

А.В. КОРОБКО¹, М.Ю. ПРОКУРОВ²¹ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева», г. Орел, Россия²ФГБОУ ВО «Брянский государственный инженерно-технологический университет», г. Брянск, Россия

АППРОКСИМАЦИЯ ПРОГИБОВ ПЛАСТИНОК, ЛЕЖАЩИХ НА ВИНКЛЕРОВОМ ОСНОВАНИИ

Аннотация. Цель научного исследования состоит в развитии метода интерполяции по коэффициенту формы для расчёта максимального прогиба тонких пластинок на упругом винклеровом основании, нашедших широкое применение при моделировании работы элементов строительных конструкций зданий и сооружений. Указанный метод расчёта позволяет получать решения на основе прямых аналитических зависимостей, аргументом которых является интегральная характеристика плоской выпуклой односвязной области – коэффициент формы. Эта характеристика имеет применение в ряде задач математической физики и известна по работам учёных Г. Поля и Г. Сегё. Впервые к расчёту пластинок коэффициент формы применён профессором В.И. Коробко. Метод интерполяции по коэффициенту формы разработан профессором А.В. Коробко. При определении максимального прогиба тонких пластинок на упругом основании отдельные параметры задачи рассматриваются как функции от коэффициента формы рассматриваемой пластинки и определяются типом граничных условий на её контуре. Построению аппроксимирующих функций для непрерывных множеств пластинок характерных очертаний и граничных условий посвящено настоящее исследование. В статье приводятся функции для расчёта значения максимального прогиба упругих пластинок в виде равнобедренных треугольников, ромбов и прямоугольников. При этом рассматриваются пластинки с различными комбинациями шарнирного опирания и жёсткого зацебления по их отдельным сторонам, нагруженные сплошной равномерно распределённой нагрузкой. Установленные функциональные зависимости предназначены для непосредственного использования при расчёте пластинок указанных очертаний, а также для получения опорных решений при интерполяции значений максимальных прогибов пластинок более сложных очертаний.

Ключевые слова: упругие пластинки, винклеровское основание, максимальный прогиб, коэффициент формы, аппроксимирующая функция.

A.V. KOROBKO¹, M.Yu. PROKUROV²¹Orel State University named after I.S. Turgenev, Orel, Russia²Bryansk State Technological University of Engineering, Bryansk, Russia

APPROXIMATION OF DEFLECTIONS OF PLATES LYING ON WINKLER BASE

Abstract. The purpose of this research is to develop the method of shape factor interpolation for calculating the maximum deflection of thin plates on an elastic Winkler base, which are widely used in modeling the operation of elements of building constructions of buildings and structures. The above calculation method allows to obtain solutions based on direct analytical dependences, the argument of which is an integral characteristic of a flat convex one-connected area - the shape factor. This characteristic has applications in a number of problems of mathematical physics and is known from the works of scientists G. Polia and G. Szegö. The shape factor was first applied to the calculation of plates by Professor V.I. Korobko. The method of interpolation by shape factor was developed by Professor A.V. Korobko. When determining the maximum deflection of thin plates on an elastic base, some parameters of the problem are considered as functions of the shape factor of the plate in consideration and are determined by the type of boundary conditions on its contour. The present study is devoted to the construction of approximating functions for continuous sets of plates of characteristic outlines and

boundary conditions. The paper presents functions for calculating the maximum deflection of elastic plates in the form of isosceles triangles, rhombuses and rectangles. The plates with various combinations of hinged support and rigid pinch along their individual sides, loaded with a continuous uniformly distributed load, are considered. The established functional dependences are intended for direct use in the calculation of plates of the specified outlines, as well as for obtaining reference solutions during interpolation of the values of maximum deflections of plates of more complex outlines.

Keywords: elastic plates, Winkler base, maximum deflection, shape factor, approximating function.

Введение

В настоящее время для определения деформаций тонких пластинок, моделирующих работу несущих и ограждающих элементов строительных объектов различного назначения, используются универсальные программные средства, реализующие численные методы расчёта дискретизированных систем [1-5]. Такой подход к решению задачи остаётся достаточно трудоёмким и зачастую ведёт к потере физической сущности рассматриваемой задачи и возможности правильной интерпретации получаемых результатов.

Более эффективной представляется реализация решения с помощью инженерного геометрического метода расчёта пластинок – метода интерполяции по коэффициенту формы (МИКФ), разработанного профессором А.В. Коробко [6].

Коэффициент формы является безразмерной геометрической характеристикой плоской выпуклой односвязной области и представляет собой минимизированный замкнутый интеграл, нашедший применение в ряде задач математической физики [7]:

$$K_f = \oint_L \frac{ds}{h}, \quad (1)$$

где ds – линейный элемент контура L , h – перпендикуляр, опущенный на него из некоторого полюса, расположенного внутри рассматриваемой области. К расчёту пластинок коэффициент формы впервые был применён профессором В.И. Коробко при разработке изопериметрического метода [8].

В работах [6, 8, 9] теоретически доказано, что коэффициент формы выступает в качестве интегральной физической характеристики в ряде двумерных задач теории упругости, описываемых дифференциальными уравнениями эллиптического типа второго и четвёртого порядков. В частности, он является геометрическим аналогом максимального прогиба тонких пластинок при их поперечном изгибе [10-13].

В работах [14, 15] установлено, что коэффициент формы также является геометрическим аналогом прогиба в задачах поперечного изгиба пластинок на упругом основании.

Метод решения

Выражение максимального прогиба пластинок различной формы и граничных условий опирания, лежащих на упругом винклеровом основании, имеет вид:

$$w_0 = \frac{q}{B_w^q} \left(\frac{D}{A^2} + k C_w^q \right)^{-1}, \quad (2)$$

где q – интенсивность равномерной нагрузки, распределённой по всей площади пластинки A , D – цилиндрическая жёсткость пластинки, k – коэффициент жёсткости упругого основания. Программная реализация этой методики описана в работе [16].

Значения вводимых параметров B_w^q и C_w^q рассматриваются как некоторые функции от коэффициента формы искомой пластинки и определяются типом граничных условий на её контуре. Построению указанных функций для непрерывных множеств пластинок характерных очертаний и граничных условий посвящена настоящая статья.

Аппроксимирующие функции для пластинок типичных очертаний

Значения искомых функций определялись путём расчёта пластинок единичной площади и цилиндрической жёсткости, нагруженных единичной равномерно распределённой нагрузкой. Значения прогибов пластинок при этом определялись дважды: при отсутствии упругого основания и при упругом основании с произвольным значением коэффициента жёсткости. Данные расчёты выполнялись с использованием универсального программного пакета, реализующего МКЭ.

При формировании функций учитывался обратный характер зависимости между величинами максимальных прогибов пластинок и минимальными значениями соответствующих им коэффициентов формы, установленный в работе [6].

Аппроксимирующие функции для параметров B_w^q и C_w^q , входящих в формулу (2), получены в виде следующих выражений:

$$f(K_f) = a + bK_f + cK_f^2 + dK_f^3 + eK_f^4 + fK_f^5 + \dots, \quad (3)$$

$$f(K_f) = a + bK_f^{-1} + cK_f^{-2} + dK_f^{-3} + eK_f^{-4} + fK_f^{-5} + \dots, \quad (4)$$

$$f(K_f) = (a + bK_f + cK_f^2 + dK_f^3 + \dots)(1 + a_1K_f + b_1K_f^2 + c_1K_f^3 + d_1K_f^4 + \dots)^{-1}, \quad (5)$$

$$f(K_f) = (a + bK_f + cK_f^2 + dK_f^3 + eK_f^4 + fK_f^5 + \dots)^{-1}. \quad (6)$$

Количество характерных слагаемых и значения вариативных коэффициентов $a, b, c, \dots$ и $a_1, b_1, c_1, \dots$, входящих в выражения (3) – (6), были установлены с использованием распространённых пакетов специализированного математического обеспечения. Конкретизация указанных значений, отвечающих различным условиям задачи, опущена в виду большого объёма числовой информации.

Пластинки в виде равнобедренных треугольников

Для пластинок в виде равнобедренных треугольников существует шесть различных комбинаций граничных условий в виде шарнирного опирания и жёсткого защемления по их отдельным сторонам (рисунок 1).

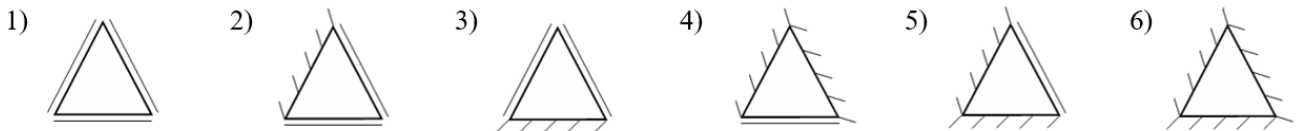


Рисунок 1 – Комбинации граничных условий пластинок в виде равнобедренных треугольников

В работе [17] установлено, что для аппроксимации прогибов пластинок в виде равнобедренных треугольников с комбинированными граничными условиями необходимо применять две отдельные функции при соответствующих значениях угла α при их основании. Если угол $\alpha < 60^\circ$, то основание является большей стороной пластинки. Наоборот, если угол $\alpha > 60^\circ$, то основание является меньшей стороной. При этом его жёсткое защемление или шарнирное опирание определяют большую или меньшую жёсткость пластинки, влияя на величину её максимального прогиба. В связи с этим, для каждой из схем с комбинированными граничными условиями 2 – 5 приняты по две различные аппроксимирующие функции, отвечающие указанным условиям. Для параметра B_w^q эти функции заданы выражениями вида (3) и (4), для параметра C_w^q используются выражения вида (4) и (6). При однородных граничных условиях, представленных схемами 1 и 6, функции для параметра B_w^q представлены выражениями вида (3), а для параметра C_w^q описываются выражениями вида (6).

Результаты исследования

Графики аппроксимирующих функций приведены на рисунках 2, 3. Здесь и далее номер кривой соответствует номеру схемы контурного закрепления пластинки.

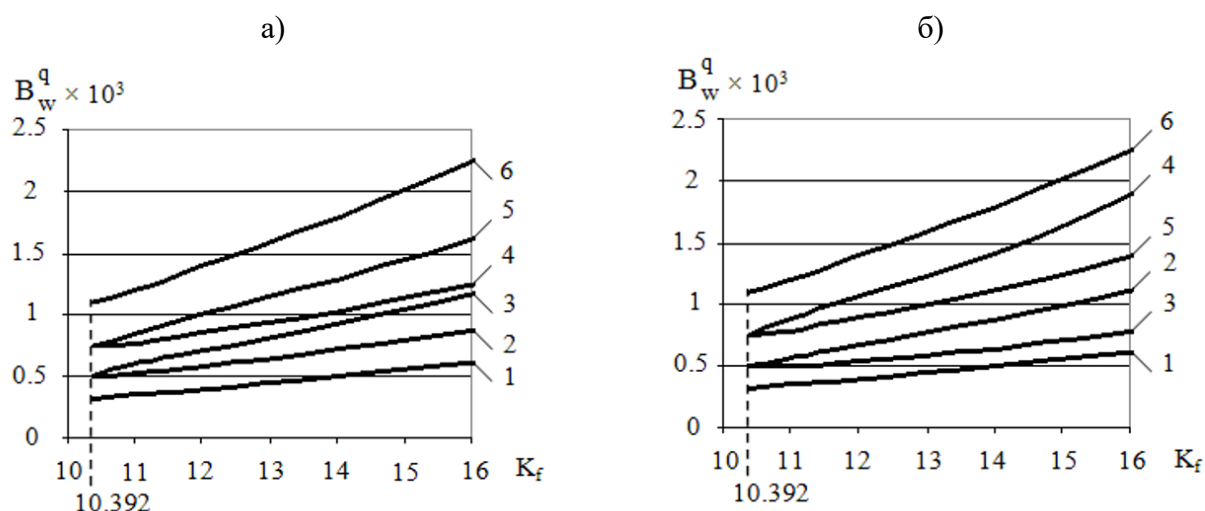


Рисунок 2 – Графики аппроксимирующих функций B_w^q для максимального прогиба пластинок в виде равнобедренных треугольников:
а) угол при основании пластинки $\alpha \leq 60^\circ$; б) угол при основании пластинки $\alpha \geq 60^\circ$

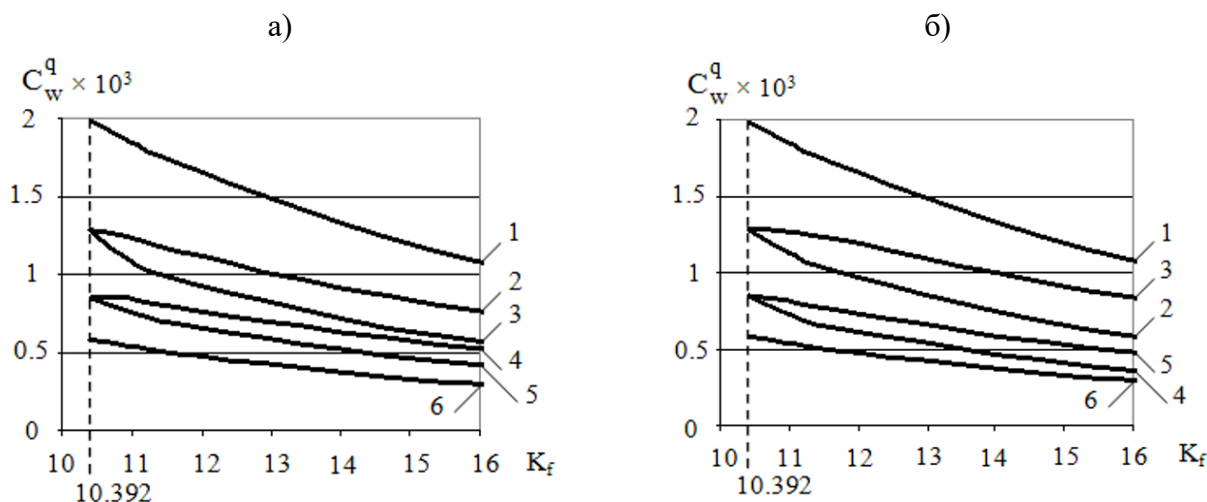


Рисунок 3 – Графики аппроксимирующих функций C_w^q для максимального прогиба пластинок в виде равнобедренных треугольников:
а) угол при основании пластинки $\alpha \leq 60^\circ$; б) угол при основании пластинки $\alpha \geq 60^\circ$

Минимально возможное значение коэффициента формы для пластинки в виде равностороннего треугольника составляет 10,392, что ограничивает слева область определения построенных функций. При таком очертании контура схемы 2, 3 и 4, 5 совпадают, поэтому графики соответствующих функций выходят из общих точек.

Расхождения значений прогибов пластинок, вычисленных на основе построенных аппроксимирующих функций, со значениями тестовых решений не превысило 1,9 %.

Пластинки в виде ромбов

Для пластинок в виде ромбов существует семь различных комбинаций граничных условий в виде шарнирного опирания и жёсткого защемления по их отдельным сторонам (рисунок 4).

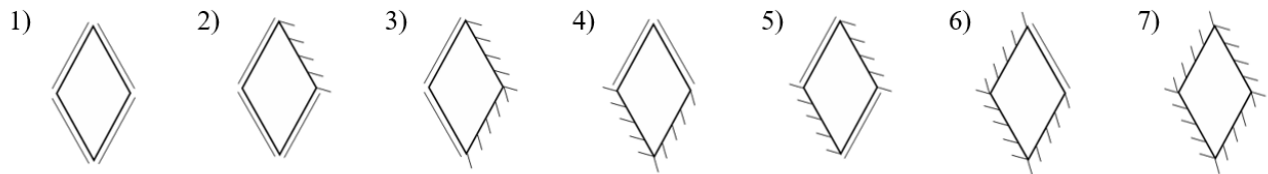


Рисунок 4 – Комбинации граничных условий ромбических пластинок

В данном случае аппроксимирующие функции для параметра B_w^q описываются выражениями вида (3), а функции для параметра C_w^q – выражениями вида (6).

Графики построенных аппроксимирующих функций приведены на рисунке 5.

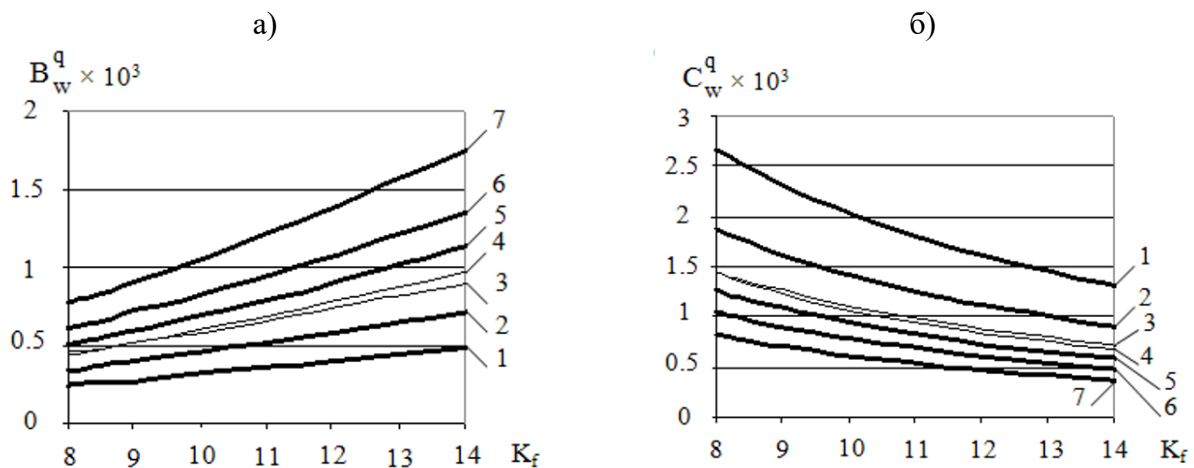


Рисунок 5 – Графики аппроксимирующих функций для расчёта максимального прогиба пластинок в виде ромбов: а) графики для параметра B_w^q ; б) графики для параметра C_w^q

Минимально возможное значение коэффициента формы для ромбов, соответствующее квадратному очертанию, равно восьми. Поэтому графики обеих построенных аппроксимирующих функций для схем 3 и 4 выходят из одной общей точки, поскольку для квадратной пластинки данные схемы совпадают.

Расхождения значений прогибов пластинок, вычисленных на основе построенных аппроксимирующих функций, со значениями тестовых решений не превысило 2,7 %.

Пластинки в виде прямоугольников

Для прямоугольных пластинок существует девять различных комбинаций граничных условий в виде шарнирного опирания и жёсткого защемления по их отдельным сторонам (рисунке 6).

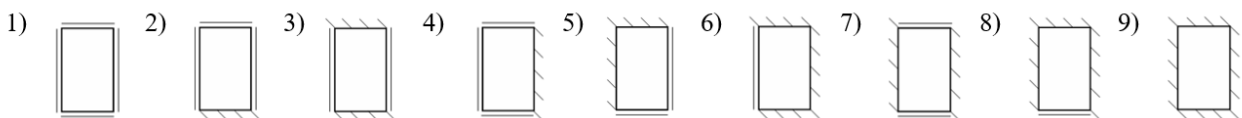


Рисунок 6 – Комбинации граничных условий для прямоугольных пластинок

Аппроксимирующие функции для параметров B_w^q и C_w^q для схем граничных условий 1, 5 и 9 описываются выражениями вида (3), соответственно для схем 2 – 4 и 6 – 8 они описываются выражениями вида (4).

Графики полученных аппроксимирующих функций приведены на рисунке 7.

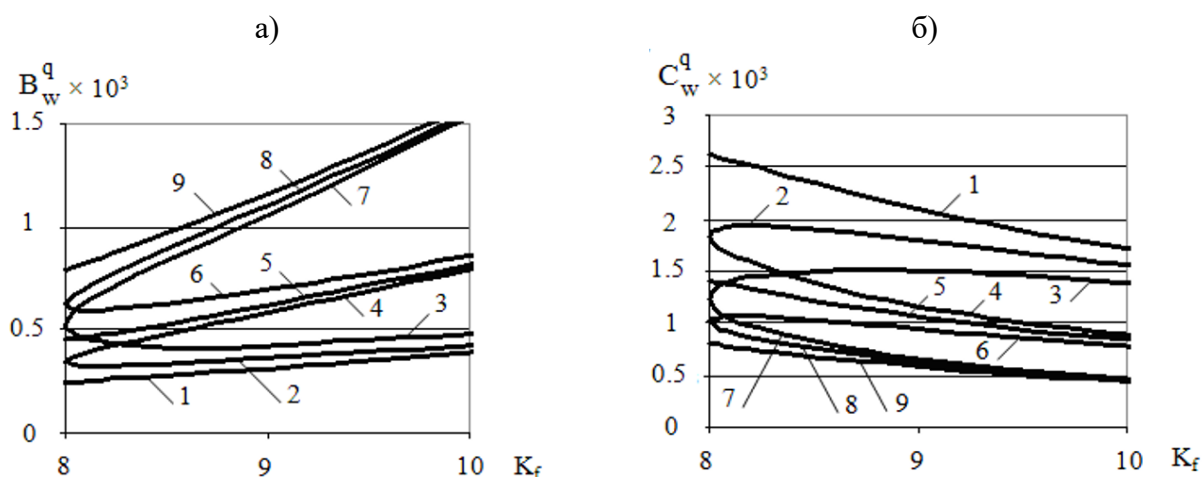


Рисунок 7 – Графики аппроксимирующих функций для расчёта максимального прогиба прямоугольных пластинок:

а) графики для параметра B_w^q ; б) графики для параметра C_w^q

Область определения построенных аппроксимирующих функций ограничена слева значением коэффициента формы, равным восьми, что соответствует квадратному очертанию пластинок. Для такого очертания наблюдается парное совпадение схем 2 и 4, 3 и 7, 6 и 8. Это обстоятельство определяет наличие общих точек графиков функций при указанном значении интегрального геометрического аргумента. При этом стыкуемые графики образуют характерные «петли». Слияние графиков, наблюдаемое с ростом значения коэффициента формы, показывает, что граничные условия закрепления отдельных сторон в меньшей мере оказывают влияние на жёсткость вытянутых прямоугольных пластинок.

Расхождения значений прогибов пластинок, вычисленных на основе построенных аппроксимирующих функций, со значениями тестовых решений не превысило 4,8 %.

Анализ результатов исследования

Погрешности вычислений максимальных прогибов по построенным функциям возрастают для вытянутых треугольных и ромбических пластинок с характерными углами, имеющими значения менее 20 или более 85 градусов. Для пластинок прямоугольного очертания рост погрешности наблюдается при отношении длин заданных сторон более пяти.

Построенными графиками проиллюстрировано положение об ограничении множества всех значений максимальных прогибов рассматриваемых пластинок с комбинированными граничными условиями в виде шарнирного опирания и жёсткого защемления решениями, полученными для однородных контурных условий.

Заключение

1. Построены аппроксимирующие функции для вычисления значений максимальных прогибов пластинок характерного вида и заданных граничных условий, лежащих на упругом винклеровом основании, от коэффициентов формы области, очерченной их контуром.

2. Установленные функциональные зависимости предназначены для непосредственного использования при расчёте пластинок рассмотренных очертаний, а также для получения опорных решений, предусмотренных МИКФ, при расчёте пластинок в виде произвольных треугольников, параллелограммов и трапеций, применяемых в качестве системообразующих элементов для расчётных схем строительных конструкций зданий и сооружений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Sahoo S., Veerendar C., Thammishetti N., Prakash S.S. Experimental and numerical study on behaviour of fibre reinforced lightweight hollow core slabs under different flexure to shear ratios // *Structures*. 2023. Volume 50. Pp. 1264-1284. <https://doi.org/10.1016/j.istruc.2023.02.099>
2. Zheng B., Zheng W., Cao B., Zhang Y. Nonlinear finite element analysis of non-symmetrical punching shear of rectangular flat slabs supported on square columns // *Engineering Structures*. 2023. Volume 277. 115451. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2022.115451>
3. Wang R., Fang Z., Lezgy-Nazargah M., Khosravi H. Nonlinear analysis of reinforced concrete slabs using a quasi-3D mixed finite element formulation // *Engineering Structures*. 2023. Volume 294. 116781. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2023.116781>
4. Sahoo S., Veerendar C., Prakash S.S. Experimental and numerical studies on flexural behaviour of lightweight and sustainable precast fibre reinforced hollow core slabs // *Construction and Building Materials*. 2023. Volume 377. 131072. <https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2023.131072>
5. Plans A., Grau D., Soltanalipour M., Ferrer-Ballester M., Marimon F., Andreu A. Three-dimensional finite element modeling for bending and pull-out tests of composite slabs // *Engineering Structures*. 2023. Volume 295. 116785. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2023.116785>
6. Коробко А.В. Геометрическое моделирование формы области в двумерных задачах теории упругости. Москва: Издательство АСВ, 1999. 320 с.
7. Поля Г., Серё Г. Изопериметрические неравенства в математической физике. Москва: Издательство КомКнига, 2006. 336 с.
8. Коробко В.И. Изопериметрический метод в строительной механике: Теоретические основы изопериметрического метода. Москва: Издательство АСВ, 1997. 390 с.
9. Коробко В.И., Коробко А.В., Морозов С.А., Прокуров М.Ю. Расчёт пластинок методом предельного равновесия. Орёл: Типография «Труд», 2012. 360 с.
10. Коробко А.В., Прокуров М.Ю., Черняев А.А. Развитие технической теории расчета пластинчатых конструкций на основе методов геометрического моделирования их формы // *Строительство и реконструкция*. 2015. № 1 (57). С. 17-21.
11. Прокуров М.Ю. Новый интерполяционный метод определения максимальных значений прогибов тонких упругих пластинок с произвольным выпуклым контуром // *Строительство и реконструкция*. 2016. № 2 (64). С. 39-46.
12. Фетисова М.А., Володин С.С. Коэффициент формы как геометрическая характеристика // *Молодой учёный*. 2011. № 5 (28). С. 105-107.
13. Фетисова М.А., Володин С.С. Применение метода интерполяции по коэффициенту формы для решения задач строительной механики // *Молодой учёный*. 2013. № 3 (50). С. 114-116.
14. Актуганов А.А. Применение метода интерполяции по коэффициенту формы к расчету пластинок на упругом основании, нагруженных сосредоточенной силой // *Строительство и реконструкция*. 2013. № 2 (46). С. 3-11.
15. Коробко В.И., Актуганов А.А. Применение метода интерполяции по коэффициенту формы к расчёту пластинок на упругом основании // *Строительная механика и расчёт сооружений*. 2014. № 1 (252). С. 18-24.
16. Прокуров М.Ю. Программа расчета максимального прогиба тонких пластинок на упругом основании методом интерполяции по коэффициенту формы // *Строительная механика и расчёт сооружений*. 2019. № 4 (285). С. 37-46.
17. Черняев А.А. Определение максимального прогиба треугольных пластинок с комбинированными граничными условиями с использованием отношения конформных радиусов // *Строительная механика и расчёт сооружений*. 2011. № 6 (239). С. 23-29.

REFERENCES

1. Sahoo S., Veerendar C., Thammishetti N., Prakash S.S. Experimental and numerical study on behaviour of fibre reinforced lightweight hollow core slabs under different flexure to shear ratios. *Structures*. 2023. Volume 50. Pp. 1264-1284. <https://doi.org/10.1016/j.istruc.2023.02.099>
2. Zheng B., Zheng W., Cao B., Zhang Y. Nonlinear finite element analysis of non-symmetrical punching shear of rectangular flat slabs supported on square columns. *Engineering Structures*. 2023. Volume 277. 115451. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2022.115451>
3. Wang R., Fang Z., Lezgy-Nazargah M., Khosravi H. Nonlinear analysis of reinforced concrete slabs using a quasi-3D mixed finite element formulation. *Engineering Structures*. 2023. Volume 294. 116781. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2023.116781>
4. Sahoo S., Veerendar C., Prakash S.S. Experimental and numerical studies on flexural behaviour of lightweight and sustainable precast fibre reinforced hollow core slabs. *Construction and Building Materials*. 2023. Volume 377. 131072. <https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2023.131072>
5. Plans A., Grau D., Soltanalipour M., Ferrer-Ballester M., Marimon F., Andreu A. Three-dimensional finite element modeling for bending and pull-out tests of composite slabs. *Engineering Structures*. 2023. Volume 295. 116785. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2023.116785>

6. Korobko A.V. Geometricheskoe modelirovanie formy oblasti v dvumernykh zadachakh teorii uprugosti [Geometric modeling of the shape of the region in two-dimensional problems of elasticity theory]. Moskva: Izdatel'stvo ASV, 1999. 320 p. (rus)
7. Polia G., Szegő G. Izoperimetricheskie neravenstva v matematicheskoy fizike [Isoperimetric inequalities in mathematical physics]. Moskva: Izdatel'stvo KomKniga, 2006. 336 p. (rus)
8. Korobko V.I. Izoperimetricheskii metod v stroitel'noy mekhanike: Teoreticheskie osnovy izoperimetricheskogo metoda [Isoperimetric method in structural mechanics: Theoretical foundations isoperimetric method]. Moskva: Izdatel'stvo ASV, 1997. 390 p. (rus)
9. Korobko V.I., Korobko A.V., Morozov S.A., Prokurov M.Yu. Raschyot plastinok metodom predel'nogo ravnovesiya [Calculation of plates using the limit equilibrium method]. Oryol: Tipografiya «Trud», 2012. 360 p. (rus)
10. Korobko A.V., Prokurov M.Yu., Chernyaev A.A. Razvitie tekhnicheskoy teorii rascheta plastinchatykh konstruktsiy na osnove metodov geometricheskogo modelirovaniya ikh formy [Development of the technical theory of calculation of plate structures on the basis of methods of geometric modeling of their shape]. *Stroitel'stvo i rekonstruktsiya*. 2015. Vol. 57. No. 1. Pp. 17-21. (rus)
11. Prokurov M.Yu. Novyy interpolatsionnyy metod opredeleniya maksimal'nykh znacheniy progibov tonkikh uprugikh plastinok s proizvol'nym vypuklym konturom [A new interpolational method of estimating maximum deflection values for thin elastic plates with arbitrary convex contour]. *Stroitel'stvo i rekonstruktsiya*. 2016. Vol. 64. No. 2. Pp. 39-46. (rus)
12. Fetisova M.A., Volodin S.S. Koeffitsient formy kak geometricheskaya kharakteristika [Shape factor as a geometric characteristic]. *Molodoy uchyonyy*. 2011. Vol. 28. No 5. Pp. 105-107. (rus)
13. Fetisova M.A., Volodin S.S. Primenenie metoda interpolatsii po koeffitsientu formy dlya resheniya zadach stroitel'noy mekhaniki [Application of the method of interpolation by the factor of shape for solving problems of structural mechanics]. *Molodoy uchyonyy*. 2013. Vol. 50. No 3. Pp. 114-116. (rus)
14. Aktuganov A.A. Primenenie metoda interpolatsii po koeffitsientu formy k raschetu plastinok na uprugom osnovanii, nagruzhennykh sosredotochennoy siloy [Application of the method of interpolation by the factor of shape to the calculation of plates founded on an elastic base and loaded with concentrated force]. *Stroitel'stvo i rekonstruktsiya*. 2013. Vol. 46. No 2. Pp. 3-11. (rus)
15. Korobko V.I., Aktuganov A.A. Primenenie metoda interpolatsii po koeffitsientu formy k raschyotu plastinok na uprugom osnovanii [Application of the method of interpolation by the factor of shape to the calculation of plates on an elastic base]. *Stroitel'naya mekhanika i raschyot sooruzheniy*. 2014. Vol. 252. No 1. Pp. 18-24. (rus)
16. Prokurov M.Yu. Programma rascheta maksimal'nogo progiba tonkikh plastinok na uprugom osnovanii metodom interpolatsii po koeffitsientu formy [Calculation programme for maximum deflection of thin elastic plates on elastic foundation using interpolation method based on shape factor]. *Stroitel'naya mekhanika i raschyot sooruzheniy*. 2019. Vol. 285. No 4. Pp. 37-46. (rus)
17. Chernyaev A.A. Opredelenie maksimal'nogo progiba treugol'nykh plastinok s kombinirovannymi granichnymi usloviyami s ispol'zovaniem otnosheniya konformnykh radiusov [Determination of the maximum deflection of triangular plates with combined boundary conditions using the ratio of conformal radii]. *Stroitel'naya mekhanika i raschyot sooruzheniy*. 2011. Vol. 239. No 6. Pp. 23-29. (rus)

Информация об авторах:

Коробко Андрей Викторович

ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева», г. Орел, Россия,
доктор технических наук, профессор, профессор кафедры мехатроники, механики и робототехники.
E-mail: ankor.66@mail.ru

Прокуров Максим Юрьевич

ФГБОУ ВО «Брянский государственный инженерно-технологический университет», г. Брянск, Россия,
кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры «Строительные конструкции».
E-mail: m.prokuroff@mail.ru

Information about authors:

Korobko Andrey V.

Orel State University named after I.S. Turgenev, Orel, Russia,
doctor of technical sciences, professor, professor of the department of mechatronics, mechanics and robotics.
E-mail: ankor.66@mail.ru

Prokurov Maxim Yu.

Bryansk State Technological University of Engineering, Bryansk, Russia,
candidate of technical science, docent, associated professor of the department of building structures.
E-mail: m.prokuroff@mail.ru