

А.В. КОРОБКО¹, Н.Г. КАЛАШНИКОВА¹¹Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева, г. Орел, Россия

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ЖЕСТКОСТЬ СЕЧЕНИЙ В ВИДЕ ВЫПУКЛОГО ОДНОСВЯЗНОГО КОНТУРА ПРИ КРУЧЕНИИ

Аннотация. Настоящая статья является обобщением известных решений задачи по определению приведенной геометрической жесткости сечений упругих призматических брусьев с использованием геометрических аргументов: коэффициента формы и отношения конформных радиусов (внутреннего к внешнему). Для всех рассмотренных сечений (правильные многоугольники, эллипсы, прямоугольники, равнобедренные и прямоугольные треугольники) построены аналитические зависимости: приведенная геометрическая жесткость – коэффициент формы и приведенная геометрическая жесткость – отношение конформных радиусов. Для указанных сечений построены также формулы в виде полиномов для определения отношения конформных радиусов. Анализ изменения обоих аргументов при различных геометрических преобразованиях показал, что отношение конформных радиусов обладает аналогичными изопериметрическими свойствами, что и коэффициент формы, и позволяет определить геометрическую жесткость сечений при кручении методом интерполяции.

Ключевые слова: кручение упругих призматических брусьев, приведенная геометрическая жесткость сечений, коэффициент формы сечений, отношение конформных радиусов.

A. V. KOROBKO¹, N.G. KALASHNIKOVA¹¹Oryol State University named after I.S. Turgenev, Oryol, Russia

GEOMETRIC RIGIDITY OF SECTIONS IN THE FORM OF-IN TORSION

Annotation. This article is a generalization of known solutions to the problem of determining the reduced geometric stiffness of sections of elastic prismatic beams using geometric arguments: the shape coefficient and the ratio of conformal radii (internal to external). Analytical dependences are constructed for all considered sections (regular polygons, ellipses, rectangles, isosceles and right triangles): reduced geometric stiffness is the coefficient of shape and reduced geometric stiffness is the ratio of conformal radii. Formulas in the form of polynomials for determining the ratio of conformal radii are also constructed for these sections. An analysis of the changes in both arguments under various geometric transformations showed that the ratio of conformal radii has similar isoperimetric properties as the shape coefficient. This allows to determine the geometric torsional stiffness of the sections by interpolation.

Keywords: torsion of elastic prismatic beams, reduced geometric stiffness of sections, cross-section shape coefficient, ratio of conformal radii.

Введение

Развитие приближенных аналитических методов решения задачи о кручении стержней некруглого поперечного сечения является одной из важных проблем теории упругости и строительной механики. При расчёте элементов строительных и машиностроительных конструкций на кручение в первую очередь определяется их геометрическая жесткость, а затем с её помощью – основные параметры напряжено-деформированного состояния.

Эта задача для некоторых простых сечений (круг, эллипс, прямоугольник, равнобедренный треугольник) в теории упругости [1, 2] решается прямым методом, путём интегрирования соответствующих дифференциальных уравнений.

© Коробко А.В., Калашникова Н.Г., 2024

Для призматических стержней с сечением более сложного вида используются приближенные методы: вариационный метод [3], методы, основанные на различного вида аналогиях (мембранной, гидродинамической и др. [1, 4, 6]), а также численные методы [5, 7-10]. В настоящее время к решению задач о кручении призматических стержней привлекаются геометрические методы – изопериметрический метод (ИЗПМ) [11] и метод интерполяции по коэффициенту формы (МИКФ) [12]. В основу этих методов положены изопериметрические свойства интегральной геометрической характеристики сечений – коэффициента формы, используя которые сложная физическая задача по определению геометрической жесткости сечений сводится к решению элементарной геометрической задачи [11-13]. В этих публикациях показано, что геометрическая жесткость сечений функционально связана с единственным геометрическим аргументом – коэффициентом форм K_f . В монографии [14] при исследовании задач устойчивости пластинок впервые вместо геометрического аргумента K_f использовалось отношение внутреннего конформного радиуса к внешнему \dot{r}/\bar{r} . Этот же аргумент был использован при исследовании задач поперечного изгиба и свободных колебаний пластинок [15, 16]. В статьях [17-20] были рассмотрены задачи с использованием аргумента \dot{r}/\bar{r} при определении приведенной геометрической жесткости различных сечений: сечений в виде правильных фигур, эллипсов, прямоугольников, равнобедренных и прямоугольных треугольников. В настоящей статье приводится обобщение этих решений с анализом некоторых выявленных общих закономерностей.

Материалы и методы

Сечения в виде правильных фигур

В таблице 1 представлены известные значения приведенной геометрической жесткости сечений в виде круга и правильных многоугольников [1, 2, 3], а также отношений внутреннего конформного радиуса к внешнему, полученных по формуле (1), заимствованной из работы [3]:

$$\frac{\dot{r}}{\bar{r}} = \frac{\Gamma(1-1/n)}{2^{1-2/n}\Gamma(1/2)\Gamma(1/2-1/n)} / \frac{\Gamma(1+1/n)}{2^{1+2/n}\Gamma(1/2)\Gamma(1/2+1/n)}, \quad (1)$$

где n – число сторон n -угольника; $\Gamma(x)$ – Гамма функция.

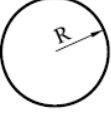
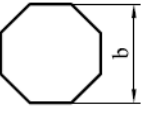
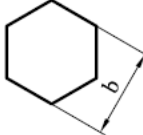
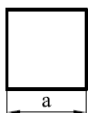
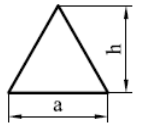
В диссертации А.А. Черняева [4] по этим результатам построена аппроксимирующая функция

$$\dot{r}/\bar{r} = f + bn^{-1} + cn^{-2} + dn^{-3} + en^{-4}, \quad (2)$$

где $f = 0,99997$; $b = 0,013472$; $c = -0,33812$; $d = -1,9499$; $e = -9,7087$.

Погрешность этой функции не превышает 0,01%.

Таблица 1 – Значения приведенной геометрической жесткости сечений в виде правильных фигур i_k и отношений конформных радиусов \dot{r}/\bar{r}

№ п/п	Круг	Восьмиугольник	Шестиугольник	Квадрат	Правильный треугольник
1					
2	$I_k = 0,5\pi R^4$	$I_k = 0,115b^4$	$I_k = 0,108b^4$	$I_k = 0,140a^4$	$I_k = ah^3/30$
3	$i_k = 1/(2\pi)$	$i_k = 0,1568$	$i_k = 0,1533$	$i_k = 0,1406$	$i_k = 0,1155$
4	$\dot{r}/\bar{r} = 1$	$\dot{r}/\bar{r} = 0,9903$	$\dot{r}/\bar{r} = 0,9762$	$\dot{r}/\bar{r} = 0,9139$	$\dot{r}/\bar{r} = 0,7748$

По табличным данным построена аппроксимирующая функция

$$i_k = 0.0498 + 0.1094(\dot{r}/\bar{r})^2. \quad (3)$$

Результаты расчетов по этой функции представлены в столбце 4 таблицы 2, а в столбце 5 приведены отклонения этой функции от известных в теории упругости решений.

Таблица 2 – Анализ геометрической жесткости кручения для сечений в виде круга и правильных многоугольников					Таблица 3 – Анализ геометрической жесткости кручения для сечений в виде эллипса				
Форма области	i_k по [1, 2, 3]	\dot{r}/\bar{r} по (2)	i_k по (3)	Δ , %	a/b	$[i_k]$	\dot{r}/\bar{r}	i_k по (5)	Δ , %
1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
Круг	0,1592	1	0,1592	0	1,0	0,1592	1	0,1592	0
8-угольник	0,1568	0,9903	0,1571	0,19	1,2	0,1565	0,9838	0,1565	0
6-угольник	0,1533	0,9762	0,1540	0,46	1,5	0,1469	0,9245	0,1465	0,27
4-угольник	0,1406	0,9139	0,1412	0,42	2,0	0,1273	0,8080	0,1269	0,31
3-угольник	0,1155	0,7748	0,1155	0	2,5	0,1098	0,7063	0,1097	0,09
					3,0	0,0955	0,6241	0,0959	0,42
					4,0	0,0749	0,5038	0,0756	0,92
					5,0	0,0612	0,4215	0,0617	0,82
					6,0	0,0516	0,3621	0,0517	0,19

Сечения в виде эллипса

В теории упругости и математической физике [2, 3] известно точное решение задачи о кручении стержня с эллиптическим сечением. Геометрическая жесткость такого стержня определяется по формуле

$$I_k = \pi^2 a^2 b^2 / \pi \left(\frac{a^2 + b^2}{ab} \right) = \frac{A^2}{\pi(a/b + b/a)},$$

где a и b – полуоси эллипса,

A – площадь эллипса.

Значения i_k , полученные по формуле (3) приведены в таблице 3 (в столбце 2).

Отношение внутреннего конформного радиуса к внешнему для эллипсов определяется по формуле [3, 4]

$$\frac{\dot{r}}{\bar{r}} = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} q^{n(n+1)} \right\}^{-1} \left\{ 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} \right\}^{-1}, \quad (4)$$

где a и b – полуоси эллипса ($a \geq b$); $q = \left(\frac{a-b}{a+b} \right)^2$.

Численные значения этого отношения приведены в таблице 3 (в столбце 3).

В столбце 4 таблицы 3 представлены результаты подсчета значений i_k для эллиптических сечений по формуле (5), которая получена путем аппроксимации известных точных значений этой величины (столбец 2) линейной зависимостью с использованием аргумента \dot{r}/\bar{r} :

$$i_k = (168,6 \dot{r}/\bar{r} - 9,337) \cdot 10^{-3}. \quad (5)$$

В столбце 3 указаны отклонения этих результатов от точных значений. Как видно, эти отклонения не превосходят одного процента в диапазоне $a/b < 6$.

Сечения в виде прямоугольника

В математической физике [3] известно точное решение для определения геометрической жесткости прямоугольных сечений I_k , представленное двойным тригонометрическим рядом:

$$I_k = \frac{256}{\pi^6} ab \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} \sum_{\ell=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{k^2 \ell^2 (k^2/a^2 + \ell^2/b^2)},$$

где a и b – стороны прямоугольного сечения.

Для приведенной геометрической жесткости это выражение преобразуется к виду:

$$i_k = \frac{256}{\pi^6} \frac{1}{ab} \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} \sum_{\ell=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{k^2 \ell^2 (k^2/a^2 + \ell^2/b^2)}. \quad (6)$$

Решения, полученные по этой формуле для различных прямоугольных сечений, приведены в таблице 4 (столбец 2).

Таблица 4 – Анализ геометрической жесткости кручения прямоугольных сечений

a/b	i_k по (6)	\dot{i}/\bar{r} по (7)	i_k по (8)	Δ , %	a/b	i_k по (6)	\dot{i}/\bar{r} по (7)	i_k по (8)	Δ , %
1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
1,0	0,1406	0,9139	0,1406	0	3,5	0,0781	0,4965	0,0764	2,18
1,2	0,1384	0,8968	0,1379	0,36	4,0	0,0703	0,4498	0,0692	1,56
1,5	0,1307	0,8363	0,1286	0,84	4,5	0,0637	0,4112	0,0632	0,78
2,0	0,1144	0,7222	0,1111	2,88	5,0	0,0583	0,3788	0,0583	0
2,5	0,0998	0,6281	0,0966	3,21	6,0	0,0497	0,3277	0,0504	1,41
3,0	0,0878	0,5544	0,0853	2,85					

В статье [21] авторами предложены формулы для определения внутреннего и внешнего конформных радиусов для прямоугольников. Внутренний конформный радиус определяется по формуле $\dot{r} = \frac{2}{\pi} b (1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2})^{-2}$,

где a и b – стороны прямоугольника ($a \geq b$); $q = e^{-\pi a/b}$.

Для подсчета значений внешнего конформного радиуса, необходимо решить систему разрешающих уравнений Э.Б. Кристоффеля, Г.А. Шварца

$$\begin{cases} \frac{a}{\bar{r}} = \pi \cos^2 \alpha \sum_{k=0}^{\infty} \frac{((2k-1)!!)^2}{2^{2k} (k+1)! k!} \cos^{2k} \alpha; \\ \frac{b}{\bar{r}} = \pi \sin^2 \alpha \sum_{k=0}^{\infty} \frac{((2k-1)!!)^2}{2^{2k} (k+1)! k!} \sin^{2k} \alpha, \end{cases} \quad (7)$$

относительно \bar{r} и α , где α – аргумент комплексных чисел (точек окружности, образами которых при конформном отображении служат вершины прямоугольника, при этом центр прямоугольника совпадает с началом координат, а стороны параллельны координатным осям.

Принято также $(-1)!! = 1$, α – аргумент комплексных чисел (точек окружности, образами которых при конформном отображении служат вершины прямоугольника, при этом центр прямоугольника совпадает с началом координат, а стороны параллельны координатным осям. Принято также $(-1)!! = 1$. Проведя необходимые преобразования, получены численные значения искомого отношения для прямоугольников в диапазоне $1 \leq a/b \leq 6$. С учетом этих результатов в работе [13] построена аппроксимирующая функция для определения отношения \dot{r}/\bar{r} для любых прямоугольников в указанном диапазоне:

$$\dot{r}/\bar{r} = \frac{g+c\lambda+e\lambda^2}{1+b\lambda+d\lambda^2+f\lambda^3}, \quad (8)$$

где $\lambda = a/b$; $g = 0,80307$; $b = -0,76171$; $c = -0,92186$; $d = 0,49197$; $e = 1,243$; $f = 0,49981$. Погрешность этой функции не превышает 0,04%.

При использовании в качестве аргумента отношения конформных радиусов построена аппроксимирующая функция

$$i_k = 0,1538 \cdot \dot{r}/\bar{r}, \quad (9)$$

с помощью которой получены результаты, приведенные в таблице 4 (столбец 4). Эти результаты отличаются от точного решения в пределах (3 – 3,5) % для прямоугольных сечений, удовлетворяющих условию $1 \leq a/b \leq 6$ (столбец 4). Выражение (9) представляет собой прямую пропорциональность i_k от аргумента \dot{r}/\bar{r} .

Сечения в виде треугольников

В статье [15] по известным решениям [3, 5], приводимым в научной литературе для треугольников произвольного вида с углами α и β , построена аппроксимирующая функция

$$\dot{r}/\bar{r} = \frac{a+c \ln \alpha + e \ln \beta + g(\ln \alpha)^2 + i(\ln \beta)^2 + k \ln \alpha \ln \beta}{1+b \ln \alpha + d \ln \beta + f(\ln \alpha)^2 + h(\ln \beta)^2 + j \ln \alpha \ln \beta}, \quad (10)$$

где $a = -0,07119$; $b = -0,18777$; $c = 0,07191$; $d = -0,21962$; $e = 0,026978$; $f = 0,008523$; $g = -0,011417$; $h = 0,013928$; $i = -0,004845$; $j = 0,019253$; $k = -0,0021934$.

Погрешность этой функции не превышает 1,52%.

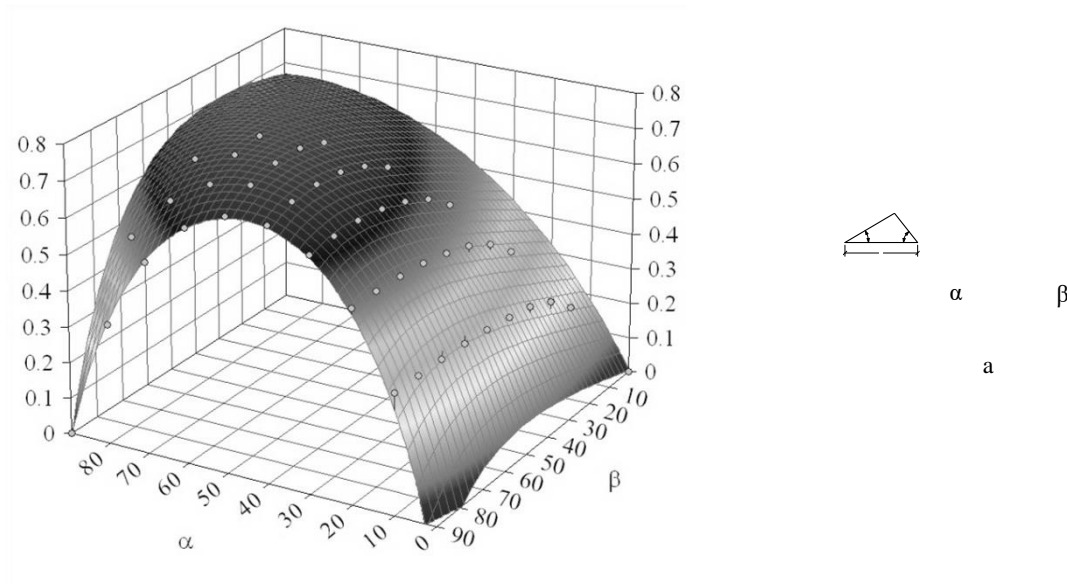


Рисунок 1 – График $\dot{r}/\bar{r} = f(\alpha; \beta)$ для произвольных треугольников

По формуле (9,10) были подсчитаны численные значения отношений \dot{r}/\bar{r} для равнобедренных и прямоугольных треугольников, используя которые были построены аппроксимирующие функции (рис. 1):

– для равнобедренных треугольников

$$\dot{r}/\bar{r} = \frac{a+c\alpha+e\alpha^2+g\alpha^3}{1+b\alpha+d\alpha^2+f\alpha^3+h\alpha^4}, \quad (11)$$

где α – угол при основании треугольника.

В формуле (10) $a = 4,88537 \cdot 10^{-6}$; $b = -0,0128669$; $c = 0,0222194$; $d = -4,94719 \cdot 10^{-5}$; $e = -0,000455718$; $f = 1,13874 \cdot 10^{-6}$; $g = 2,32039 \cdot 10^{-6}$; $h = -3,53318 \cdot 10^{-9}$;

– для прямоугольных треугольников (рис. 2)

$$\dot{r}/\bar{r} = a + b\alpha + c\alpha^2 + d\alpha^3 + e\alpha^4 + f\alpha^5 + g\alpha^6 + h\alpha^7 + i\alpha^8, \quad (12)$$

где $a = 7,0481 \cdot 10^{-6}$; $b = 0,044093$; $c = -0,0016091$; $d = 8,0776 \cdot 10^{-5}$; $e = -4,2632 \cdot 10^{-6}$; $f = 1,5714 \cdot 10^{-7}$; $g = -3,552 \cdot 10^{-9}$; $h = 4,3955 \cdot 10^{-11}$; $i = -2,2763 \cdot 10^{-13}$. Погрешность функций (11) и (12) не превышает 0,09%.

По данным, полученным для сечений в виде равнобедренных и прямоугольных треугольников, построена аппроксимирующая функция

$$i_k = (154,8 \cdot \dot{r}/\bar{r} - 4,3) \cdot 10^{-3}. \quad (13)$$

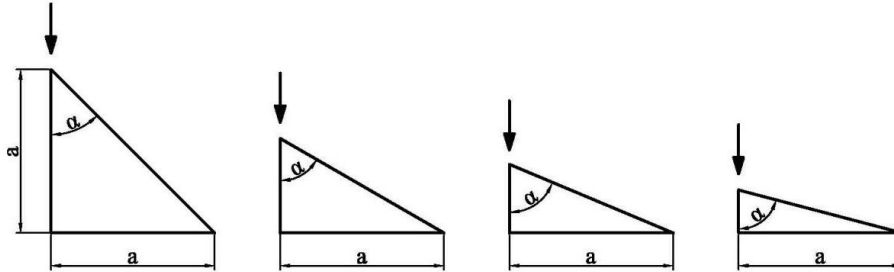


Рисунок 2 – Аффинное сжатие прямоугольного треугольника

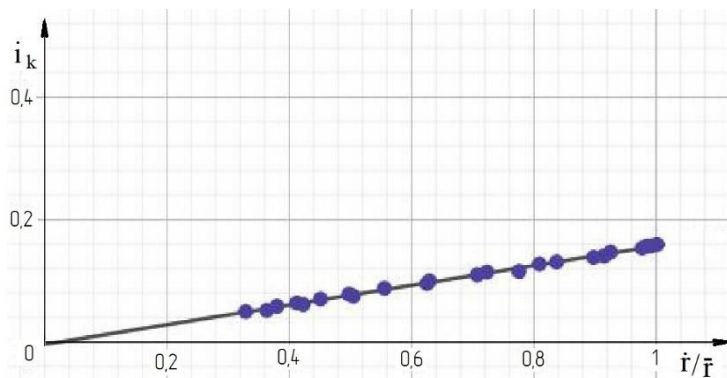


Рисунок 3 – График зависимости геометрической жесткости сечений от отношения конформных радиусов

Проведем анализ полученных выше сведений. Для сечений в виде круга, правильных многоугольников, эллипсов, прямоугольников, равнобедренных и прямоугольных треугольников получены формулы в виде полиномов для подсчета аргумента \dot{r}/\bar{r} (формулы (1), (2), (4), (5), (7), (8), (10), (11), (12)). Для сечений в виде рассматриваемых фигур получены элементарные формулы для подсчета значений приведенной геометрической жесткости кручения (формулы (3), (6), (9), (14)). Последние три формулы являются линейными функциями аргумента \dot{r}/\bar{r} , что существенно упрощает их использования при практических расчетах.

Графический анализ полученных зависимостей и табличных данных показал, что область распределения значений i_k очень узкая, практически вырождается в прямую линию (рис. 3) с погрешностью не более 4,2%

$$i_k = (160,9847050491 \dot{r}/\bar{r} - 3,8437928058) \cdot 10^{-3} \quad (14)$$

Выводы

1. Всё множество сечений, ограниченное односвязным выпуклым контуром, обладает изопериметрическими свойствами:
 - из всех значений аргумента \dot{r}/\bar{r} наибольшее $\dot{r}/\bar{r} = 1$ принадлежит кругу;
 - всё множество значений аргумента \dot{r}/\bar{r} для фигур с выпуклым контуром ограничено с двух сторон: верхнюю границу образуют правильные фигуры и равнобедренные треугольники, нижнюю границу – эллипсы;

– всё множество значений аргумента \dot{r}/\bar{r} для четырехугольников с выпуклым контуром ограничено снизу значениями \dot{r}/\bar{r} для прямоугольников; максимальное значение $\dot{r}/\bar{r} = 0,1593$ принадлежит квадрату;

– всё множество значений аргумента \dot{r}/\bar{r} для треугольников ограничено снизу значениями \dot{r}/\bar{r} для равнобедренных треугольников; максимальное значение \dot{r}/\bar{r} принадлежит равностороннему треугольнику.

2. С учётом установленной в этой статье взаимосвязи $i_k - \dot{r}/\bar{r}$ можно записать:

– из всех значений i_k для множества сечений с выпуклым контуром наибольшее значение $i_k = 0,1592$ принадлежит круглому сечению;

– всё множество значений i_k для сечений в виде фигур с выпуклым контуром ограничено с двух сторон: верхнюю границу образуют сечения в виде правильных фигур и равнобедренных треугольников и, а нижнюю границу – сечения в виде эллипсов;

– всё множество значений i_k для сечений в виде четырехугольников с выпуклым контуром ограничено снизу значениями i_k для сечений в виде прямоугольников; максимальное значение i_k принадлежит квадратному сечению;

– всё множество значений i_k для сечений в виде треугольников ограничено снизу значениями i_k для сечений в виде равнобедренных треугольников; максимальное значение i_k принадлежит сечению в виде равностороннего треугольника.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Арутюнян Н.Х., Абрамян В.Л. Кручение упругих тел. – М.: Физматгиз, 1963. – 686 с.
2. Справочник по теории упругости: для инженеров-строителей / Под редакцией П.М. Варвака и А.Ф. Рябова. – Киев: Будівельник, 1971. – 418 с.
3. Лейбензон, Л.С. Собрание трудов. Т. 1. – М.: Издательство АН СССР, 1951. – 468 с.
4. Евстифеев В.В., Теперин Л.Л., Теперин Л.Л. Использование гидродинамической аналогии для определения геометрической жесткости и центра изгиба призматических стержней // ТВФ. Т. LXXXV, 2011. – №1. – С. 18-24.
5. Казарина М.В., Уськов В.И., Чедрик А.В., Чедрик В.В. О численных методах для решения задач кручения призматических стержней произвольного вида // Сб, трудов XI Всероссийского съезда по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. – Томск, 2015. – С 1667-1670.
6. Chen T. Torsion of a rectangular and the analogy between rectangular and curvilinear // Quart J. Mech. and Apple Math., 2001. – № 2. – Vol. 54. – P. 227-241.
7. Warg C.Y. Torsion of angle bar. // Mech. Struck, and Mach. 24. – 1996. – №3. – P. 283-294.
8. Зонов, Д.В. Приближенное решение задач кручения призматических стержней с треугольным поперечным сечением при больших деформациях. // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки, 1998. – № 4. – С. 56-60.
9. Gong L. et al. A new approach to the calculation of variable tangent bending stiffness for helical strands // Ocean Engineering. 2024. Vol. 311. P. 118991.
10. Zhao P. et al. A novel calculation method for torsional stiffness of flange-spigot structure in aeroengine rotors // Tribol Int. 2024. Vol. 195. P. 109601.
11. Коробко В.И. Изопериметрический метод в строительной механике: Теоретические основы изопериметрического метода. – М.: АСВ, 1997. – 390 с.
12. Коробко А.В. Геометрическое моделирование формой области в двумерных задачах теории упругости. – М.: АСВ, 1999. – 302 с.
13. Korobko V.I. Korobko A.V., Savin S.Yu., Chernyaev A.A. Isoperimetric Properties of the Torsion Rigidity of Convex Section. // Proc. Eng. 2016. – 150. – P. 1648-1656.
14. Коробко В.И., Хусточкин А.Н. Изопериметрический метод в задачах устойчивости пластинок. – Ростов-на-Дону: Северо-Кавказский научный центр высшей школы, 1994. – 142 с.
15. Черняев А.А. Развитие метода интерполяции по отношению конформных радиусов для решения задач поперечного изгиба пластинок: дисс. канд. технических наук: 05.23.17 / Черняев А.А. – Орел. – 2013. – 211 с.
16. Черняев А.А. Динамический расчет правильных n-угольных, треугольных и ромбических шарнирно опертых пластинок с использованием отношения конформных радиусов в качестве геометрического аргумента // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений, 2012. – № 2. – С. 63-71.
17. Коробко А.В., Калашникова Н.Г. Зависимость геометрической жесткости кручения прямоугольных

сечений от их коэффициента формы и отношения конформных радиусов // Строительная механика инженерных конструкций, 2020. – №3. – С. 14-19.

18. Коробко А.В., Черняев А.А., Лыгина Ю.Е. Определение жесткости кручения стержней с эллиптическим сечением способом геометрического моделирования // Строительство и реконструкция, 2019. – № 2. – С. 35-42.

19. Korobko V.I., Korobko A.V., Lygina Yu.E. Interrelation of rigidity of triangular cross-sections under bar torsion with conformal radii relation // International Conferens on Constructhion, Arehitecture and Technosphere Safety // Materials Science and Engineering. 687(2019)033005 doi:10.1088/1757-899X/687/3/33005.

20. Поля Г., Сеге Г. Изопериметрические неравенства в математической физике – М.: КомКнига, 2006. – 336 с.

21. Казанцев В.П., Золотов О.А., Долгополова М.В. Электростатика на плоскости. Нормировка потенциала. Емкости уединенного проводника и линии относительно точки. Конформные радиусы // Вестник КрасГУ. Физико-математические науки. – 2005. – №1. – С. 32-38.

REFERENCES

1. Harutyunyan, N.H., Abrahamyan, V.L. Torsion of elastic bodies. – М.: Fizmatgiz, 1963. – 686 p.
2. Handbook of Elasticity Theory: for civil engineers. Edited by P.M. Varvak and A.F. Ryabov. – Kiev: Budivelnik, 1971. – 418 p.
3. Leibenzon, L.S. Collected works. Vol. 1. – М.: Publishing House of the USSR Academy of Sciences, 1951. – 468 p.
4. Evstifeev, V.V., Teperin, L.L., Teperin, L.L. The use of hydrodynamic analogy to determine the geometric stiffness and bending center of prismatic rods. *TVF. T. LXXXV*, 2011. – Vol. 1. – pp. 18-24. (In Russ.)
5. Kazarina, M.V., Uskov, V.I., Chedrik, A.V., Chedrik, V.V. On numerical methods for solving problems of turning prismatic rods of arbitrary type[Sb, proceedings of the XI All-Russian Congress on Fundamental Problems of Theoretical and Applied Mechanics. Tomsk], 2015. – From 1667-1670.
6. Chen, T. Torsion of a rectangular and the analogy between rectangular and curvilinear. *Quart J. Mech. and Apple Math.*, 2001. –Vol. 54. – pp. 227-241.
7. Warg, C.Y. Torsion of angle bar. *Mech. Struck, and Mach.* 24. – 1996. – Vol.3. – Pp. 283-294.
8. Zonov, D.V. Approximate solution of torsion problems of prismatic rods with triangular cross-section under large deformations. *Izvestiya vuzov. The North Caucasus region. Natural Sciences*, 1998. – Vol. 4. – pp. 56-60. (In Russ.)
9. Gong L. et al. A new approach to the calculation of variable tangent bending stiffness for helical strands. *Ocean Engineering*. 2024. Vol. 311. P. 118991.
10. Zhao P. et al. A novel calculation method for torsional stiffness of flange-spigot structure in aeroengine rotors *Tribol Int.* 2024. Vol. 195. P. 109601.
11. Korobko, V.I. Isoperimetric method in structural mechanics: Theoretical foundations of the isoperimetric method. – М.: DIA, 1997. – 390 p. (In Russ.)
12. Korobko, A.V. Geometric modeling of the shape of the domain in two-dimensional problems of the theory of elasticity. – М.: DIA, 1999. – 302 p. (In Russ.)
13. Korobko, V.I. Korobko A.V., Savin, S.Yu., Chernyaev, A.A. Isoperimetric Properties of the Torsion Rigidity of Convex Section. *Proc. Ing.* 2016. – Vol.150. – P. 1648-1656. (In Russ.)
14. Korobko, V.I., Khustochkin, A.N. Isoperimetric a method in problems of plate stability. – Rostov-on-Don: North Caucasian Scientific Center of Higher Education, 1994. – 142 p.
15. Chernyaev, A.A. Development of the interpolation method with respect to conformal radii for solving problems of transverse bending of plates: diss. candidate of Technical Sciences: 05.23.17. Chernyaev A.A. – Orel. – 2013. – 211 p.
16. Chernyaev, A.A. Dynamic calculation of regular n-angular, triangular and rhombic hinged plates using the ratio of conformal radii as a geometric argument. *Construction mechanics of engineering structures and structures*, 2012. – Vol. 2. – pp. 63-71. (In Russ.)
17. Korobko, A.V., Kalashnikova, N.G. Dependence of the geometric torsion stiffness of rectangular sections on their shape coefficient and the ratio of conformal radii. *Construction Mechanics of engineering structures*, 2020. – Vol. 3. – Pp. 14-19. (In Russ.)
18. Korobko, A.V., Chernyaev, A.A., Lygina, Yu.E. Determination of torsional stiffness of rods with elliptical cross-section by geometric modeling. *Construction and Reconstruction*, 2019. – Vol. 2. – pp. 35-42. (In Russ.)
19. Korobko, V.I., Korobko, A.V., Lygina, Yu.E. Interpretation of rigidity of triangular cross-sections under bar torsion with conformal radii relation. [International Conferences on Constructhion, Architecture and Technosphere Safety. Materials Science and Engineering.] 687(2019)033005 doi:10.1088/1757-899X/687/3/33005. (In Russ.)
20. Polia, G., Sege, G. Isoperimetric inequalities in mathematical physics – М.: KomKniga, 2006. – 336 p. 19. Kazantsev, V.P., Zolotov, O.A., Dolgoplova, M.V. Electrostatics on a plane. Normalization of potential. The capacitances of the solitary conductor and the line relative to the point. Conformal radii. [Bulletin of Krasgu. Physical and mathematical sciences]. – 2005. – Vol. 1. – pp. 32-38.
21. Kazantsev, V.P., Zolotov, O.A., Dolgoplova, M.V. Electrostatics on a plane. Potential normalization. Capacitances of a solitary conductor and a line with respect to a point. Conformal radii. *Vestnik KrasSU. Physico-mathematical sciences*. 2005. №1. Pp. 32-38.

Информация об авторах:

Коробко Андрей Викторович

ФГБОУ «Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева», г. Орел, Россия
доктор технических наук, профессор, профессор кафедры мехатроники, механики и робототехники
E-mail: ankor.66@mail.ru

Калашникова Наталья Григорьевна

ФГБОУ «Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева», г. Орел, Россия
кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры мехатроники, механики и робототехники
E-mail: naka.61@mail.ru

Information about authors:

Korobko Andrey V.

Oryol state University named after I.S. Turgenev, Orel, Russia,
Doctor of Technical Sciences, Professor, Professor of the Department of Mechatronics, Mechanics and Robotics
E-mail: ankor.66@mail.ru

Kalashnikova Nataley G.

Oryol state University named after I.S. Turgenev, Orel, Russia,
Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Associate Professor of the Department of Mechatronics, Mechanics and Robotics
E-mail: naka.61@mail.ru