Тел. +7 (4862) 41-98-48
E-mail: gordon@ostu.ru

Семёнова Галина Александровна

ФГБОУ ВО «ОГУ имени И.С. Тургенева», г. Орёл
Кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры технической физики и математики
302026, г. Орёл, ул. Комсомольская, д. 95
Тел. +7 (4862) 41-98-48
E-mail: greece-g2011@yandex.ru

Information about authors:

Poddubny Alexey A.

Belarusian State University transport, Gomel
Ph.D., Associate Professor of the Department of Physical and Mathematical Sciences, head of faculty
246653, Gomel, st. Kirova, 34
E-mail: bsut@bsut.by

Gordon Vladimir A.

Orel State University
Doctor of technical Sciences, Professor of the Department of technical physics and mathematics
302026, Orel, Komsomolskaya str., 95
Phone: +7 (4862) 41-98-48
E-mail: gordon@ostu.ru

Semenova Galina A.

Orel State University
Ph.D., Associate Professor of the Department of technical physics and mathematics
302026, Orel, Komsomolskaya str., 95
Phone: +7 (4862) 41-98-48
E-mail: greece-g2011@yandex.ru