

В.И. КОЛЧУНОВ<sup>1</sup>, С.Ю. САВИН<sup>1</sup>, М.А. АМЕЛИНА<sup>1</sup>

<sup>1</sup>ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет»,  
г. Москва, Россия

## УСТОЙЧИВОСТЬ ЖЕЛЕЗОБЕТОННОЙ КОЛОННЫ, ПОДВЕРЖЕННОЙ СЖАТИЮ С КРУЧЕНИЕМ В РЕЗУЛЬТАТЕ ОСОБОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ

**Аннотация.** При аварийных ситуациях, связанных с внезапными отказами отдельных несущих элементов конструктивных систем зданий, в силу особенностей объемно-планировочных решений в отдельных колоннах могут дополнительно возникать крутящие моменты. Таким образом, колонны могут оказаться в условиях сложного напряженно-деформированного состояния. Целью данного исследования являлось построение полуаналитической расчетной модели для анализа устойчивости железобетонных колонн, подверженных сжатию с кручением в результате особого воздействия. Для достижения поставленной цели были сформулированы исходные гипотезы, составлены определяющие соотношения для расчета устойчивости железобетонной колонны, подверженной сжатию с кручением. Для обоснования достоверности предложенной модели была выполнена ее валидация путем сопоставления с результатами моделирования в программном комплексе Ansys. Анализ данных показал, наибольшая разница между результатами составила 8.08% для случая  $P = 0.4 \cdot P_{cr,e} = 126.6$  кН. Наименьшая разница 3.6% составила для случая  $P = 0.9 \cdot P_{cr,e} = 284.85$  кН. Показано, что по мере роста крутящего момента происходит снижение значения критической силы, вызывающей потерю устойчивости. Это связано как с действием крутящей пары сил при искривлении стержня, так и со снижением механических характеристик бетона при совместном действии нормальных и касательных напряжений.

**Ключевые слова:** устойчивость, сжатие, кручение, железобетон, колонна, особое воздействие

V.I. KOLCHUNOV<sup>1</sup>, S.Y. SAVIN<sup>1</sup>, M.A. AMELINA<sup>1</sup>

<sup>1</sup>National Research Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russia

## STABILITY OF A REINFORCED CONCRETE COLUMN UNDER COMPRESSION WITH TORSION CAUSED BY ACCIDENTAL ACTION

**Abstract.** Under emergency situations associated with sudden failures of the load-bearing elements of the structure, torques may additionally occur in the columns due to the specifics of the structural design of the buildings. Thus, the columns may be in a complex stress-strain state. The objective of this study was to develop a semi-analytical design model for analysis of the stability of reinforced concrete columns subjected to compression with torsion as a result of an accidental action. For achieving the objective, authors formulated the initial hypotheses, developed the determining equations for calculating the stability of a reinforced concrete column subjected to compression with torsion. To validate the reliability of the proposed model, it has been compared with the results of modeling in the software complex Ansys. Analysis of the data showed that the largest difference between the results was up to 8.08% for the case  $P = 0.4 \cdot P_{cr,e} = 126.6$  kN. The smallest difference of 3.6% was for the case  $P = 0.9 \cdot P_{cr,e} = 284.85$  kN. It has been shown that as the torque increases, there is a decrease in the value of the critical force causing loss of stability. This is due both to the action of the torsional pair of forces during the distortion of the rod and to the decrease in the mechanical properties of concrete under the combined action of normal and tangential stresses.

**Keywords:** stability, compression, torsion, reinforced concrete, column, accidental action

### **Введение**

При аварийных ситуациях, связанных с внезапными отказами отдельных несущих элементов конструктивных систем зданий, в силу особенностей объемно-планировочных решений в отдельных колоннах могут дополнительно возникать крутящие моменты. Таким образом, колонны могут оказаться в условиях сложного напряженно-деформированного состояния, в результате чего исходные предпосылки и допущения, используемые для расчета в рамках нелинейной деформационной модели, построенной на использовании диаграмм для одноосного напряженно-деформированного состояния, могут приводить к завышению несущей способности конструкций, а следовательно – снижать уровень механической безопасности конструктивной системы здания или сооружения запроектированных на основе традиционных подходов к расчетному обоснованию.

В результате аварийного воздействия могут реализоваться специфические механизмы сопротивления конструкций, либо могут быть превышены допустимые границы использования упрощенных моделей сопротивления. В связи с этим требуют более глубокого обоснования модели и критерии, используемые при оценке несущей способности отдельных конструкций и живучести сооружения в целом. В частности, при аварийной ситуации допускается переход конструкций перекрытий к механизму сопротивления по типу висячей системы. Рассматривая причины и механизм разрушения Всемирного торгового центра, Bazant et al. [1] отмечали, что начальные механические повреждения от столкновения самолета с сооружением, а также последовавший за этим пожар привели к тому, что перекрытия перешли к вантовому механизму сопротивления. В результате этого перекрытия потянули за собой колонны, что привело к потере их устойчивости. Pham et al. [2] была исследована модель двухпролетной железобетонной рамы на внезапное удаление колонны среднего ряда с переходом ригелей к сопротивлению по типу висячей системы. По результатам испытаний был отмечен разрыв верхней арматуры в опорных сечениях у крайних колонн и нижней арматуры в опорных сечениях у средней колонны, для которой моделировалось внезапное выключение. Также было отмечено разрушение бетона сжатой зоны в колонне крайнего ряда в уровне примыкания к ней ригеля. Это было обусловлено изменением эффективной расчетной длины колонны и дополнительным поперечным воздействием от ригеля после его перехода к работе по типу висячей системы. Таким образом, фундаментальные вопросы, связанные с потерей устойчивости стержней и стержневых систем становятся всё более актуальными в связи с необходимостью обеспечения механической безопасности и живучести конструктивных систем при особых воздействиях.

Устойчивость стержневых элементов в геометрически нелинейной постановке при действии крутящих моментов рассмотрена в работах Лалина В.В. и др. [3]. Исследования, посвященные устойчивости и деформированию стержневых железобетонных конструкций, были проведены В.М. Бондаренко [4], В.С. Фёдоровым [5], Р.С. Санжаровским [6] и др. В работах А.Ю. Солдатов [7] был рассмотрен вопрос об устойчивости железобетонных стержневых конструкций с учётом физической нелинейности. Автором был разработан специальный алгоритм с применением метода конечных элементов, учитывающий внецентренное сжатие, а также ползучесть бетона. В работах В.В. Улитина [8] был проведён анализ устойчивости составных стержней с учетом физической нелинейности материала. Мануйловым, Косицыным и Бегичевым [9] выполнен анализ критериев устойчивости стержневых элементов из упругопластического материала. Р.С. Санжаровский и А.Д. Беглов [10] подробно изучили нелинейную теорию расчёта стержневых железобетонных конструкций на устойчивость при кратковременных и длительных нагрузках. Были проведены аналитические исследования и численные эксперименты, которые позволяют оценить влияние различных видов нелинейности на прочность и устойчивость железобетонных конструкций. А.Г. Тамразяном [11] проведено исследование механизма исчерпания несущей способности сжатых и внецентренно сжатых железобетонных

элементов. Отмечается, что в ряде случаев потеря устойчивости может быть причиной разрушения как центрально, так и внецентренно сжатых элементов с малыми эксцентриситетами. В статье [12] представлены экспериментальные данные и результаты численного исследования устойчивости железобетонной рамы при внезапном отказе угловой колонны. В качестве критерия потери устойчивости использован критерий отпорности.

Уместно заметить, что в рассмотренных выше работах не учитывалось влияние на устойчивость факторов сложного напряженно-деформированного состояния при сжатии с кручением. Сопротивление железобетонных несущих элементов рамных каркасов зданий при сложном напряженно-деформированном состоянии, вызванном изгибом с кручением, было исследовано в работах Колчунова Вл.И. и др. [13-15]. Авторами построена пространственная поверхность деформаций путем аппроксимации расчетного сечения малыми квадратами. Рассматривается деформационный эффект депланации берегов трещины, описываемый двухконсольным элементом механики разрушения [16]. Принятые гипотезы и построенные на их основе модели были верифицированы авторами путем проведения экспериментальных исследований для балок как из обычного, так и высокопрочного бетона. В результате экспериментального и численного моделирования выявлена особенность трещинообразования в балках из высокопрочного бетона, состоящая в образовании единичной трещины перед разрушением.

Lei et al. [17] выполнили экспериментальные исследования и мезомасштабное численное моделирование влияния размерного эффекта и различного процента поперечного армирования балок из базальтофибробетона на их сопротивление изгибу с учетом действия крутящих моментов. Авторами подтверждено влияние размерного эффекта на несущую способность балок из базальтофибробетона. Также установлено, что с увеличением процента поперечного армирования балок возрастали значения усилий, при которых в элементе образовывались трещины. За счет этого создавалось дополнительное обжатие базальтофибробетона в центральной части сечения. Это в свою очередь приводило к повышению прочности бетона центральной части сечения в условиях трехосного напряженно деформированного состояния.

Схожими с авариями воздействиями при отказе одного из несущих элементов/конструкций по характеру отклика конструктивной системы являются сейсмические воздействия. В работе Deng et al. [18] представлена расчетная модель и результаты экспериментального исследования силового сопротивления железобетонной колонны, подверженной внецентренному сжатию с кручением в результате сейсмического воздействия. Предложенная Deng et al. модель учитывает образование пространственной трещины по спиральной поверхности. Основной эффект от действия крутящего момента, выявленный в экспериментальных исследованиях и численном моделировании состоял в снижении механических характеристик бетона и продольной арматуры.

Chen et al. [19] на основании результатов эксперимента отмечают ухудшение сопротивления железобетонных колонн сейсмическим воздействиям по мере увеличения отношения крутящего момента к изгибающему. При этом диссипация энергии воздействия улучшалась по мере роста продольной силы в колонне. Подобное исследование для модели стеклофибробетонной опоры моста, выполнено Selmy & El-Salakawi [20]. Показано, что при комбинированном действии продольной силы, изгибающих и крутящих моментов крутильная жесткость падает быстрее, чем изгибная, по мере увеличения перемещений/углов закручивания.

На основании представленного краткого обзора состояния исследований можно сделать вывод о том, что до настоящего времени в проводимых исследованиях устойчивости железобетонных конструкций при особых воздействиях не учитывались сложнапряженные состояния, в частности, такие как внецентренное сжатие с кручением.

Поэтому, вопросы, связанные с конструктивной безопасностью железобетонных систем в данном направлении исследования остаётся не полностью раскрытым.

В связи с этим целью данного исследования являлось построение полуаналитической расчетной модели для анализа устойчивости железобетонных колонн, подверженных сжатию с кручением в результате особого воздействия. Для достижения поставленной цели были сформулированы исходные гипотезы, составлены определяющие соотношения для расчета устойчивости железобетонной колонны, подверженной сжатию с кручением. Для обоснования достоверности предложенной модели была выполнена ее валидация путем сопоставления с результатами моделирования в программном комплексе Ansys.

### Модели и методы исследования

#### Исходные предпосылки и допущения

Рассматривается железобетонная колонна, подверженная сжатию с кручением (рис. 1) в результате особого воздействия, вызванной внезапным отказом одного из несущих элементов.



Рисунок 1 – Расчетная схема колонны при действии продольной силы и крутящего момента

В рамках данного исследования приняты следующие исходные допущения и предпосылки.

1) Собственный вес конструкции колонны не учитывается. Это позволяет не учитывать силы инерции в самой колонне при структурной перестройке несущей системы здания, а силы инерции от деформирования конструктивной системы заменить статическим эквивалентом.

2) Параметры эквивалентного воздействия устанавливаются на энергетической основе [21]. В первом приближении предполагается, что коэффициент динамичности к статической нагрузке на колонну составляет 1.3, что близко к верхней границе диапазона согласно исследованиям Алмазова, Расторгуева, Плотникова [22,23] и является более консервативным значением, чем установленное значение 1.25 в экспериментальных исследованиях полномасштабной модели каркаса с

плоскими перекрытиями, выполненных Adam et al. [24].

3) Потеря устойчивости рассматривается с позиции смены формы равновесия упругопластического стержневого элемента (бифуркационный критерий).

4) Рассматривается железобетонный элемент без трещин до момента потери устойчивости.

5) Предполагается, что влияние стесненной деформации на характер распределения нормальных напряжений подчинено принципу Сен-Венана, т.е. ограничивается припорным участком, равным наименьшему размеру поперечного сечения элемента. Следовательно, можно пренебречь влиянием стесненной деформации на удалении от закреплений вплоть до момента потери устойчивости;

6) Разрушение бетона определяется критерием прочности при трехосном напряженно-деформированном состоянии, принятым по теории пластичности бетона и железобетона Г.А. Гениева [25]:

$$\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - (\sigma_x \cdot \sigma_y + \sigma_y \cdot \sigma_z + \sigma_z \cdot \sigma_x) + 3 \cdot (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) - (R_b - R_{bt}) \cdot (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \leq R_b \cdot R_{bt}. \quad (1)$$

При этом применительно к рассматриваемой железобетонной колонне, подверженной сжатию с кручением, будет справедлива гипотеза о ненадавливании, из которой следует  $\sigma_y =$

$\sigma_z = 0$ . Данная гипотеза нарушается лишь в сечениях с хомутами за счет стесненного деформирования, локально повышающего прочность бетона, однако не оказывает существенного влияния на несущую способность. Также предполагается отсутствие поперечных сил  $Q_z$ ,  $Q_y$  и связанных с ними касательных напряжений  $\tau_{yz}$ ,  $\tau_{zy}$  вплоть до момента выпучивания колонны. С учетом этого критерий прочности может быть представлен в виде:

$$\begin{cases} R_{b,\sigma_x} = \frac{R_b - R_{bt}}{2} + \sqrt{\frac{(R_b - R_{bt})^2}{4} - 3 \cdot (\tau_{xy}^2 + \tau_{zx}^2) + R_b \cdot R_{bt}}, \\ R_{b,\tau_{xy}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{R_b \cdot R_{bt} + (R_b - R_{bt}) \cdot \sigma_x - \sigma_x^2 - 3 \cdot \tau_{zx}^2}, \\ R_{b,\tau_{xz}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{R_b \cdot R_{bt} + (R_b - R_{bt}) \cdot \sigma_x - \sigma_x^2 - 3 \cdot \tau_{xy}^2}. \end{cases} \quad (2)$$

Тогда физические соотношения для связи напряжений, деформаций и относительных углов закручивания будут представлены в виде:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= E_{c1} \cdot \frac{k \cdot \varepsilon \cdot \varepsilon_{c1} - \varepsilon^2}{\varepsilon_{c1} + (k - 2) \cdot \varepsilon}, \\ \tau_{xy} &= -\frac{E_{c1} \cdot \theta}{2 \cdot (1 + \nu)} \cdot \frac{k \cdot \varepsilon_{c1} - \varepsilon}{\varepsilon_{c1} + (k - 2) \cdot \varepsilon} \cdot \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} + z \right), \\ \tau_{xz} &= \frac{E_{c1} \cdot \theta}{2 \cdot (1 + \nu)} \cdot \frac{k \cdot \varepsilon_{c1} - \varepsilon}{\varepsilon_{c1} + (k - 2) \cdot \varepsilon} \cdot \left( \frac{\partial \psi}{\partial z} - y \right). \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь  $\theta = \frac{d\varphi}{dx}$  – относительный угол закручивания по длине элемента,  $\psi$  – функция депланации сечения при  $\theta = 1$ ;  $E_{c1}$  – модуль деформации бетона при напряжениях, равных пределу прочности на сжатие;  $\varepsilon_{c1}$  – относительная деформация, соответствующая пределу прочности на сжатие;  $k = E_{ci}/E_{c1}$  – коэффициент, равный отношению начального модуля упругости к модулю деформации при напряжениях, равных пределу прочности на сжатие. При этом  $E_{c1}$ ,  $\varepsilon_{c1}$ ,  $k$  являются функциями фактической прочности  $R_{b,\sigma_x}$  в условиях сложного напряженного состояния – сжатия с кручением. В первом приближении приняты линейные аппроксимации связи  $E_{c1} - R_{b,\sigma_x}$ ,  $\varepsilon_{c1} - R_{b,\sigma_x}$ ,  $k - R_{b,\sigma_x}$  на основе данных Model Code 2010 [26] (рисунок 2):

$$\begin{aligned} E_{c1} &= 10^9 \cdot (0.2869 \cdot R_{b,\sigma_x} + 8.171), \\ \varepsilon_{c1} &= 10^{-3} \cdot (0.0104 \cdot R_{b,\sigma_x} + 1.912), \\ k &= -0.011 \cdot R_{b,\sigma_x} + 2.366. \end{aligned} \quad (4)$$

Введем функцию напряжений  $\Phi$ , для которой выполняются следующие условия:

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial \Phi}{\partial z}, \quad \tau_{xz} = \frac{\partial \Phi}{\partial y}. \quad (5)$$

Будем искать функцию напряжений для прямоугольного сечения в следующей форме:

$$\Phi = A \left( z^2 - \frac{b^2}{4} \right) \left( y^2 - \frac{h^2}{4} \right). \quad (6)$$

Поскольку рассматриваемое прямоугольное сечение является односвязной областью, функция напряжений должна удовлетворять граничным условиям на контуре:  $\Phi_{contour} = 0$ .

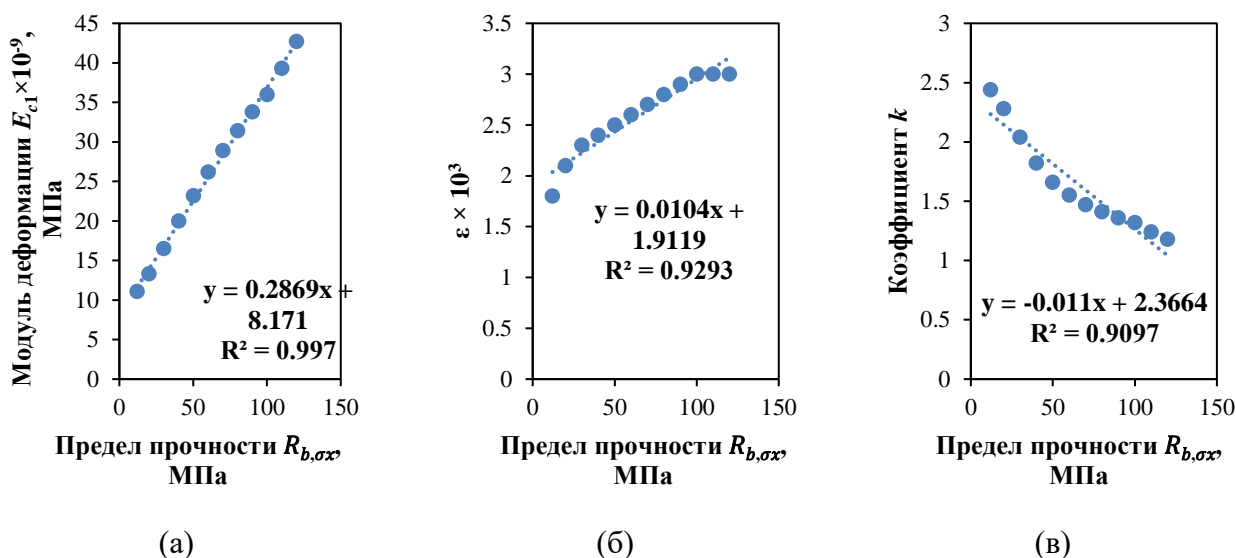


Рисунок 2 – Аппроксимация параметров выражения связи напряжений и деформаций

Подставляя (5) в дифференциальные уравнения равновесия Навье [27,28], получим:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = -\frac{E_{c1} \cdot \theta}{2 \cdot (1 + \nu)} \cdot \frac{k \cdot \varepsilon_{c1} - \varepsilon}{\varepsilon_{c1} + (k - 2) \cdot \varepsilon}; \quad (7)$$

Отсюда найдем выражение для константы А:

$$A = \frac{-\frac{E_{c1} \cdot \theta}{2 \cdot (1 + \nu)} \cdot \frac{k \cdot \varepsilon_{c1} - \varepsilon}{\varepsilon_{c1} + (k - 2) \cdot \varepsilon}}{\left(z^2 - \frac{b^2}{4}\right) + \left(y^2 - \frac{h^2}{4}\right)}. \quad (8)$$

Уравнения равновесия упругопластического стержневого элемента, подверженного сжатию с кручением

Деформированное состояние стержневого элемента при сжатии с кручением описывается системой дифференциальных уравнений (9):

$$\begin{cases} D_z \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -M_t \cdot \frac{\partial w}{\partial x} - P \cdot v; \\ D_y \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -M_t \cdot \frac{\partial v}{\partial x} - P \cdot w, \end{cases} \quad (9)$$

где  $v$ ,  $w$  перемещения вдоль осей  $y$  и  $z$  оси стержневого элемента.

Решением уравнения в линеаризированной постановке [29] является следующее выражение:

$$P_{cr} = P_{cr}(M_t) = \frac{4 \cdot D_{min}^2 \cdot \pi^2 - M_t^2 \cdot l_0^2}{4 \cdot l_0^2 \cdot D_{min}}. \quad (10)$$

В выражение (10) входит касательно-модульная жесткость сечений  $D_{min}$ , которая определяется характером напряженно-деформированного состояния элемента и наименьшим моментом инерции сечения.

Сечение элемента разбивается на элементарные площадки (рисунок 3), в пределах которых предполагается  $R_{b,\sigma_x} = const$ .

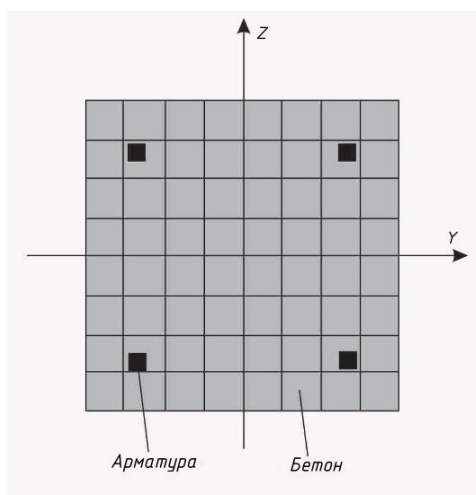


Рисунок 3 – Схема расчетного сечения железобетонной колонны

Напряженно-деформированное состояние элемента найдем из условия равновесия внешних сил и усилий, действующих в рассматриваемом сечении:

$$\left\{ \begin{aligned} P_{ext} = P_{int} &= \iint_{F_1} E_{c11} \cdot \frac{k_1 \cdot \varepsilon \cdot \varepsilon_{c11} - \varepsilon^2}{\varepsilon_{c11} + (k_1 - 2) \cdot \varepsilon} dz dy + \dots \\ &+ \iint_{F_n} E_{c1n} \cdot \frac{k_n \cdot \varepsilon \cdot \varepsilon_{c1n} - \varepsilon^2}{\varepsilon_{c1n} + (k_n - 2) \cdot \varepsilon} dz dy + \\ &+ E_s \cdot A_{s,tot} \cdot \varepsilon, \\ M_{t,ext} = M_{t,int} &= 2 \iint_F \Phi dz dy. \end{aligned} \right. \quad (11)$$

Деформированное состояние элемента характеризуется  $\varepsilon = \varepsilon_{min}$ ,  $\theta = \theta_{min}$ , для которого касательно-модульная жесткость относительно оси  $y$  определяется из выражения:

$$\begin{aligned} D_{min} &= D_{min}(P, M_t) \\ &= \iint_{F_1} \frac{d}{d\varepsilon} \left( E_{c11} \cdot \frac{k_1 \cdot \varepsilon_{c11} - \varepsilon}{\varepsilon_{c11} + (k_1 - 2) \cdot \varepsilon} \right) \cdot y^2 dz dy + \dots \\ &+ \iint_{F_n} \frac{d}{d\varepsilon} \left( E_{c1n} \cdot \frac{k_n \cdot \varepsilon_{c1n} - \varepsilon}{\varepsilon_{c1n} + (k_n - 2) \cdot \varepsilon} \right) \cdot y^2 dz dy + E_s \cdot A_{s,tot} \cdot \left( \frac{h}{2} - a \right)^2. \end{aligned} \quad (12)$$

#### Алгоритм расчета устойчивости при сжатии с кручением

Для реализации расчетной модели, предложенной в разделах 2.1 – 2.2, разработан алгоритм расчёта устойчивости (рисунок 4):

1. На основе исходных данных о конструктивном решении ( $l_0$ ,  $b \times h$ ,  $A_s$ ), физических соотношений для материала ( $\sigma = f(\varepsilon)$ ) и параметров воздействия ( $P$ ,  $M_t$ ) определяется деформированное состояние элемента из решения системы уравнений (11).

2. Для деформированного состояния элемента при заданных параметрах воздействия вычисляется касательно-модульная жесткость по формуле (12) с учетом разбиения сечения на конечное число подобластей, в пределах каждой из которых механические характеристики материала считаются постоянными.

3. Определение критической силы, соответствующей заданному напряженно-деформированному состоянию.

4. Сравнение вычисленной критической силы с действующей продольной силой

5а. Если вычисленная критическая сила больше, чем действующая в элементе продольная сила, то устойчивость обеспечена.

5б. Если вычисленная критическая сила меньше или равна действующей в элементе продольной силе, то устойчивость не обеспечена.

6. Если устойчивость не обеспечена, то изменяются конструктивные параметры элемента: изменяются размеры поперечного сечения, процент армирования или класс бетона по прочности на сжатие.

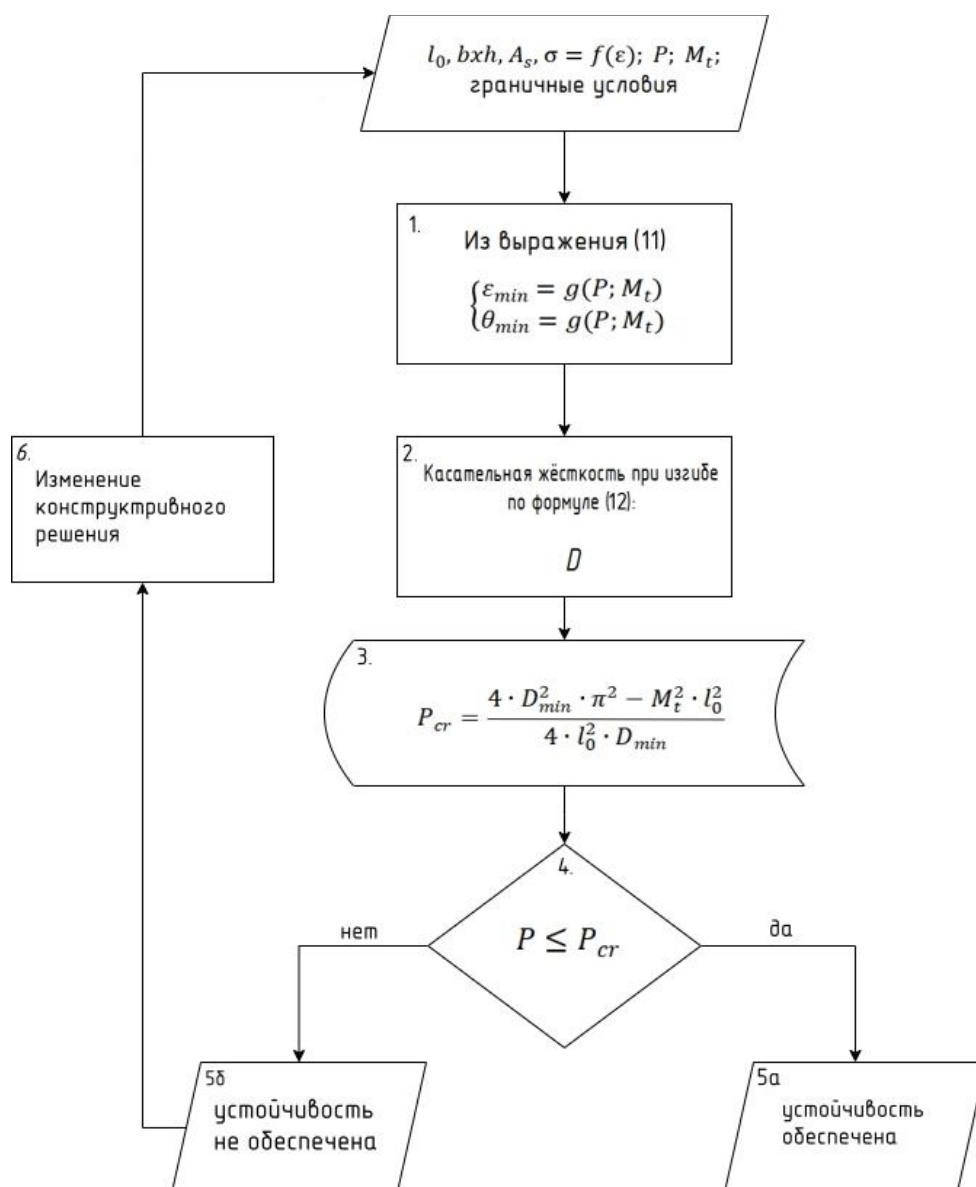


Рисунок 4 – Схема алгоритма расчёта устойчивости железобетонной колонны при сжатии с кручением

### Результаты исследования и их анализ

#### Описание конструктивного решения железобетонной колонны

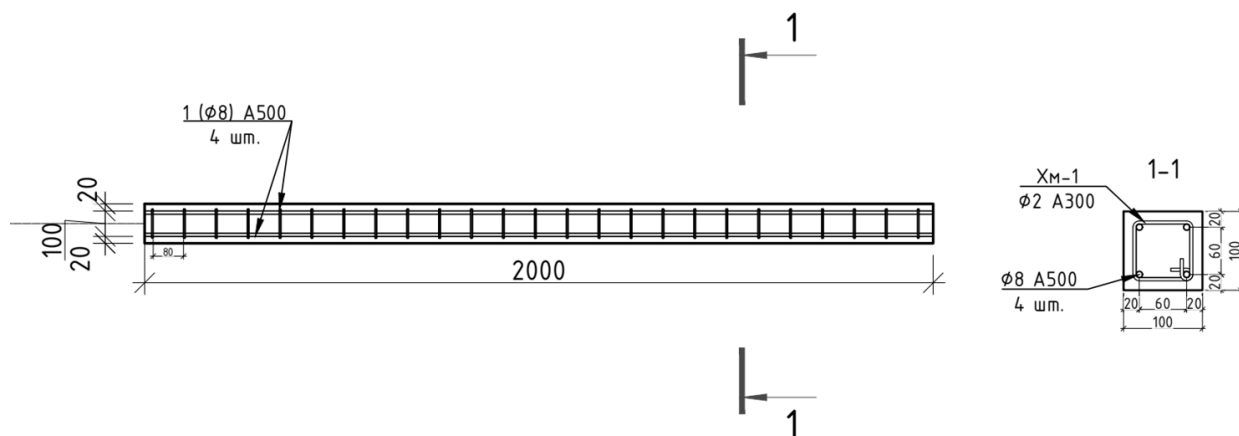
С использованием модели, предложенной в разделе 2, выполнен расчет устойчивости железобетонной колонны при сжатии с кручением в программном комплексе MathCAD. Рассматривается железобетонная колонна сечением  $100 \times 100$  мм. Схема армирования колонны и её расчетная схема приведена на рисунке 5. Один конец колонны жестко



защемлен, а другой свободен от закреплений. К свободному концу колонны приложена сосредоточенная сила в центре сечения и крутящий момент.

Принятые материалы: бетон В80 ( $R_{bn} = 41$  МПа), арматура - А500 ( $R_{sn} = 500$  МПа).

а)



б)

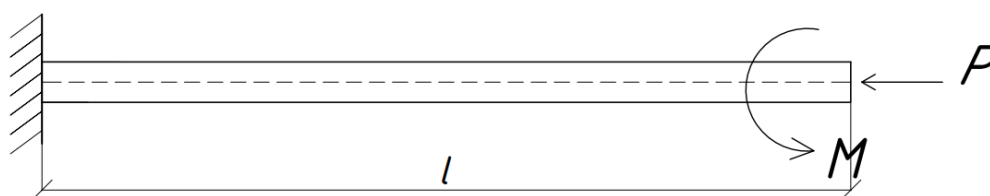


Рисунок 5 – Схема армирования железобетонной колонны (а) и ее расчетная схема (б)

### Описание конечно-элементной модели, принятой для валидации предложенного численно-аналитического решения

Для оценки достоверности предложенной расчетной модели устойчивости железобетонной колонны при сжатии с кручением было выполнено численное моделирование с использованием модуля Buckling программного комплекса Ansys. В рамках численного моделирования для бетона были использованы конечные элементы SOLID 185. Стержни продольной и поперечной арматуры смоделированы конечным элементом REINF 264. На основе анализа чувствительности результатов к густоте сетки разбиения модели на конечные элементы был принят шаг разбиения 10 мм. Общий вид модели представлен на рисунке 6.

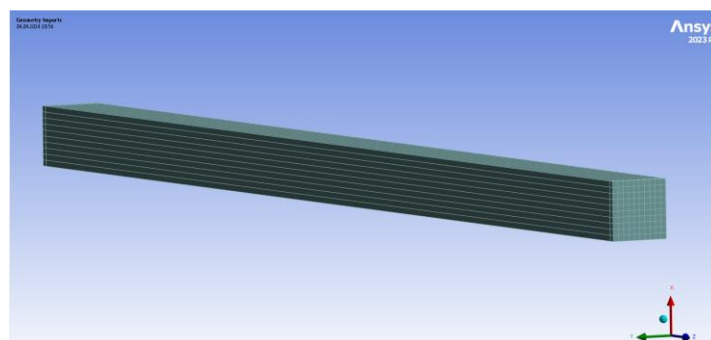
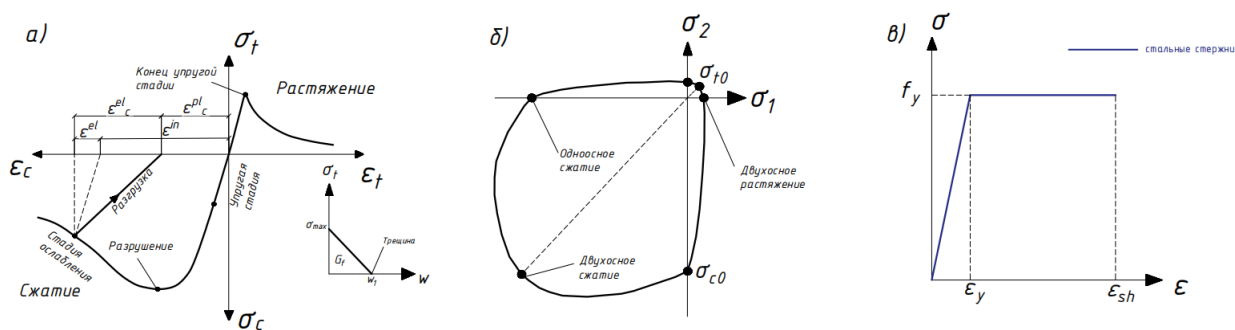


Рисунок 6 – Конечно-элементная модель железобетонной колонны в ПК Ansys

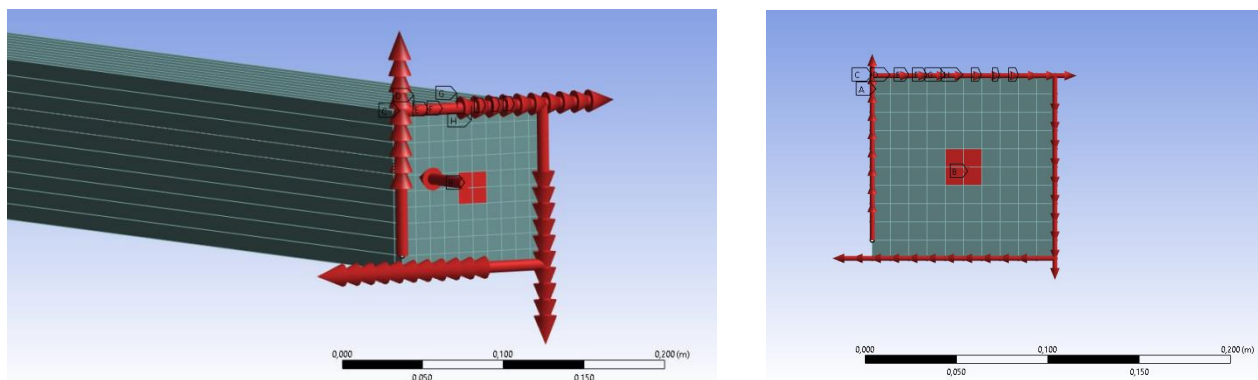
Для описания нелинейной работы бетона при сложном напряженном состоянии использовалась модель *Menterey-Willam*, параметры которой назначались на основе нелинейной зависимости  $\sigma$ - $\epsilon$  при одноосном сжатии и растяжении по приложению Г СП 63.13330.2018 (рисунок 7, а), а параметры поверхности текучести при двухосном напряженном состоянии по [25] (рисунок 7, б). Коэффициент Пуассона принят равным 0,15. Для арматурной стали была принята билинейная диаграмма (рисунок 7, в).



**Рисунок 7 – Диаграмма состояния бетона при одноосном напряженном состоянии (а); сечение поверхности текучести модели *Menterey-Willam* для двухосного напряженно-деформированного состояния (б); диаграмма состояния арматурной стали A500 (в)**

В построенной конечно-элементной модели продольная сила прикладывалась в центре сечения на свободном от закрепления конце колонны. Крутящий момент заменялся сосредоточенными силами, приложенными по касательной к граням в узлах сечения на свободном конце колонны (см. рисунок 8):  $M_{t,cr} = \sum_{i=1}^n (P \cdot 0,5h)$ , где  $P$  – сосредоточенная сила, приложенная в узле на контуре по касательной к поверхности,  $h$  – размер поперечного сечения,  $n$  – число углов на контуре, в которых приложены силы.

В модуле *Buckling* программного комплекса *Ansys* моменту потери устойчивости соответствует достижения полными деформациями (*'total deformation'*) формы потери устойчивости значений больше единицы.



**Рисунок 8 – Схема приложения нагрузки к модели колонны в ПК *Ansys***

### Сравнение результатов по предложенной модели и МКЭ

В соответствии с алгоритмом, представленным в разделе 2.3, выполним расчет устойчивости железобетонных элементов, подверженных сжатию с кручением, для фиксированных значений продольной силы:  $P = 0,9P_{cr,e}$ ,  $0,8P_{cr,e}$ ,  $0,7P_{cr,e}$ ,  $0,6P_{cr,e}$ ,  $0,4P_{cr,e}$ ,  $0,2P_{cr,e}$  где  $P_{cr,e}$  – критическая сила при потере устойчивости центрально сжатого элемента.

Для выполнения расчета в первом приближении сечение было разбито на 4 подобласти. С учетом этого касательно-модульная жёсткость сечения при изгибе будет представлять собой сумму интегралов по заданным подобластям (13):

$$\begin{aligned}
 D = & \int_{0.25h}^{0.5h} \int_{0.25b}^{0.5b} \left( \frac{d}{d\varepsilon} \left( \frac{k \cdot \varepsilon \cdot \varepsilon_{c1} - \varepsilon^2}{\varepsilon_{c1} + (k-2) \cdot \varepsilon} \cdot E_{c1} \right) \right) y^2 dz dy \\
 + & \int_{0.25h}^{0.5h} \int_0^{0.25b} \left( \frac{d}{d\varepsilon} \left( \frac{k \cdot \varepsilon \cdot \varepsilon_{c1} - \varepsilon^2}{\varepsilon_{c1} + (k-2) \cdot \varepsilon} \cdot E_{c1} \right) \right) y^2 dz dy \\
 + & \int_{0.25h}^{0.5h} \int_{-0.25b}^0 \left( \frac{d}{d\varepsilon} \left( \frac{k \cdot \varepsilon \cdot \varepsilon_{c1} - \varepsilon^2}{\varepsilon_{c1} + (k-2) \cdot \varepsilon} \cdot E_{c1} \right) \right) y^2 dz dy \\
 + & \int_{0.25h}^{0.5h} \int_{-0.5b}^{-0.25b} \left( \frac{d}{d\varepsilon} \left( \frac{k \cdot \varepsilon \cdot \varepsilon_{c1} - \varepsilon^2}{\varepsilon_{c1} + (k-2) \cdot \varepsilon} \cdot E_{c1} \right) \right) y^2 dz dy + E_s A_{s,tot} \cdot \left( \frac{h}{2} - a \right)^2.
 \end{aligned} \tag{13}$$

При  $M_t = 0$  критическая сила равна (14):

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 D}{l^2}; \tag{14}$$

Критический момент при фиксированной сжимающей силе  $P$  равен (15):

$$M_{t,cr} = 2 \cdot \left( D \cdot \left( \frac{\pi^2 \cdot D}{l^2} - P \right) \right)^{0.5} \tag{15}$$

На основании решения уравнения (15) построен график зависимости  $P_{cr} - M_t$  (Рисунок 9).

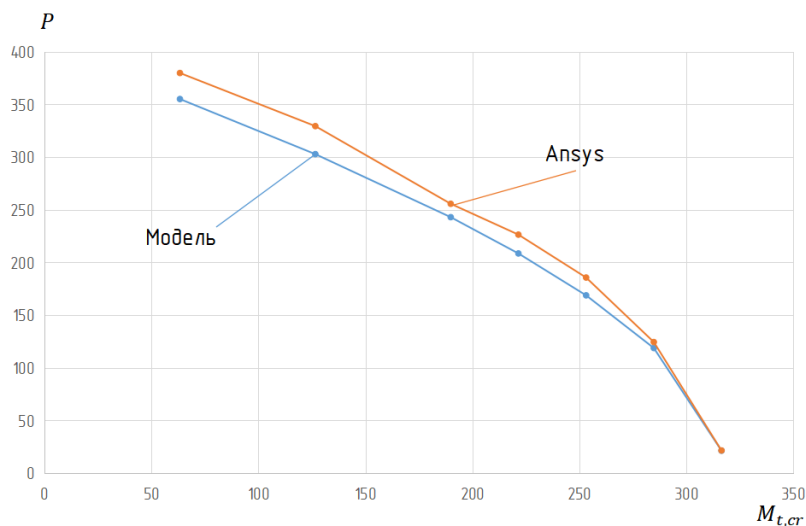


Рисунок 10 – График зависимости  $P - M_{t,cr}$

На рисунке 10 представлена форма потери устойчивости по результатам расчета в модуле Buckling программного комплекса Ansys для следующих параметров воздействия:  $P = 314,2$  кН,  $M_t = M_{t,cr}$ .

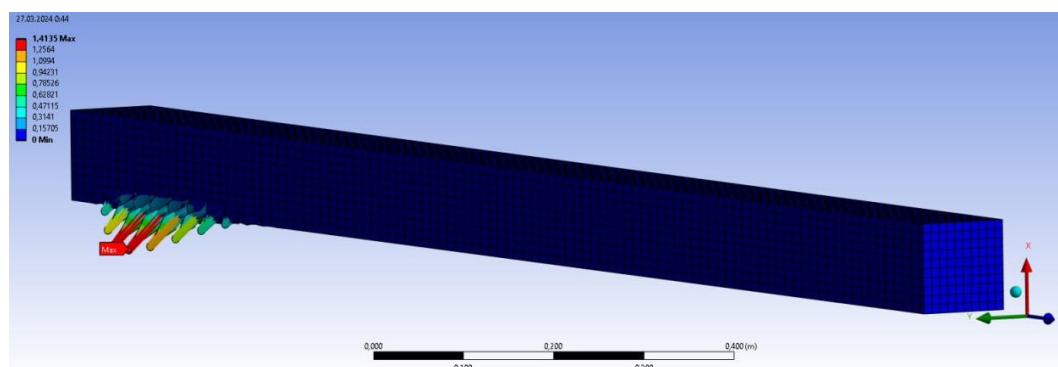


Рисунок 10 – форма потери устойчивости железобетонной колонны при  $P = 314,2 \text{ кН}$ ,  $M_t = M_{t,cr}$

Сопоставление результатов расчета по предложенной численно-аналитической модели и с использованием ПК Ansys приведено на рисунке 11.

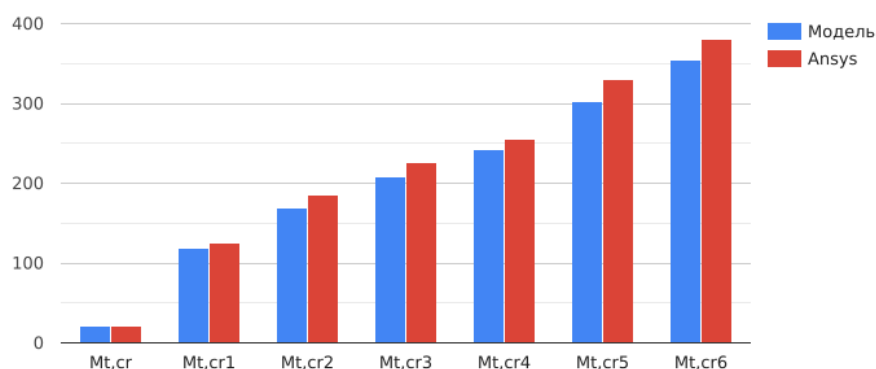


Рисунок 11 – Значения критических усилий  $P - M_{t,cr}$ , полученных по предложенной модели и в модуле Buckling ПК Ansys

Из анализа данных на рисунке 11 видно, наибольшая разница составила 8.08% для случая  $P = 0.4 \cdot P_{cr,e} = 126.6 \text{ кН}$ . Наименьшая разница 3.6% составила для случая  $P = 0.9 \cdot P_{cr,e} = 284.85 \text{ кН}$ . Полученная разница между результатами расчета по предложенной численно-аналитической модели и в ПК Ansys учитывается в запас несущей способности элементов, подверженных сжатию с кручением. По мере роста крутящего момента происходит снижение значения критической силы, вызывающей потерю устойчивости. Это связано как с действием крутящей пары сил при искривлении стержня, так и со снижением механических характеристик бетона при совместном действии нормальных и касательных напряжений.

## Выводы

1. Сформулированы исходные гипотезы о напряженно-деформированном состоянии железобетонной колонны, испытывающей сжатие с кручением. На их основе предложена полуаналитическая расчетная модель для анализа устойчивости железобетонных колонн, подверженных сжатию с кручением в результате особого воздействия.
2. Выполнена валидация предложенной расчетной модели устойчивости железобетонных колонн, подверженных сжатию с кручением в результате особого воздействия в модуле Buckling программного комплекса Ansys. Анализ данных показал, наибольшая разница составила 8.08% для случая  $P = 0.4 \cdot P_{cr,e} = 126.6 \text{ кН}$ . Наименьшая разница 3.6% составила для случая  $P = 0.9 \cdot P_{cr,e} = 284.85 \text{ кН}$ .

3. Показано, что по мере роста крутящего момента происходит снижение значения критической силы, вызывающей потерю устойчивости. Это связано как с действием крутящей пары сил при искривлении стержня, так и со снижением механических характеристик бетона при совместном действии нормальных и касательных напряжений.

### Благодарности

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-49-10010, <https://rscf.ru/project/24-49-10010/>

This work was supported by the Russian Science Foundation grant No. 24-49-10010, <https://rscf.ru/project/24-49-10010/>

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bažant Z.P., Verdure M. Mechanics of Progressive Collapse: Learning from World Trade Center and Building Demolitions // *J Eng Mech*. 2007. Vol. 133, № 3. P. 308–319.
2. Pham A.T. et al. Blast-induced dynamic responses of reinforced concrete structures under progressive collapse // *Magazine of Concrete Research*. 2022. Vol. 74, № 16. P. 850–863.
3. Лалин В.В., Семенов Д.А. Задача о кручении: постановка в напряжениях и решение методом граничных элементов // *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*. – 2023. – Т. 19. – №4. – С. 339-348. doi: 10.22363/1815-5235-2023-19-4-339-348.
4. Бондаренко В. М. К вопросу об устойчивом и неустойчивом сопротивлении железобетонных конструкций, поврежденных коррозией // *Известия Орел ГТУ, науч.журнал, серия «Строительство и транспорт»*. 2009. № 1/21(533). С. 9-17.
5. Фёдоров В.С., Левитский В.Е. Оценка огнестойкости внецентренно сжатых железобетонных колонн по потере устойчивости // *Строительная механика и расчет сооружений*. 2012. №2. С. 53-60.
6. Санжаровский Р.С., Веселов А.А. Теория расчета строительных конструкций на устойчивость и современные нормы. М., СПб.: АСВ, 2002. 128 с.
7. Солдатов А.Ю. Анализ устойчивости железобетонных стержневых конструкций с учетом физической нелинейности // *Строительная механика и расчет сооружений*. 2012. №1. С. 30-34.
8. Улитин В.В. Деформационный критерий при анализе устойчивости и продольного изгиба в условиях физической нелинейности // *Строительная механика и расчет сооружений*. 2012. №1. С. 34-39.
9. Manuylov G., Kosytsyn S., Begichev M. On the calculations for the stability of beams, frames, and cylindrical shells in the elasto-plastic stage // *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*. 2022. Vol. 18, № 3. P. 25–36.
10. Беглов А.Д., Санжаровский Р.С. Теория расчета железобетонных конструкций на прочность и устойчивость. Современные нормы и евростандарты. М.: АСВ, 2006. 221 с.
11. Тамразян А.Г. К устойчивости внецентренно сжатых железобетонных элементов с малым эксцентриситетом с учетом реологических свойств бетона // *Железобетонные конструкции*. 2023. №2(2). С. 48-57.
12. Savin S. et al. Experimental and Numerical Investigations of RC Frame Stability Failure under a Corner Column Removal Scenario // *Buildings*. 2023. Vol. 13, № 4. P. 908.
13. Kolchunov V.I. Deplanation Hypotheses for Angular Deformations in Reinforced Concrete Structures Under Combined Torsion and Bending // *Building and reconstruction*. 2022. Vol. 100, № 2. P. 3–12.
14. Kolchunov V.I., demyanov A.I., Protchenko M.V. Moments in reinforced concrete structures under bending with torsion // *Building and reconstruction*. 2021. Vol. 95, № 3. P. 27–46.
15. Kolchunov V., Dem'yanov A., Protchenko M. The new hypothesis angular deformation and filling of diagrams in bending with torsion in reinforced concrete structures // *Journal of Applied Engineering Science*. 2021. Vol. 19, № 4. P. 972–979.
16. Бондаренко В.М., Колчунов В.И. Расчетные модели силового сопротивления железобетона. Москва: Издательство АСВ, 2004. 472 р.
17. Lei Y. et al. Comparison of torsional damage and size effects of BFRP- and steel-reinforced concrete beams with different stirrup ratios // *Eng Struct*. 2023. Vol. 285. P. 116042.
18. Deng J., Cao S., Peng Z. Crack-based model for seismic behaviour of concrete columns under combined compression-bending and torsion // *Structures*. 2023. Vol. 56. P. 104998.
19. Chen Y. et al. Bending restoring force model of angle-steel reinforced concrete columns under combined torsion // *Structures*. 2023. Vol. 55. P. 2186–2198.

20. Selmy Y.M., El-Salakawy E.F. Behaviour of circular concrete bridge columns internally reinforced with GFRP under reversed-cyclic loading including torsion // *Structures*. 2024. Vol. 59. P. 105680.
21. Savin S.Y., Fedorova N. V., Kolchunov V.I. Dinamic Forces in the Eccentrically Compressed Members of Reinforced Concrete Frames Under Accidental Impacts // *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*. ASV Publishing House, 2022. Vol. 18, № 4. P. 111–123.
22. Алмазов В.О., Плотников А.И., Расторгуев Б.С. Проблемы сопротивления зданий прогрессирующему разрушению // *Вестник МГСУ*. 2011. № 2–1. P. 16–20.
23. Алмазов В.О., Као З.К. Динамика прогрессирующего разрушения монолитных многоэтажных каркасов. Москва: Издательство АСВ, 2014. 128 p.
24. Adam J.M. et al. Dynamic performance of a real-scale reinforced concrete building test under a corner-column failure scenario // *Eng Struct*. Elsevier Ltd, 2020. Vol. 210. P. 110414.
25. Geniyev G.A., Kisyuk V.N., Tyupin G.A. Teoriya plastichnosti betona i zhelezobetona [Plasticity theory of concrete and reinforced concrete]. Moscow: Stroyizdat, 1974. 316 p.
26. FIB Model Code 2010. CEB and FIP, 2011.
27. Старовойтов Э. И. Сопротивление материалов. М.: Физматлит, 2008
28. Феодосьев В. И. Сопротивление материалов: Учебник для вузов. 10-е изд., перераб. и доп. М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 1999.
29. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем. Москва: Издательство “Наука,” 1967. 984 с.

## REFERENCES

1. Bažant Z.P., Verdure M. Mechanics of Progressive Collapse: Learning from World Trade Center and Building Demolitions. *J Eng Mech*. 2007. Vol. 133, № 3. P. 308–319.
2. Pham A.T. et al. Blast-induced dynamic responses of reinforced concrete structures under progressive collapse. *Magazine of Concrete Research*. 2022. Vol. 74, № 16. P. 850–863.
3. Lalin V.V., Semenov D.A. Torsion problem: stress statement and solution by the boundary element method. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2023. Vol. 19. No. 4. Pp. 339-348. doi: 10.22363/1815-5235-2023-19-4-339-348.
4. Bondarenko V. M. To the question of stable and unstable resistance of reinforced concrete structures damaged by corrosion. *Izvestiya Orel GTU, scientific journal, series "Construction and transport"*. 2009. no 1/21(533). Pp. 9-17.
5. Fedorov V.S. Levitsky V.E. Fire resistance assessment of the off-centered compressed reinforced concrete columns by stability loss. *Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzheniy [Structural mechanics and calculation of structures]*. 2012. №2. C. 53-60. (in Russian)
6. Sanzharovsky R.S., Veselov A.A. Theory of calculation of building structures for stability and modern norms. Moscow, SPb.: ASV, 2002. 128 p.
7. Soldatov A.Yu. Stability analysis of the reinforced concrete rod structures taking into account the physical nonlinearity. *Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzheniy*. 2012. No. 1. Pp. 30-34. (in Russian)
8. Ulitin V.V. Deformation criterion in the analysis of stability and longitudinal bending in the conditions of physical nonlinearity. *Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzheniy [Structural mechanics and calculation of structures]*. 2012. No. 1. Pp. 34-39.
9. Manuylov G., Kosytsyn S., Begichev M. On the calculations for the stability of beams, frames, and cylindrical shells in the elasto-plastic stage. *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*. 2022. Vol. 18, № 3. P. 25–36.
10. Beglov A.D., Sanzharovsky R.S. Theory of calculation of the reinforced concrete structures for strength and stability. Modern Norms and Eurostandards. Moscow: ASV, 2006. 221 p.
11. Tamrazyan A.G. To stability of the off-centered compressed reinforced concrete elements with a small eccentricity taking into account the rheological properties of concrete. *Reinforced Concrete Structures*. 2023. No. 2(2). Pp. 48-57.
12. Savin S. et al. Experimental and Numerical Investigations of RC Frame Stability Failure under a Corner Column Removal Scenario. *Buildings*. 2023. Vol. 13, № 4. P. 908.
13. Kolchunov V.I. Deplanation Hypotheses for Angular Deformations in Reinforced Concrete Structures Under Combined Torsion and Bending. *Building and reconstruction*. 2022. Vol. 100, № 2. P. 3–12.
14. Kolchunov V.I., demyanov A.I., Protchenko M.V. Moments in reinforced concrete structures under bending with torsion. *Building and reconstruction*. 2021. Vol. 95, № 3. P. 27–46.
15. Kolchunov V., Dem'yanov A., Protchenko M. The new hypothesis angular deformation and filling of diagrams in bending with torsion in reinforced concrete structures. *Journal of Applied Engineering Science*. 2021. Vol. 19, № 4. P. 972–979.
16. Bondarenko V.M., Kolchunov V.I. Raschetnye modelov silovogo resistenzii zhelezotona [Calculating models of force resistance of reinforced concrete]. Moscow: ASV Publishing House, 2004. 472 p.

17. Lei Y. et al. Comparison of torsional damage and size effects of BFRP- and steel-reinforced concrete beams with different stirrup ratios. *Eng Struct.* 2023. Vol. 285. P. 116042.
18. Deng J., Cao S., Peng Z. Crack-based model for seismic behaviour of concrete columns under combined compression-bending and torsion. *Structures.* 2023. Vol. 56. P. 104998.
19. Chen Y. et al. Bending restoring force model of angle-steel reinforced concrete columns under combined torsion. *Structures.* 2023. Vol. 55. P. 2186–2198.
20. Selmy Y.M., El-Salakawy E.F. Behaviour of circular concrete bridge columns internally reinforced with GFRP under reversed-cyclic loading including torsion. *Structures.* 2024. Vol. 59. P. 105680.
21. Savin S.Y., Fedorova N. V., Kolchunov V.I. Dynamic Forces in the Eccentrically Compressed Members of Reinforced Concrete Frames Under Accidental Impacts. *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering.* 2022. Vol. 18, № 4. P. 111–123.
22. Almazov, V.O.; Plotnikov, A.I.; Rastorguev, B.S. Problems of building resistance to progressive destruction. *Vestnik MSCU.* 2011. № 2-1. P. 16-20.
23. Almazov V.O., Kao Z.K. Dynamics of progressive destruction of monolithic multistorey frames. Moscow: ASV Publishing House, 2014. 128 p.
24. Adam J.M. et al. Dynamic performance of a real-scale reinforced concrete building test under a corner-column failure scenario. *Eng Struct.* 2020. Vol. 210. P. 110414.
25. Geniyev G.A., Kisyuk V.N., Tyupin G.A. Teoriya plastichnosti betona i zhelezobetona [Plasticity theory of concrete and reinforced concrete]. Moscow: Stroyizdat, 1974. 316 p.
26. FIB Model Code 2010. CEB and FIP, 2011.
27. Starovoitov E. I. Mechanics of Materials. Moscow: Fizmatlit, 2008
28. Feodosiev V. I. Mechanics of Materials: Textbook for Universities. 10th edition, revised and added. Moscow: Bauman MSTU Publishing House, 1999.
29. Volmir A.S. Stability of deformable systems. Moscow: Nauka Publishing House, 1967. 984 p.

#### Информация об авторах

##### **Колчунов Виталий Иванович**

ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет» (НИУ МГСУ), г. Москва, Россия,  
Академик РААСН, доктор технических наук, профессор, профессор кафедры железобетонных и каменных конструкций  
E-mail: [asiorel@mail.ru](mailto:asiorel@mail.ru)

##### **Савин Сергей Юрьевич**

ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет» (НИУ МГСУ), г. Москва, Россия,  
кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры железобетонных и каменных конструкций.  
E-mail: [savinsyu@mgsu.ru](mailto:savinsyu@mgsu.ru)

##### **Амелина Маргарита Андреевна**

ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет» (НИУ МГСУ), г. Москва, Россия,  
аспирант кафедры железобетонных и каменных конструкций  
E-mail: [margo.dremova@mail.ru](mailto:margo.dremova@mail.ru)

#### Information about authors:

##### **Kolchunov Vitaly Iv.**

Moscow State University of Civil Engineering (NRU MSUCE), Moscow, Russia,  
Full member of RAACS, Doctor of Tech. Sc., Professor, Professor of the Department of Reinforced Concrete and Masonry Structures.  
E-mail: [asiorel@mail.ru](mailto:asiorel@mail.ru)

##### **Savin Sergey Yu.**

Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russia,  
candidate of technical science, associate professor of the department of Reinforced Concrete and Masonry Structures.  
E-mail: [savinsyu@mgsu.ru](mailto:savinsyu@mgsu.ru)

##### **Amelina Margarita A.**

Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russia,  
Post graduate student of the department of Reinforced Concrete and Masonry Structures.  
E-mail: [margo.dremova@mail.ru](mailto:margo.dremova@mail.ru)