

ВЛ.И. КОЛЧУНОВ^{1,2}¹Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет (НИУ МГСУ), г. Москва, Россия²Научно-исследовательский институт строительной физики Российской академии архитектуры и строительных наук, г. Москва, Россия

ПРОБЛЕМА РАСКРЫТИЯ ТРЕЩИН В ЖЕЛЕЗОБЕТОНЕ

Аннотация. В статье рассмотрены различные аспекты проблемы оценки раскрытия трещин в железобетоне, опираясь на экспериментальные данные, полученные в исследованиях последних лет. Автором предложена классификация типов трещин, введен ряд новых гипотез, установленных экспериментально эффектов деформирования железобетона в зоне трещин. Сформулированные на этой основе принципы включают схемы распределение силовых потоков между трещинами, понятие о прогрессирующих магистральных трещинах и деформационном эффекте в железобетоне - специальном двухконсольном элементе в местной области около берегов трещины, новые обобщенные гипотезы, теоремы и функционалы о линейных и угловых деформациях сжатой и растянутой зон сечений железобетонных элементов на всех уровнях упруго-пластического деформирования. Предложенная модель составных стержней в виде единичных полосок для определения жесткости участка железобетона с пересекающимися трещинами позволила на порядок сократить дифференциальные уравнения теории составных стержней. Установлена связь и приведены аналитические зависимости для перемещений в трещине с раскрытием и сдвигом ее берегов, определен главный вектор перемещений и угол равнодействующей усилий в арматуре, пересекающей трещину. Построены расчетные зависимости для определения уровневых расстояний между трещинами и ширины раскрытия трещин. В рамках общей методологии рассматриваемой проблемы раскрытия трещин в железобетоне с использованием сформулированных принципов построена общая комбинированная численно – аналитическая модель строительной механики железобетона (МРМС), учитывающая деформационный эффект в трещине, моделируемый двухконсольным элементом (ДКЭ), типы трещин, пространственную поверхность распределения деформаций в сечении с трещиной и другие установленные экспериментально особенности механики железобетона.

Ключевые слова: эффект железобетона, гипотезы, расчетные модели, деформационный эффект, ширина раскрытия трещин, двухконсольный элемент, численно-аналитический метод.

VL.I. KOLCHUNOV¹¹Moscow State University of Civil Engineering (NIU MGSU), Moscow, Russia²Research Institute of Construction Physics of the Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, Moscow, Russia

THE PROBLEM OF CRACK OPENING IN REINFORCED CONCRETE

Abstract. The article discusses various aspects of the problem of assessing crack opening in reinforced concrete based on experimental data obtained in recent studies. The author proposed a classification of crack types, introduced a number of new hypotheses, established experimentally the effects of deformation of reinforced concrete in the crack zone. The principles formulated on their basis include schemes for the distribution of force flows between cracks, the concept of progressing main cracks and the deformation effect in reinforced concrete - a special two-console element in the local region near the crack banks, new generalized hypotheses, theorems and functionals about linear and angular deformations of the compressed and tensile zones of reinforced concrete element sections at all levels of elastic-plastic deformation. The proposed model of composite rods in the form of single strips for determining the stiffness of a section of reinforced concrete with intersecting cracks has made it possible to reduce the differential equations of the theory of composite rods by an order of magnitude

when solving such problems. The connection is established and analytical dependences for displacements in the crack with opening and shear of the crack banks are given. The main vector of displacements and the angle of equidirectional forces in the reinforcement crossing the crack are determined. Calculated dependences for determining the level distances between cracks and crack opening widths are constructed. Within the framework of the general methodology of the considered problem of crack opening in reinforced concrete, using the formulated principles, a general combined numerical-analytical model of the structural mechanics of reinforced concrete is constructed, which takes into account the deformation effect in the crack modeled by a double cantilever element, the types of cracks, the spatial surface of strain distribution in the cross section with the crack and other experimentally determined features of the mechanics of reinforced concrete, cracks types, spatial surface of strain distribution in the cross-section with a crack and other experimentally determined features of reinforced concrete mechanics.

Keywords: reinforced concrete effect, hypotheses, computational models, deformation effect, crack opening width, two-concole element, numerical-analytical method.

Введение

Механика железобетона является основой при обеспечении механической безопасности зданий и сооружений в условиях новых вызовов техногенного природного и террористического характера. Одной из ключевых и крайне противоречивых проблем современной теории железобетона является проблема раскрытия трещин. В последние два-три десятилетия для ее решения во всем мире накоплена значительная информация о механике деформирования и трещинообразования в железобетоне [1-11]. На современном новом инструментально-лабораторном уровне получены новые опытные данные о качественных и количественных характеристиках трещинообразования в железобетонных конструкциях при различных видах напряженного состояния и для различных видов бетона и арматуры, например в исследованиях [9-17]. Это несомненно является основой для дальнейшего сближения моделей с описываемыми ими физическими явлениями. В особенности это касается моделирования процесса образования и раскрытия трещин в железобетоне, где до настоящего времени отсутствуют общепризнанные подходы и решения таких задач, в особенности для сложных напряженных состояний, для которых и до настоящего времени существуют различные, порой полярные точки зрения [1, 5, 10]. При этом, как показано в [5], неоспоримым остается то, что расчетные зависимости, используемые в моделях, должны иметь обозримый вид, адекватно отражать главное в физике описываемых явлений и позволять творчески их использовать в инженерной практике. Об этом неоднократно высказывался еще А.А. Гвоздев [18], отмечая, что надо уметь выразить результат, где выявляются существенные трудности. Проецируя такой подход на нынешние воззрения к решению обсуждаемой проблемы, можно видеть, что современная теория трещиностойкости железобетона должна строиться на общих расчетных предпосылках совместной работы бетона и арматуры при различных видах напряженного состояния в конструкциях, не противоречить опытным данным и сущности процесса деформирования составных твердых тел, обладающих различными физико-механическими свойствами и рассматривать элемент в целом, а не отдельные сечения.

В последние два десятилетия в рамках такой концепции и на общей методологической основе проводятся исследования по этой проблеме под руководством автора [9, 12, 19, 20]. В рассматриваемой статье представлены исходные предпосылки, основные положения и результаты обобщений этих исследований по рассматриваемой проблеме теории трещин в железобетоне, а также возможные направления их развития на основе современных технологий экспериментальных исследований конструкций и сближения физических явлений в железобетоне на основе традиционной механики железобетона и механики разрушения.

Методы исследования. Основные принципы.

В основу рассматриваемого подхода решения проблемы раскрытия трещин в железобетоне положены ряд принципиально новых гипотез и принципов трещинообразования в рассматриваемом двухкомпонентном материале.

Предложенная автором классификация трещин в железобетоне [14, 21] включает следующие типы:

- регулярные трещины, когда растянутая зона конструкции покрывается сетью трещин и эта зона с такими трещинами моделируется анизотропной средой железобетона;
- магистральные трещины, которыми учитывается такое физическое явление, как нарушение сплошности железобетона;
- базовые трещины, определяемые таким физическим явлением, как средовая и межсредовая концентрация: геометрическая, силовая и вызванная перемещениями внешними и внутренними.

Кроме того, при классификации учитываются следующие критерии типов трещин:

- тип I-III трещин, для которых выполняется условие $M > M_{crc}$, $M_t < M_{t,crc}$ и $Q \geq Q_{crc}$; $M < M_{crc}$, $M_t > M_{t,crc}$, или $M_t < M_{t,crc}$, $Q > Q_{crc}$;
- тип IV, для которых характерно развитие, определяемое критерием механики разрушения ($d\zeta_{bu} / dh_{crc} = 0$) [23];
- тип V - трещины в сжатом бетоне;
- тип VI - трещины в зоне анкеровки.

Рассматриваемые типы трещин охватывают стержневые, плоские и пространственные конструкции. На основе приведенной классификации в рамках рассматриваемой концепции разработаны численно-аналитические методы с расчленением конструкций и конструктивных систем на подконструкции [13]. При этом модели базируются на следующих фундаментальных для железобетона принципах.

Принцип 1. Анизотропная среда железобетона между трещинами включает в себя силовые потоки между блоками (дисками) бетона или железобетона для изотропной среды между трещинами, арматуру в местной области у берегов трещины, а также геометрию определяемую формами трещин при различных напряженных состояниях [16, 19, 22, 23].

Параметры этой среды определяются проецированием тензоров диаграмм « $\sigma_i - \varepsilon_i$ » на соответствующие координатные плоскости (рисунок 4). Здесь приняты следующие обозначения: деформации - $\varepsilon_{i,u} = \varepsilon_{b,u}$, напряжения - $\sigma_{i,u} = R_b$, коэффициент поперечных деформаций $\mu(\lambda)$ и модуль пластичности бетона $E(\lambda)$. Значения коэффициента поперечных деформаций и модуля пластичности бетона может быть записано, следуя работам [19, 22, 23], в следующем виде:

$$E(\lambda) = \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}; \quad (1)$$

$$0,167 \leq \mu(\lambda) = 0,5 - 0,049875 \cdot \frac{E(\lambda)}{100 \cdot R_b} \leq 0,357. \quad (2)$$

Здесь $\mu(\lambda)$ – аппроксимируется уравнением прямой на основе данных экспериментов, в которых эта величина имела ограничения от 0,167 до 0,357.

Рассмотрим главные диаграммы деформирования бетона « $\sigma_1 - \varepsilon_1$ » и « $\sigma_2 - \varepsilon_2$ » применительно к сложному напряженному состоянию железобетонного элемента – изгибу с кручением. Из формулы для определения интенсивности деформаций находим $\varepsilon_{1,u}$, принимая предельные деформации равными ограничению для ε_1 , определим значение деформации $\varepsilon_{3,u}$ из выражения:

$$\varepsilon_{3,u} = \frac{\sigma_{3,u}}{E_{b,u}(\lambda)} - \frac{\mu_{b,u}(\lambda) \cdot (\sigma_{1,u} + \sigma_{2,u})}{E(\lambda)} = \left(\frac{\mu_{b,u}(\lambda)}{E_{b,u}(\lambda)} \right) \cdot (\sigma_{1,u} + \sigma_{2,u}). \quad (3)$$

Здесь напряжение $\sigma_{1,u}$ принимается равным предельному для σ_1 , найденному из формулы для определения интенсивности напряжений σ_i .

Далее определим значение деформаций $\varepsilon_{2,u}$, принимая при этом напряжения $\sigma_{3,u} = 0$:

$$\varepsilon_{2,u} = \frac{\sigma_{2,u}}{E_{b,u}(\lambda)} - \mu_{b,u}(\lambda) \cdot (\sigma_{1,u} + \sigma_{3,u}) = \frac{\sigma_{2,u}}{E_{b,u}(\lambda)} - \mu_{b,u}(\lambda) \cdot (\sigma_{1,u} + 0) = \frac{\sigma_{2,u}}{E} - \mu_{b,u}(\lambda) \cdot \sigma_{1,u}. \quad (4)$$

Выполнив необходимые алгебраические преобразования - первый переход от $\sigma_i - \varepsilon_i$ к главным диаграммам «деформации – напряжений» $\sigma_1 - \varepsilon_1$ и $\sigma_2 - \varepsilon_2$, получим следующие ограничения:

$$\sigma_1 \leq \frac{R_b}{0.87} = 1,149R_b; \quad \sigma_2 \leq 0,5 \cdot \frac{R_b}{0.87} = 0,575R_b.$$

Напряжение $\sigma_{2,u}$ найдем из условия:

$$\sigma_{1,u} + \sigma_{2,u} = \sigma_{x,u} + \sigma_{z,u}. \quad (5)$$

Напряжение $\sigma_{z,u}$ определяется как местное напряжение от обобщенной опорной реакции $R_{sup,u}$:

$$\sigma_{z,u} = \frac{R_{sup,u}}{A_{red}} \cdot (\varphi_z + k \cdot \varphi_{2,z}). \quad (6)$$

Здесь φ_z или $k \cdot \varphi_{2,z}$ – коэффициенты для учета местных нормальных напряжений σ_z в направлении оси z от сосредоточенных сил, принимаемые по таблице 39 норм¹, а также с учетом ограничения $\sigma_{z,u} \leq \sigma_{z,pl}$.

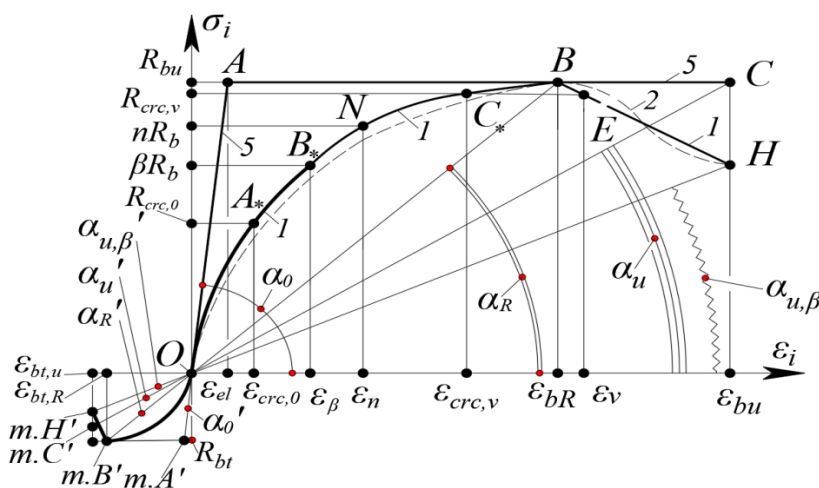


Рисунок 1 - Диаграмма связи $\sigma_i - \varepsilon_i$ для сжатого и растянутого бетона

¹ СНиП 2.03.01 – 84 «Бетонные и железобетонные конструкции» (утв. Постановлением Госстроя СССР от 20 августа 1984 г. № 136)

В результате преобразований диаграммы $\sigma_i = \sigma_{b,u}$ в точках С, В, А, D (см. рисунок 1) получено также выражение для нахождения значения угла α_0 , определяющего наклон главных площадок [14,20,23], а также остальные диаграммы связи «напряжения-деформации»: связь « $\sigma_1 - \varepsilon_1$ »; связь « $\sigma_2 - \varepsilon_2$ »; связь « $\sigma_{x_1} - \varepsilon_{x_1}$ »; связь « $\sigma_{z_1} - \varepsilon_{z_1}$ »; связь « $\tau_{z_1 x_1} - \gamma_{z_1 x_1}$ »; связь « $\tau_{y_1 x_1} - \gamma_{y_1 x_1}$ »; связь « $\tau_{zx, Mt} - \gamma_{zx, Mt}$ »; связь « $\tau_{zx, Q} - \gamma_{zx, Q}$ »; связь « $\tau_{\Sigma, zx} - \gamma_{\Sigma, zx}$ »; связь « $\tau_{yx} - \gamma_{yx}$ »; связь « $\sigma_z - \varepsilon_z$ »; связь « $\sigma_x - \varepsilon_x$ ».

Так, для диаграмм « $\sigma_{x_1} - \varepsilon_{x_1}$ » и « $\sigma_{z_1} - \varepsilon_{z_1}$ » и « $\tau_{z_1 x_1} - \gamma_{z_1 x_1}$ » вычисляем значения деформаций и напряжений при помощи второго перехода (от главных деформаций-напряжений для осей x_1, y_1, z_1) по формулам:

$$\gamma_{z_1 x_1} = \varepsilon_{q, z_1 x_1} = 2 \cos \alpha_0 \sin \alpha_0 (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \quad (7)$$

Для диаграммы « $\tau_{y_1 x_1} - \gamma_{y_1 x_1}$ » вычисляем значения деформаций сдвига и касательных напряжений при помощи **третьего перехода** от диаграмм « $\sigma_x - \varepsilon_x$ » и « $\tau_{yx} - \gamma_{yx}$ »:

$$\gamma_{y_1 x_1} = \frac{\tau_{y_1 x_1}}{G} = \left(\frac{\sigma_x}{2} \sin 2\alpha - \tau_{yx} \cos 2\alpha \right) / \frac{E(\lambda)}{2(1 + \mu(\lambda))}, \quad (8)$$

и

$$\gamma_{zx} = (\varepsilon_{x_1} - \varepsilon_{z_1}) \cdot \sin 2\alpha + \gamma_{z_1 x_1} \cos 2\alpha. \quad (9)$$

Значения деформаций $\gamma_{zx, Mt, el}$, $\tau_{zx, Mt, el}$ и $\gamma_{zx, Mt, pl}$, $\tau_{zx, Mt, pl}$ определяются при помощи сложной функции, представленной в работах [14, 20, 23, 24]:

$$\gamma_{zx, Mt} = \tau_{zx, Mt} / G(\lambda) = 2 \cdot \tau_{zx, Mt} (1 + \mu) / E(\lambda). \quad (10)$$

Кроме суммарной диаграммы « $\tau_{yx} - \gamma_{yx}$ » определим также значения деформаций сдвига и касательных напряжений для диаграмм « $\tau_{zx, Mt} - \gamma_{zx, Mt}$ » (от действия крутящего момента) и « $\tau_{zx, Q} - \gamma_{zx, Q}$ » (от действия поперечной силы):

$$\gamma_{zx, Q} = \tau_{zx, Q} / G = 2(\tau_{zx} - \tau_{zx, Mt})(1 + \mu(\lambda)) / E(\lambda) \quad (11)$$

$$\tau_{zx, Q} = \tau_{zx} - \tau_{zx, Mt}. \quad (12)$$

Значения деформаций сдвига и касательных напряжений для диаграммы « $\tau_{yx} - \gamma_{yx}$ » вычисляем аналогичным образом при помощи четвертого перехода:

$$\gamma_{yx} = k_* \cdot k_{**} \cdot \gamma_{zx, Mt, el}, \quad (13)$$

$$\tau_{yx} = \gamma_{yx} \cdot G = k_* \cdot k_{**} \cdot \gamma_{zx, Mt, el} \cdot \frac{E(\lambda)}{2(1 + \mu(\lambda))} \leq \tau_{pl} \left(\frac{c}{h_0} \right). \quad (14)$$

Здесь для четвертого перехода принято $\gamma_{zx, pl} = k_* \cdot \gamma_{zx, Mt, el}$; $k_* = M_t / M_{t, crc}$ и ограничение $\tau_{pl} \leq R_{ch}$.

Аналогично выполняется пятый переход для касательных напряжений от кручения $\tau_{zx, Mt}$ через касательные напряжения $\tau_{yx, Mt}$.

Принцип 2 определяет развитие в железобетоне магистральных трещин, которыми в рамках механики разрушения учитывается такое физическое явление, как эффект нарушения сплошности двухкомпонентного материала с помощью двухконсольного элемента в местной области около берегов трещины.

В рамках механики разрушения железобетона для анализа магистральных трещин автором [14, 20, 23] введен специальной двухконсольный элемент (ДКЭ) и установлена его физическая сущность, заключающаяся в реакции между несплошностью бетона и сплошностью рабочей арматуры (рисунок 2). Её математическое выражение представлено следующей зависимостью:

$$\zeta_{cu} = \lim_{\delta A \rightarrow 0} \left(\frac{\delta W - \delta V}{\delta A} \right) = \frac{dW - dV}{dA}. \quad (15)$$

Здесь δV – уменьшение потенциальной энергии тела при продвижении трещины на малое приращение δa ; δW – дополнительная работа, совершаемая над телом при продвижении трещины на малое приращение δa .

Посредством специального двухконсольного элемента для железобетона установлена связь между податливостью – параметром классических методов **строительной механики** (метод сил, метод перемещений, смешанный метод, метод конечных элементов) и параметрами механики разрушения, для определения которых получена система канонических уравнений (рисунок 2) следующего вида:

$$\left\{ \begin{array}{l} X_1 \delta_{11} + X_2 \delta_{12} + X_3 \delta_{13} + \Delta_{1p} + \Delta_2 = 0; \\ X_1 \delta_{21} + X_2 \delta_{22} + X_3 \delta_{23} + \Delta_{2p} - \Delta_2 + (h_{crc} - t_b - 0,625 \cdot m) \cdot (\phi_2 + \Delta \phi) = 0; \\ X_1 \delta_{31} + X_2 \delta_{32} + X_3 \delta_{33} + \Delta_{3p} - \Delta_2 + (h_{crc} - 0,333 \cdot t_b) \cdot (\phi_2 + \Delta \phi) - 0,333 \cdot (\phi_1 - \Delta \phi) \cdot (h_{crc} - 0,333 \cdot t_b)^2 = 0 \end{array} \right\}. \quad (16)$$

здесь X_1, X_2, X_3 – внутренние неизвестные усилия тела, получаемые методом сил, при продвижении трещины h_{crc} ; $\Delta_2, \Delta_3, \Delta_6$ – неизвестные перемещения, определяемые из эллипсоида, описывающего поверхность трещины.

В результате, критерий железобетона из механики разрушения записывается в виде (17):

$$\frac{d\zeta_{cu}}{dh_{crc}} = 0, \quad (17)$$

а параметр продвижения трещины h_{crc} находится из теории железобетона:

$$h_{crc} = h_0 - \frac{\sigma_s \cdot A_s}{R_b \cdot b}. \quad (18)$$

Важно отметить, что опытные эпюры распределения деформаций, подтверждающие принцип 2, были получены в опытах Я.М. Немировского, Б.Ш. Шамурдова и работах автора [14, 20, 23].

Принцип 3. В железобетонной конструкции сопротивление растянутого бетона может быть представлено трансверсально-изотропной средой, а деформационный эффект железобетона может быть выражен через основной параметр предельных состояний второй группы - ψ_s (или $\psi_{s,sw}$) проф. В.И. Мурашева.

Для среднего значения продольного усилия N_{sm} ($N_{s,m} = \varepsilon_s \cdot \psi_s \cdot E_s \cdot A_s$) и среднего значения поперечного усилия $Q_{s,m}$ ($Q_{s,m} = \varepsilon_s \cdot \psi_{Q,s} \cdot E_s \cdot A_s$) на участке между смежными трещинами можно говорить о существовании функциональной связи через **суммарное среднее усилие рабочей арматуры** $N_{s,m,sum}$ (продольной и хомутов), выраженное в виде равнодействующей $N_{s,m,sum} = \sqrt{N_{s,m}^2 + Q_{s,m}^2}$. Эти усилия передаются через общий параметр

$\psi_{s,j}$ в виде деформационного **эффекта железобетона и нагельного эффекта** для арматурного стержня, пересекаемого трещиной, с двумя заземленными концами при поворотах заделок, а также при раскрытии трещин, сдвига берегов трещины и смятия бетона под арматурным стержнем.

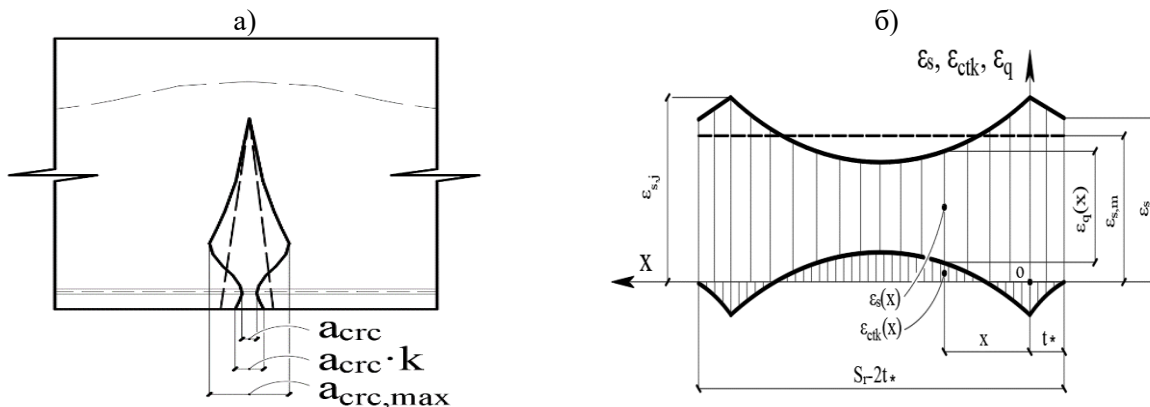


Рисунок 2 - Деформационный эффект железобетона: форма трещины, трансформирующаяся от треугольника до эллипсоида (а); и реакция от несплошного бетона до сплошной арматуры; (б)-относительные деформации арматуры и растянутого бетона по оси x

Важно отметить что параметр $\psi_{s,j}$ учитывается в характеристиках растянутого бетона при определении характеристик упруго-пластического деформирования железобетона для предельных состояний второй группы: $I_{red} = I_b / \psi_s$, $I_{red} = I_b / \psi_s$, $I_{red} = I_b / \psi_s$, $v_* = 1 / \psi_s$, $E_{s,red} = E_s / \psi_s$,

Перемещению (U_s) соответствуют нормальные усилия $N_s = \sigma_s A_s$, а перемещению (V_s)- касательные усилия $Q_s = \tau_s A_s$ в продольной растянутой арматуре (σ_s , τ_s - средние по сечению арматуры нормальные и касательные напряжения). Согласно исследованиям [8-10, 16, 20, 23] нормальные перемещения равны $U_s = 0.5l_{crc}\epsilon = 0.5l_{crc}\sigma_s\psi_s / E_s = 0.5l_{crc}N_s\psi_s / A_sE_s$ (l_{crc} - расстояние между трещинами). Отдельной группой величин учитывается влияние сцепления арматуры с бетоном на ее деформации и представляет собой горизонтальную податливость арматурного стержня: $B_s = 0.5l_{crc}\psi_s / E_sA_s$. Экспериментальные исследования показывают, что податливость тангенциальных перемещений V_s можно выразить через горизонтальную податливость B_s , используя некоторый переходной коэффициент η_τ : $V_s = Q_sB_s\eta_\tau$.

Новые обобщенные гипотезы, теоремы и функционалы. В рамках рассматриваемой теории трещинообразования железобетона автором построены функционалы (из семейств метода сеток) для сжатой и растянутой областей железобетонного элемента [14, 15, 22, 23]. С их помощью линейные и угловые деформации в расчетном сечении сложного напряженного элемента определяются на всех стадиях деформирования с учетом их градиентов в трещинах. **Первый функционал** $f_{5,*}(y,z)$ представляет собой две функции по оси y и по оси z . **Второй функционал** $f_{***}(x,z,y)$ выражен тремя функциями по оси x , по оси z , по оси y . Изгибающие моменты представлены **третьим неопределенным**

функционалом $f_{\varepsilon, \text{int}, \text{vol}}(x, y, z)$ и выражены специальной функцией $f_{\text{sum}, \Delta-d}$ в расчетных сечениях элемента, а для крутящих моментов используется **четвертый неопределенный функционал** $f_{5, **, \int \int}(z, y)$.

Применение построенных функционалов определено тремя новыми гипотезами.

Первая – о распределения обобщенных линейных деформаций $\varepsilon_{x,b}$ и $\varepsilon_{x,s}$ в сечении железобетонного элемента через специальную геометрическую объемную фигуру, позволяющую учитывать деформацию поперечного сечения в упругопластической стадии I-III, и наличие градиентов деформаций в трещине.

Вторая - о распределении обобщенных угловых деформаций суммарных относительных деформаций сдвига в бетоне и арматуре ($\gamma_{\text{sum},b}$ и $\gamma_{\text{sum},s}$) через специальную геометрическую объемную фигуру позволяющую учитывать деформацию поперечного сечения в упругопластической стадии I-III и наличие градиентов деформаций в трещине.

Третья - о моделировании жесткости железобетонного элемента с пересекающимися трещинами единичной составной полоской, которая позволила для железобетона на порядок сократить дифференциальные уравнения для железобетонного элемента по отношению к уравнениям теории составных конструкций А.Р. Ржаницына.

Определение главного вектора перемещений и усилий в арматуре, пересекающей трещину. Главный вектор перемещений $\vec{u}$ усилий в арматуре в трещине характеризуется двумя величинами u_{gi} , v_{gi} [8] и связан с нормальными $\sigma_{s,i}$ и касательными напряжениями $\tau_{s,i}$ в арматуре (рисунок 3):

$$\begin{cases} U_s = 0.5a_{crc} \sin \theta - 0.5\Delta_s \cos \theta \\ V_s = 0.5a_{crc} \cos \theta + 0.5\Delta_s \sin \theta \end{cases} \quad (19)$$

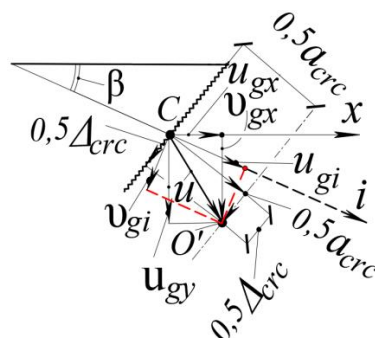


Рисунок 3 - Связанные перемещения стержней арматуры u_{gi} и v_{gi} в трещине с раскрытием a_{crc} и сдвигом их берегов Δ_{crc} , учитываемые главным вектором усилий $\vec{u}$ и углом главного вектора β

Составляющие главного вектора по некоторым ортогональным направлениям связаны между собой:

$$u_{gz} = \frac{0.5 \cdot a_{crc} - u_{gx} \cdot \sin \alpha}{\cos \alpha}; \quad (20)$$

$$v_{gi} = u_{gz} \cdot \cos \beta_i - u_{gx} \cdot \sin \beta_i; \quad (21)$$

Тогда, получим:

$$\cos \beta = 0,5 A_{\beta} \pm \sqrt{(0,5 A_{\beta})^2 - B_{\beta}}; \quad (22)$$

$$A_{\beta} = 2 \cdot v_{gi} \cdot u_{gz} / (u_{gx}^2 + u_{gz}^2); \quad B_{\beta} = (v_{gi}^2 - u_{gx}^2) / (u_{gx}^2 + u_{gz}^2).$$

Здесь

Из зависимости (21), имеем:

$$u_{gi} = u_{gx} \cdot \cos \beta_i + u_{gy} \cdot \sin \beta_i. \quad (23)$$

Определения расстояния между трещинами и ширины их раскрытия. Известно, что трещинообразование, развитие и раскрытие трещин в железобетоне зависит от характера напряженно-деформированного состояния, соотношения внешних нагрузок, геометрии сечения, прочностных и деформативных характеристик бетона, характера армирования и ряда других факторов. При известных базовых расстояниях между трещинами первого уровня вдоль поперечной или продольной арматуры в плосконапряженных железобетонных конструкциях сплошного и составного сечения несложно перейти к определению напряжений в арматуре $\sigma_{s,x}$, деформаций в бетоне $\varepsilon_{bt}(y)$ и относительных взаимных смещений арматуры и бетона $\varepsilon_g(y)$ в произвольном сечении z на последующих уровнях трещинообразования [15, 22, 23].

В соответствии с расчетной схемой второго уровня (рисунок 4) из уравнения проекций всех сил на ось $\Sigma Y = 0$ для поперечной арматуры в сечении с координатой z относительные взаимные смещения арматуры и бетона $\varepsilon_g(y)$ можно определить из зависимости:

$$\varepsilon_g(y) = \varepsilon_{sw}(y) - \varepsilon_{bt}(y). \quad (24)$$

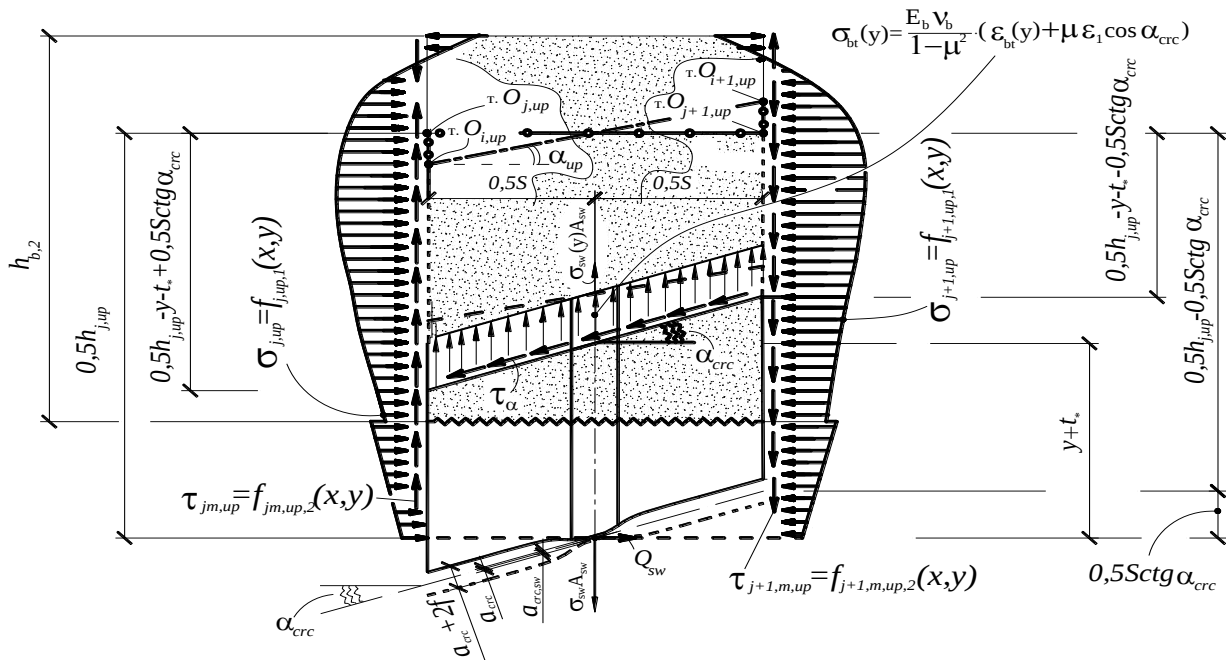


Рисунок 4 - Уровневая модель для определения деформаций растянутого бетона $\varepsilon_b(z)$ вдоль оси поперечной арматуры на i -том уровне образования трещин, расстояния между трещинами и ширины их раскрытия в плосконапряженной железобетонной конструкции сплошного и составного сечения

После дифференцирования (24) по y , получим:

$$\frac{d\varepsilon_g(y)}{dy} + B\varepsilon_g(y) = \frac{D_{14}}{D_{13}} \quad (25)$$

Решение неоднородного дифференциального уравнения первого порядка (25) имеет вид:

$$\varepsilon_g(y) = C \cdot e^{-By} + \frac{D_{14}}{D_{13} \cdot B} \quad (26)$$

Постоянную интегрирования C находят из граничного условия, в соответствии с

которым при $y = 0$, $\varepsilon_g(y) = \varepsilon_{sw} + \frac{\Delta T}{A_{sw} E_{sw}} - \frac{\sigma_{bt,c}}{\nu_b E_b}$;

$$C = \varepsilon_{sw} + \frac{\Delta T}{A_{sw} E_{sw}} - \frac{\sigma_{bt,c}}{\nu_b E_b} - \frac{D_{14}}{D_{13} \cdot B} \quad (27)$$

Здесь $\frac{\sigma_{bt,c}}{\nu_b E_b}$ соответствует деформациям бетона $\varepsilon_{bt}(y)$ в сечении, расположенном на расстоянии t_* от сечения с трещиной (см. рисунок 2 б). При этом значения напряжений $\sigma_{bt,c}$ принимаются со знаком минус здесь и во всех ниже приведенных формулах. Тогда,

$$\varepsilon_g(y) = \left(\varepsilon_{sw} + \frac{\Delta T}{E_{sw} A_{sw}} - \frac{\sigma_{bt,c}}{\nu_b E_b} - \frac{D_{14}}{D_{13} \cdot B} \right) e^{-By} - \frac{D_{14}}{D_{13} \cdot B} \quad (28)$$

Здесь B – параметры, зависящие от сцепления арматуры с бетоном, выраженные в виде функций от предельных деформаций удлинения бетона и характеристик, учитывающих эффект нарушения сплошности, т.е. выраженные через напряжение сжатия $\sigma_{bt,c}$ и результирующую условных касательных напряжений в местной зоне, прилегающей к трещине ΔT . Эти параметры определяются в соответствии с предложениями [1-3, 12]:

$$B = \frac{S_s \cdot G}{K \cdot A_s \cdot E_s}; \quad B_2 = \frac{\delta Q}{t B}; \quad B_3 = \varepsilon_s + \frac{\Delta T}{E_s A_s} - \frac{\sigma_{bt,s}}{\nu_b E_b} - B_2;$$

$$B_4 = 1 + \frac{\sigma_{bt,c}}{(K-1)B_{3,*} \nu_b E_b} + \frac{\varepsilon_{bt,u}}{B_{3,*}(K-1)} \quad (29)$$

В формулах (26) – (29) S_s – периметр поперечного сечения арматуры; ε_s – деформации арматуры в трещине; ΔT – результирующая условных касательных напряжений в местной

зоне, прилегающей к трещине; $\tau(x)$ – условные касательные напряжения; $t = \frac{A_s E_b}{2\mu}$,
 $\alpha = \frac{E_s}{E_b}$, $\mu = \frac{A_s}{b \cdot h_0} \cdot \frac{1}{K} = 1 + \frac{E_{sw} \cdot A_{sw}}{D_{13}}$ (в случае действия только продольной силы - $\frac{1}{K} = 1 + 2\mu\alpha$); $D_{i,j}$ – выражены в виде функций от усилий в сечениях, ограничивающих

представительный объем бетона, армирования и зоны сцепления, которые зависят от параметров $S; b; E_b; \nu_b; \mu_b; \alpha_{crc}; h_{j,up}; h_{j+1,up}; Q_{j,up}; Q_{j+1,up}; M_{j,up}; M_{j+1,up}; I_{m,up}$.

Располагая напряжениями в продольной и поперечной арматуре в сечении с опасной наклонной трещиной (по критерию максимальной ширины раскрытия на уровне оси продольной арматуры), представляется возможным определить функциональное расстояние между трещинами l_{crc} вдоль осей продольной и поперечной арматуры:

$$l_{crc} = \frac{2(\ln B_4 - B t_*)}{-B} \quad (30)$$

Здесь следует отметить, что для области действительных чисел на параметр B_4 накладываются следующие ограничения:

$$0 < B_4 < e^{B \cdot t_b}, \quad (31)$$

Сравнивая функциональное и уровневое значение l_{crc} оценивается возможность появления последующих уровней трещинообразования.

Анализ формулы (30) показывает, что увеличение деформаций в арматуре при росте нагрузки вызывает уменьшение расстояния между трещинами. При этом появление нового уровня трещинообразования соответствует уровню нагрузки, при котором соблюдается следующее неравенство

$$l_{crc,i} \leq \eta \cdot l_{crc,i-1} \quad (32)$$

здесь η - коэффициент, учитывающий уменьшение расстояния между смежными трещинами, определяемый как отношение напряжения в растянутой арматуре в пространственном сечении к напряжению, при котором образуется трещина.

Таким образом, трещинообразование в конструкции продолжается до момента разрушения. При этом выделяется не один (как это принято в ряде известных методик), а несколько уровней трещинообразования:

$$\left. \begin{aligned} l_{crc} &> l_{crc,1} - \text{трещин нет;} \\ l_{crc,1} &\geq l_{crc} > l_{crc,2} - \text{первый уровень;} \\ l_{crc,2} &\geq l_{crc} > l_{crc,3} - \text{второй уровень;} \\ &\dots\dots\dots \\ l_{crc} &\geq 6d - \text{последний уровень.} \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

Располагая уровнями трещинообразования вдоль продольной и поперечной арматуры плосконапряженной железобетонной составной конструкции, строится веер различных трещин, прилегающих к месту приложения сосредоточенной силы и к опоре. Степень реализации трещин (пересекут ли эти трещины поперечную арматуру, либо ее будет пересекать только опасная наклонная трещина) определяются из рассмотрения напряженно-деформированного состояния вдоль хомутов на основании аналогичной расчетной схемы следующего уровня. Расстояние между трещинами является важнейшим параметром необходимым для определения ширины раскрытия трещин в железобетонных конструкциях.

Коэффициент, учитывающий неравномерное распределение относительных деформаций растянутой арматуры между трещинами в рассматриваемой модели трещинообразования, определяется следующей формулой:

$$\psi_S = \frac{2 \cdot K \cdot B_3}{\varepsilon_S \cdot l_{crc} \cdot B} \cdot \left[1 - e^{-B \cdot (0.5 l_{crc} - t_*)} \right] + \frac{2}{\varepsilon_S \cdot l_{crc}} \left(\varepsilon_S + \frac{\Delta T}{E_S A_S} - K \cdot B_3 \right) \cdot (0.5 l_{crc} - t_*) +$$

$$+ \frac{\delta Q \cdot K}{\varepsilon_S \cdot l_{crc} \cdot B \cdot t_*} (0,5l_{crc} - t_*)^2 + \frac{2 \cdot \varepsilon_S \cdot E_S \cdot A_S + \Delta T}{\varepsilon_S \cdot l_{crc} \cdot E_S \cdot A_S} \cdot t_* \quad (34)$$

Теперь можно перейти к нахождению относительных взаимных смещений $\varepsilon_g(y)$ арматуры и бетона на различных участках между трещинами. В итоге зависимость для ширины раскрытия трещин принимает вид:

$$a_{crc} = 2 \int_0^{t_*} \varepsilon_g(y_1) dy_1 + \int_0^{\eta \cdot l_{crc}} \varepsilon_g(y) dy + \int_{\eta \cdot l_{crc}}^{l_{crc}} \varepsilon_g(y) dy = -\frac{2\Delta T}{G} + \frac{2B_3}{B'} (1 - e^{-B'(0,5l_{crc} - t_*)}) + 2B'_2 (0,5l_{crc} - t_*), \quad (35)$$

После соответствующих преобразований и некоторых упрощений получим:

$$a_{crc} = \varphi_2 \cdot \varphi_3 \cdot \left(-\frac{2 \cdot \Delta T}{G} - \frac{2 \cdot B_{a,2}}{B} - \frac{2 \cdot B_2}{B} \cdot \ln \left(1 + \frac{B_{a,2} \cdot A_{sw} \cdot E_{sw}}{q_{sw} \cdot S + B_{a,1} \cdot A_{sw} \cdot E_{sw}} \right) \right). \quad (36)$$

Здесь φ_2 - коэффициент, учитывающий профиль рабочей арматуры, принимаемый равным: 0.5 - для арматуры периодического профиля и канатной; 0.8 - для гладкой арматуры; φ_3 - коэффициент, учитывающий профиль рабочей арматуры, принимаемый равным: 1.0 - для изгибаемых и внецентренно сжатых элементов; 1.2 - для растянутых элементов.

Принцип 4. Уравнения механики железобетона для конструкций с различными типами трещин могут быть построены в замкнутом (не распадающемся) виде, используя принцип Лагранжа и условия равенства нулю частных производных обобщенной функции с расчетными зависимостями для предельных состояний первой или второй группы. При этом применительно к первой группе предельных состояний усилия и проекции различных трещин на горизонталь (вертикаль) в расчетном сечении привязываются к обобщенной силе – экстремально установленной опорной реакции R_{sup} . Обобщенная функция при этом записывается в виде:

$$F_i = f(R_{sup}, x_B, \sigma_s, x, \sigma_c, \sigma_{s,I}, \sigma_{c,1}, C_2, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5). \quad (37)$$

Для предельных состояний второй группы в привязке к максимальной ширине раскрытия трещин первого и второго типа обобщенная функция имеет вид:

$$F_{1,2} = f(q_{sw}, x_B, \sigma_s, x, \sigma_b, \sigma_{s,I}, \sigma_{b,1}, C_2, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6, \lambda_7), \quad (38)$$

трещин третьего типа:

$$F_3 = f(q_{sw}, x_{B,2}, \sigma_{s,3}, c_2, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \quad (39)$$

Расчетные параметры входящие в (37)-(39) зависят от геометрических характеристик железобетонных конструкций, механических характеристик бетона и арматуры, параметров сцепления, параметров напряженно-деформированного состояния в расчетных поперечных сечениях $K-K$, проходящих через начало $I-I$ и конец $II-II$ наклонной (или пространственной) трещины, соответственно – $S, B, B_{a,1}, B_{a,2}, A_{sw}, E_{sw}, q_{sw}, q_{sw,hor}, Q_{s,3}, h_0, \tau_b, x, x_{B,2}, \sigma_b, \sigma_s, \sigma_{s,1}, \tau_{xy,2}, a, b, R_{sup}, A_{s,i}, \alpha, \psi_s, v_b$.

Принцип 5. Определение параметров силового сопротивления конструкций конструктивных систем на всех уровнях их деформирования в предельных и запредельных состояниях может быть выполнено методами расчетных моделей сопротивления строительной механики железобетона (РМС-1, РМС-2, РМС-3, РМС-4 и РМС-5), включающих в себя комбинацию аналитических и численных расчетных моделей (гибрид). Методы РМС [23] базируются на результатах углубленного исследования природы и характера трещинообразования в железобетонных конструкциях, предложенной новой

классификации трещин в сложнапряженных конструкциях. Плоская или пространственная конструкция с помощью «расшивки» конечных элементов в ПК ЛИРА моделируется двухэлементной консолью (рисунок 5), с помощью которой учитывается деформационное

воздействия от раскрытия трещины $\Delta = a_{crc,j}$ и эффекта нарушения сплошности. Раскрытие трещин рассматривается как накопление относительных взаимных смещений арматуры и бетона на участках, расположенных по обе стороны от трещины [11]. При этом нарушение сплошности моделируется или введением действительной формы профиля трещины, или с помощью аналитической формулы для определения ширины раскрытия трещин.

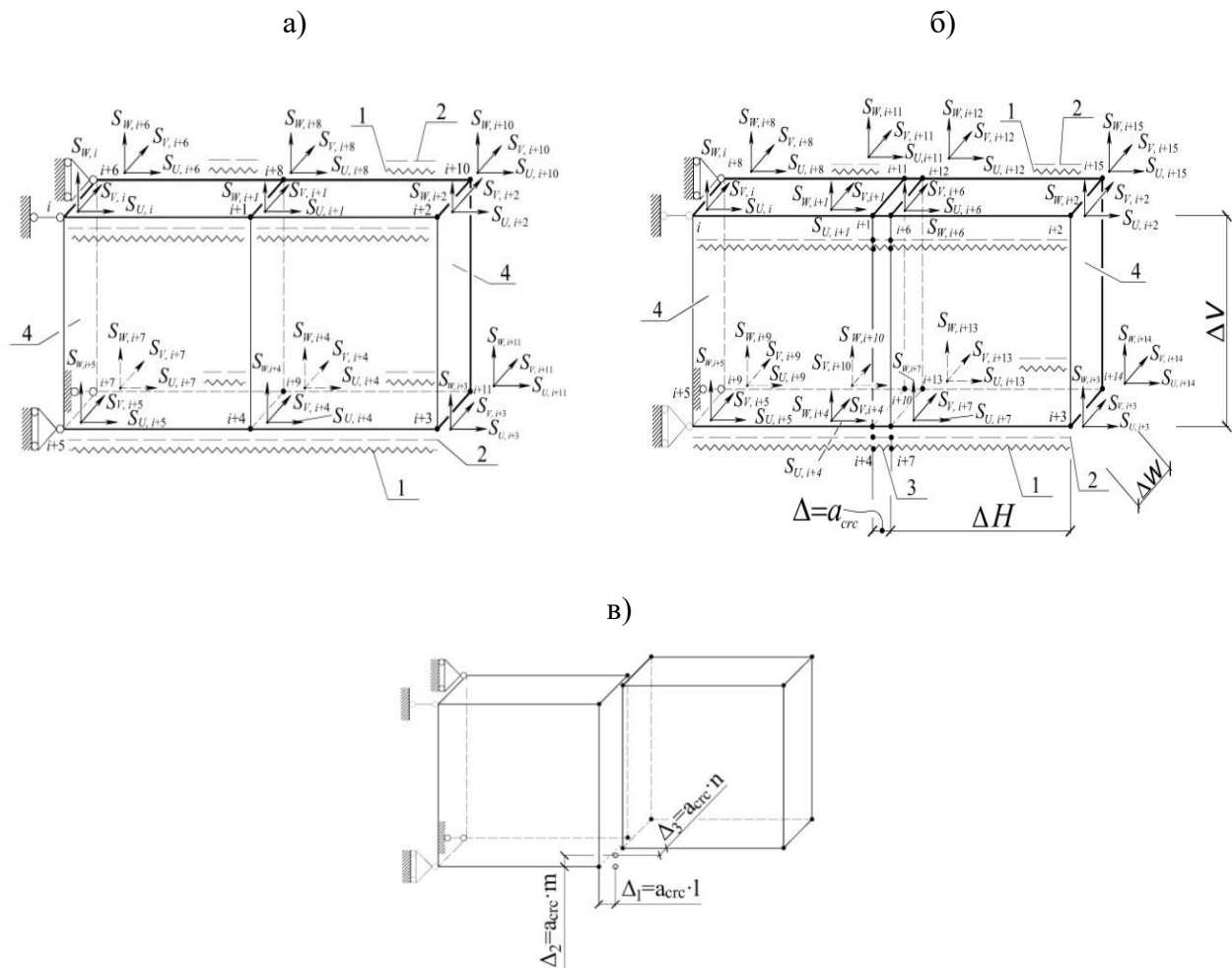


Рисунок 5 - Двухэлементная пространственная (или)плоская) консоль:
а) до «расшивки»; б) после «расшивки»; в) с учетом деформационного воздействия

$$\Delta_1 = a_{crc} \cdot l; \quad \Delta_2 = a_{crc} \cdot m; \quad \Delta_3 = a_{crc} \cdot n;$$

1 – 255 КЭ до «расшивки»; 2 – арматурные стержни для 201 КЭ;

3 – закрытие трещин для 255 КЭ после «расшивки»; 4 – в сплошном железобетоне -233 КЭ

Выводы

1. Опираясь на широкомасштабные экспериментальные данные, полученные с помощью современной приборно-лабораторной базы и на новой методической основе, автором сделаны обобщения различных аспектов и задач проблемы оценки раскрытия трещин в железобетоне.

2. Предложена новая классификация типов трещин для различных видов напряженного состояния в железобетонных конструкциях. На ее основе предложена

методология оценки силового сопротивления конструкций конструктивных систем методами расчетных моделей сопротивления строительной механики железобетона. При этом введены новые гипотезы и сформулированы общие принципы, включающие схемы распределение силовых потоков между трещинами, понятие о прогрессирующих магистральных трещинах и деформационном эффекте в железобетоне - специальном двухконсольном элементе в местной области около берегов трещины, новые функционалы о линейных и угловых деформациях сжатой и растянутой зон сечений железобетонных элементов на всех уровнях упруго-пластического деформирования, вариант теории составных стержней для определения жесткости участка железобетона с пересекающимися трещинами.

3. Установлена связь и приведены аналитические зависимости для определения перемещений в трещине с раскрытием и сдвигом ее берегов, а также определен главный вектор перемещений и угол равнодействующей усилий в арматуре, пересекающей трещину. На этой основе построены расчетные зависимости для определения уровневых расстояний между трещинами и ширины раскрытия трещин при различных напряженных состояниях.

4. В рамках механики разрушения железобетона для анализа магистральных трещин введен специальной двухконсольный элемент (ДКЭ) и установлена его физическая сущность, заключающаяся в реакции между несплошностью бетона и сплошностью рабочей арматуры. С помощью этого элемента для железобетона установлена связь между податливостью – параметром классических методов строительной механики (метод сил, метод перемещений, смешанный метод, метод конечных элементов) и параметрами механики разрушения, для определения которых получена система соответствующих канонических уравнений.

5. Определение параметров силового сопротивления железобетонных конструкций в рамках рассматриваемого подхода может быть выполнено методами расчетных моделей сопротивления строительной механики железобетона (РМС), включающих в себя комбинацию аналитических и численных расчетных моделей (гибрид). Это позволяет привести расчетные зависимости, используемые в деформационных моделях железобетона, к обозримому для практики виду, адекватно отразить главное в физике описываемых явлений и максимально сблизить опытные и расчетные результаты.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Gintaris Kaklauskas, Aleksandr Sokolov, Karolis Sakalauskas Strain compliance crack model for RC beams: primary versus secondary cracks // *Engineering Structures*, 281 (2023) 115770
2. Justas Slaitas, Juozas Valivonis Full moment-deflection response and bond stiffness reduction of RC elements strengthened with prestressed FRP materials // *Composite Structures*, Volume 260, 2021, 113265, <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2020.113265>
3. Qian Feng, Peng Wei, Xingxi Liu, Guannan Wang, Rongqiao Xu Short-term load-deflection behavior of corroded RC beams with confinement effect based on the partial-interaction segmental approach // *Engineering Structures* 220 (2020) 111014.
4. Justas Slaitas, Juozas Valivonis. Concrete cracking and deflection analysis of RC beams strengthened with prestressed FRP reinforcements under external load action. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2020.113036>.
5. Adheena Thomas, Afia S Hameed. An Experimental Study On Combined Flexural And Torsional Behaviour Of RC Beams // *International Research Journal of Engineering and Technology*. 2017. Vol. 4. Is. 5. Pp. 1367–1370. <http://doi.org/10.13140/RG.2.2.19425.51045>.
6. Nahvi H., Jabbari M. Crack detection in beams using experimental modal data and finite element model // *International Journal of Mechanical Sciences*. 2005. Vol. 47. Pp. 1477-1497.
7. Kandekar S.B., Talikoti R.S. Study of torsional behavior of reinforced concrete beams strengthened with aramid fiber strips // *International Journal of Advanced Structural Engineering*. 2018. Vol. 10. Pp. 465–474. <http://doi.org/10.1007/s40091-018-0208-y>.
8. Карпенко Н.И. Общие модели механики железобетона. М.: Стройиздат, 1996. 412 с.

9. Баширов Х.З., Колчунов Вл.И., Федоров В.С., Яковенко И.А. Железобетонные составные конструкции зданий и сооружений. М.: Издательство АСВ, 2017. 248 с.
10. Колчунов Вл.И., Федоров В.С. Понятийная иерархия моделей в теории сопротивления строительных конструкций // Промышленное и гражданское строительство. 2020. № 8. С. 16–23. <https://doi.org/10.33622/0869-7019.2020.08.16-23>.
11. Травуш В.И., Карпенко Н.И., Колчунов Вл.И., Каприелов С.С., Демьянов А.И., Конорев А.В. Результаты экспериментальных исследований конструкций квадратного и коробчатого сечений из высокопрочного бетона при кручении с изгибом // Строительство и реконструкция. 2018. № 6(80). С. 32–43.
12. Колчунов В.И., Яковенко И.А., Тугай Т.В. Методика расчета жесткости плосконапряженных железобетонных конструкций с привлечением программного комплекса «Лири-Про» // Сборник научных трудов (серия отраслевое машиностроение, строительство). Полтава: ПолтНТУ, 2014. Вып. 3(42). Т. 2. С. 55–66.
13. Колчунов Вл.И. Численно-аналитический метод в механике железобетона // Строительная механика инженерных конструкций сооружений. 2022. Т. 18(6). С. 525–533. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2022-18-6-525-533>.
14. Колчунов Вл.И. Метод расчетных моделей сопротивления для железобетона // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2023. Т. 19. № 3. С. 261–275.
15. Голышев А.Б., Колчунов Вл.И. Сопротивление железобетона. К.: Основа. 2009. 432 с.
16. Kalkan I., Kartal S. Torsional Rigidities of Reinforced Concrete Beams Subjected to Elastic Lateral Torsional Buckling // International Journal of Civil and Environmental Engineering. 2017. Vol. 11. No.7. Pp. 969–972.
17. Bernardo L. Modeling the Full Behavior of Reinforced Concrete Flanged Beams under Torsion // Applied Sciences. 2019. Vol. 9(13). Pp. 2750. <http://doi.org/10.3390/app9132730>.
18. Гвоздев А.А., Дмитриев С.А., Гуца Ю.П. и др. Новое в проектировании бетонных железобетонных конструкций. М.: Стройиздат, 1978. 204 с.
19. Голышев А.Б., Колчунов Вл.И., Яковенко И.А. Сопротивление железобетонных конструкций, зданий и сооружений, возводимых в сложных инженерно-геологических условиях. К.: «Талком», 2015. 371 с.
20. Колчунов Вл.И. Экспериментальные исследования железобетонных конструкций с крестообразной пространственной трещиной при кручении с изгибом / В. И. Колчунов, А. И. Демьянов, М. М. Михайлов // Строительство и реконструкция. 2020. № 6(92). С. 13–25.
21. Колчунов Вл.И. Обобщенные гипотезы деформации линейных и угловых деформаций в железобетонных конструкциях при изгибе с кручением // Научный журнал строительства и архитектуры. 2023. № 1 (69). С. 9–26.
22. Верюжский Ю.В., Колчунов Вл.И. Методы механики железобетона. Учебное пособие. К.: Книжное издательство НАУ, 2005. 653 с.
23. Бондаренко В.М., Колчунов Вл.И. Расчетные модели силового сопротивления железобетона. М.: АСВ, 2004. 472 с.

REFERENCE

1. Gintaris Kaklauskas, Aleksandr Sokolov, Karolis Sakalauskas Strain compliance crack model for RC beams: primary versus secondary cracks. *Engineering Structures*. 2023. 281. 115770
2. Justas Slaitas, Juozas Valivonis Full moment-deflection response and bond stiffness reduction of RC elements strengthened with prestressed FRP materials. *Composite Structures*. 2021. Volume 260. 113265, <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2020.113265>
3. Qian Feng, Peng Wei, Xingxi Liu, Guannan Wang, Rongqiao Xu Short-term load–deflection behavior of corroded RC beams with confinement effect based on the partial-interaction segmental approach. *Engineering Structures*. 2020. 220. 111014.
4. Justas Slaitas, Juozas Valivonis. Concrete cracking and deflection analysis of RC beams strengthened with prestressed FRP reinforcements under external load action. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2020.113036>.
5. Adheena Thomas, Afia S Hameed. An Experimental Study On Combined Flexural And Torsional Behaviour Of RC Beams. *International Research Journal of Engineering and Technology*. 2017. Vol. 4. Is. 5. Pp. 1367–1370. <http://doi.org/10.13140/RG.2.2.19425.51045>.
6. Nahvi H., Jabbari M. Crack detection in beams using experimental modal data and finite element model. *International Journal of Mechanical Sciences*. 2005. Vol. 47. Pp. 1477–1497.
7. Kandekar S.B., Talikoti R.S. Study of torsional behavior of reinforced concrete beams strengthened with aramid fiber strips. *International Journal of Advanced Structural Engineering*. 2018. Vol. 10. Pp. 465–474. <http://doi.org/10.1007/s40091-018-0208-y>.

8. Karpenko N.I. Obshchiye modeli mekhaniki zhelezobetona [General models of reinforced concrete mechanics], Moscow: Stroyizdat, 1996, 412 p. (rus)
9. Bashirov H.Z., Kolchunov V.I., Fedorov V.S., Yakovenko I.A. Reinforced concrete composite structures of buildings and structures, - Moscow: ASV, 2017. 248 p.
10. Kolchunov V.I., Fedorov V.S. Conceptual hierarchy of models in the theory of resistance of building structur. *Industrial and civil engineering*. 2020. No. 8. Pp. 16–23. <https://doi.org/10.33622/0869-7019.2020.08.16-23>
11. Travush V.I., Karpenko N.I., Kolchunov V.I., Kapriylov S.S., Dem'yanov A.I., Konorev A.V. The results of experimental studies of structures square and box sections in torsion with bending. *Building and Reconstruction*. 2018. No. 80(16). Pp. 32–43. (rus)
12. Kolchunov V.I., Yakovenko I.A., Tugay T.V. [Methodology for calculating the rigidity of plane-stressed reinforced concrete structures using the Lyra-Pro software package], Coll. of science works (industry mechanical engineering, construction), Poltava, 2014. Vol. 2. No. 3(42). Pp. 55–66. ((rus), abstract in Eng.).
13. Kolchunov V.I. Numerical-analytical method in reinforced concrete mechanics. *Construction mechanics of engineering structures and structures*. 2022. Vol.18 (6). Pp. 525–533. <http://doi.org/10.22363/1815-5235-2022-18-6-525-533>
14. Kolchunov V.I. Method of calculated resistance models for reinforced concrete. *Construction mechanics of engineering structures and structures*. 2023. Vol.19. No. 3. Pp. 261–275.
15. Golyshev A.B., Kolchunov V.I. Reinforced concrete resistance. Kiev: Osnova. 2009. 432 p.
16. Kalkan I., Kartal S. Torsional Rigidities of Reinforced Concrete Beams Subjected to Elastic Lateral Torsional Buckling. *International Journal of Civil and Environmental Engineering*. 2017. Vol. 11. No.7. Pp. 969–972.
17. Bernardo L. Modeling the Full Behavior of Reinforced Concrete Flanged Beams under Torsion. *Applied Sciences*. 2019. Vol. 9(13). Pp. 2750. <http://doi.org/10.3390/app9132730>.
18. Gvozdev A.A., Dmitriev S.A., Gushcha Yu.P., etc. New in the design of concrete reinforced concrete structures. Moscow: Stroyizdat, 1978. 204 p.
19. Golyshev A.B., Kolchunov V.I., Yakovenko I.A. Resistance of reinforced concrete structures, buildings and structures erected in difficult engineering and geological conditions. Kiev: Talcom, 2015. 371 p.
20. Kolchunov V.I. Demyanov A.I., Mihailov M.M. Experimental studies of reinforced concrete structures with gross-shaped apatial crack under torsion with bending. *Building and Reconstruction*. 2018. No. 80(16). Pp. 32–43. (rus) doi:10.33979/2073-7416-2020-92-6-13-25
21. Kolchunov V.I. Generalized hypotheses of the deplanation of linear and angular deformations in reinforced concrete structures during bending with torsion. *Journal of Building and Architechure*. 2023. No. 1 (69). Pp. 9–26.
22. Veruzhsky Yu.V., Kolchunov V.I. Methods of mechanics of reinforced concrete. Textbook. Kiev: NAU, 2005. 653 p.
23. Bondarenko V.M., Kolchunov V.I. Calculation models of the force resistance of reinforced concrete. Moscow: ASV, 2004. 472 p.

Информация об авторе:

Колчунов Владимир Иванович

Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет (НИУ МГСУ), г. Москва, Россия,

Член-корреспондент РААСН, доктор технических наук, профессор, профессор кафедры инженерной графики и компьютерного моделирования.

Научно-исследовательский институт строительной физики Российской академии архитектуры и строительных наук, г. Москва, Россия, ведущий научный сотрудник.

E-mail: vlik52@mail.ru

Information about author:

Kolchunov Vladimir Iv.

Moscow State University of Civil Engineering (NIU MGSU), Moscow, Russia,

Corresponding Member of the Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, doctor of technical sciences, professor, professor of the Department of Engineering Graphics and Computer Modeling.

Research Institute of Construction Physics of the Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, Moscow, Russia,

leading researcher.

E-mail: vlik52@mail.ru