

С.Ю. КАЛАШНИКОВ<sup>1,2</sup>, Е.В. ГУРОВА<sup>1</sup>, Н.Г. БАНДУРИН<sup>1</sup><sup>1</sup>Волгоградский государственный технический университет, г. Волгоград, Россия<sup>2</sup>Центральный научно-исследовательский и проектный институт Министерства строительства и жилищно-коммунального хозяйства Российской Федерации, г. Москва, Россия

## ПРОДОЛЬНОЕ СЖАТИЕ СТЕРЖНЯ С НАЧАЛЬНОЙ ПОГИБЬЮ, ПРИОБРЕТАЮЩЕГО НАВЕДЕННУЮ АНИЗОТРОПИЮ

**Аннотация.** Рассматривается центрально сжатый гибкий прямолинейный стальной стержень. Вследствие имеющегося начального несовершенства в виде погнб стержень работает как сжато-изогнутый. Неоднородность напряженного состояния от изгиба приводит к стеснению деформаций, вызывающих изменение упругих характеристик материала. Для получения уравнения стержня в отклоненном состоянии используется предложенная ранее авторами инкрементальная теория нелинейного деформирования тел в неоднородных полях напряжений с индуцированной анизотропией свойств. Неоднородность поля напряжений вызывает переменность упругих характеристик материала, приводящих вследствие индуцированной инкрементальной криволинейной анизотропии к изменению расчетных параметров конструкции. Решение строится на численной реализации уравнения изогнутой оси с применением метода переменного параметра упругости. Анализируется рост прогибов на ступенях последовательного нагружения возрастающей силой. Рассмотрены различные варианты начальных кривизн, в том числе и исчезающее малой. Независимо от величины начального прогиба установлено заметное увеличение сжимающей силы, отвечающей значительному нарастанию прогибов по сравнению с бифуркационным подходом.

**Ключевые слова:** индуцированная анизотропия, продольный изгиб, градиент напряжений, инкрементальные соотношения, начальная погнб.

S.Y. KALASHNIKOV<sup>1,2</sup>, E.V. GUROVA<sup>1</sup>, N.G. BANDURIN<sup>1</sup><sup>1</sup>Volgograd State Technical University, Volgograd, Russia<sup>2</sup>Central Research and Design Institute of the Ministry of Construction and Housing and Communal Services of the Russian Federation, Moscow, Russia

## LONGITUDINAL COMPRESSION OF A ROD WITH AN INITIAL LOSS ACQUIRING INDUCED ANISOTROPY

**Abstract.** A centrally compressed flexible rectilinear steel rod is considered. Due to the existing initial imperfection in the form of a perish, the rod works as a compressed-curved one. The inhomogeneity of the stress state from bending leads to the constraint of deformations that cause a change in the elastic characteristics of the material. To obtain the equation of the rod in the deflected state, the incremental theory of nonlinear deformation of bodies in inhomogeneous stress fields with induced anisotropy of properties proposed earlier by the authors is used. The inhomogeneity of the stress field causes the variability of the elastic characteristics of the material, which, due to the induced incremental curvilinear anisotropy, lead to a change in the design parameters of the structure. The solution is based on the numerical implementation of the curved axis equation using the method of variable elasticity parameter. The growth of deflections at the stages of sequential loading with increasing force is analyzed. Various variants of initial curvatures, including vanishing small ones, are considered. Regardless of the magnitude of the initial deflection, a noticeable increase in the compressive force was found, corresponding to a significant increase in deflections compared to the bifurcation approach.

**Keywords:** induced anisotropy, longitudinal bending, stress gradient, incremental ratios, initial loss.

## Введение

В ряде экспериментальных работ установлено, что в процессе деформирования изотропные основания [1], поликристаллические и многокомпонентные металлы и сплавы могут проявлять свойства анизотропии [2-8]. Сложившиеся представления объясняют эти проявления эволюцией микроструктуры материала из-за переориентации кристаллографических осей при изготовлении и деформировании. Анизотропию могут проявлять эластомеры в зависимости от технологических режимов изготовления или эксплуатации [9-12]. Предварительное деформирование приводит также к анизотропии свойств полимерных композитов [13]. Анизотропия подобного типа получила название наведенной или индуцированной.

Ранее авторами предложена и экспериментально проверена [14] модель поведения упругого материала и отвечающая ей группа физических уравнений, когда считается что распределение напряжений вызывает анизотропию физических свойств материала, зависящую от степени неоднородности напряженного состояния в окрестностях рассматриваемой точки. Эта зависимость характеризуется учетом в определенных соотношениях градиентов тензоров напряжений и деформаций относительно пространственных координат. Появление физических, расчетных и математических моделей в последнее время стало заметным направлением в механике деформируемого твердого тела [15]. Учет приращений искомых величин реализует инкрементальный подход, который в последние десятилетия используется в механике деформируемого тела [16, 17], железобетоне [18], в целом для стержневых систем [19], включая нелинейные задачи устойчивости [20, 21]. В предложенной модели полагается, что неоднородное напряженное состояние вызывает стеснение деформаций, когда менее напряженные объемы материала «поддерживают» более напряженные объемы, усиливая их сопротивляемость деформированию. В пределах геометрических размеров тела в плоскости, касательной к поверхности одинакового уровня интенсивности касательных напряжений  $T$ , деформирование наиболее стеснено, но эквивалентно по любым направлениям. В направлении, нормальном к этой плоскости, совпадающим с направлением вектора-градиента  $T$ , материал будет иметь иные физические свойства. Подобное распределение будет отвечать каждой точке тела, следовательно, имеет место локальная трансверсальная изотропия. В этом случае касательная плоскость является плоскостью локальной изотропии, а нормаль к плоскости – локальной осью упругой симметрии. По известному начальному линейному решению аналогично общеизвестному методу упругих решений последовательно производится корректировка упругих характеристик для многократной реализации системы разрешающих дифференциальных уравнений. По сути изложенное представляет собой модель и разрешающие инкрементальные соотношения деформируемого тела с криволинейной трансверсальной анизотропией, индуцированной видом напряженного состояния. В [22] модель тела с индуцированной анизотропией была применена к продольному изгибу сжимаемого стержня. В [23] такая задача была разрешена вариационным анализом прогибов идеализированного прямолинейного центрально-сжатого стержня с использованием метода Бубнова-Галеркина. Предполагалось некое малое возмущение на начальном этапе нагружения. В результате было установлено заметное увеличение сжимающей силы, соответствующей значительному нарастанию прогибов.

В настоящей работе строится модель деформирования заведомо сжато-изогнутого стержня из-за начальной погиби. Технологическая погибь при изготовлении прокатных профилей закладывается в стандарт. Например, ГОСТ 8509-93 «Уголки стальные горячекатаные равнополочные» устанавливает кривизну не более 0,4 % длины. Для самого короткого из выпускаемых при длине 4 м отклонение посередине составляет 16 мм. Для маленьких уголков (до № 4,5) по особому требованию потребителя устанавливается норматив 0,2 % на длине один метр, что составляет 2 мм. Аналогичные требования устанавливаются при производстве более мощных прокатных профилей, например, ГОСТ

8240-97 «Швеллеры стальные горячекатаные. Сортамент» указывает, что кривизна швеллера в обеих плоскостях не должна превышать 0,2 % длины, а по согласованию изготовителя и потребителя - 0,15 % длины. При производстве прутков прямоугольного поперечного сечения ГОСТ 103-2006 «Прокат сортовой стальной горячекатаный полосовой. Сортамент.» устанавливает, что серповидность проката, то есть искривление участка полосы по дуге в плоскости проката, не должна превышать значений 0,5% длины, а при высоких требованиях по запросу потребителя – 0,2%. При наименьшей длине из выпускаемых в 2 м это определяет значение кривизны в 4 мм, или 2 мм на погонный метр.

**Модели и методы.** Рассмотрим простой стержень прямоугольного поперечного сечения, сжимаемый силой  $F$ , приложенной в центре тяжести поперечного сечения. Линия действия силы проходит через центр опорных шарниров. Предположим, что вследствие технологических погрешностей изготовления, транспортировки или складирования он имеет начальную погиб (рисунок 1)

$$f_0 = f_0(z),$$

которая в начальном состоянии имеет, как обычно принимается, вид полуволны синусоиды (1)

$$f_0 = f_m \sin \frac{\pi z}{l}, \quad (1)$$

где  $f_m$  - наибольшее значение погиби в середине стержня.

Любое малейшее увеличение силы придаст кривизне приращение и увеличит перемещение каждой точки по длине стержня на дополнительный прогиб  $y$ .

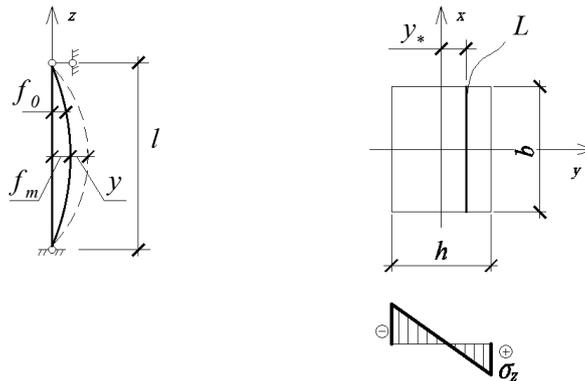


Рисунок 1 - Расчетная схема сжатого стержня с начальной погибью

Полный прогиб стержня в любом сечении тогда

$$y_{\text{полн}} = y + f_m \sin \frac{\pi z}{l}. \quad (2)$$

С другой стороны, неоднородность напряженного состояния создается по высоте поперечного сечения « $h$ ». В каждом сечении по длине стержня степень неоднородности различна из-за разной величины прогиба, следовательно, создается трансверсальная анизотропия, индуцированная прогибом « $y$ », функционально зависящая от координаты по сечению  $y^*$ . Поверхность одинакового уровня напряжений  $U$  вырождается для каждого сечения в линию  $L$  (рисунок 2). Касательная к ней плоскость  $P$  соответственно совпадает с плоскостью, касательной к изогнутой оси стержня  $S$ . Направление вектора-градиента  $\sigma_z$  нормально к плоскости  $S$  и, разумеется, линии  $L$ . Обозначив его как ось упругой симметрии  $\alpha$ , примем в плоскости изотропии направление оси  $y$  совпадающей с линией  $L$ , а оси  $\beta$  – нормально к линии  $L$  в плоскости  $S$  (то есть, по касательной). Слои материала по направлению  $\alpha$  спрессованы, значит повышенный модуль упругости  $E_\beta = E_{gr}$ , а  $E_\alpha = E_0$  равен модулю Юнга для материала.

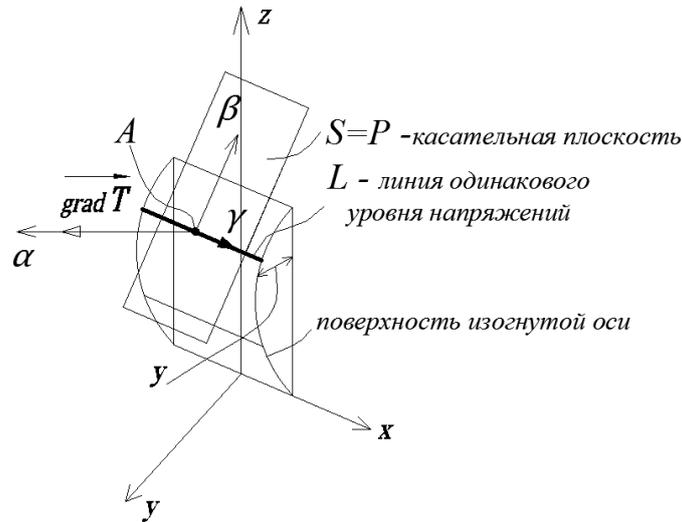


Рисунок 2 - Поверхность напряжений при сжатии стержня с начальной погибью

Модуль упругости материала в касательной к изогнутой оси плоскости равен [14]

$$E_{gr} = E_0 \frac{\lambda_E + 1,5g}{\lambda_E + g}, \quad (3)$$

где функция неоднородности напряженного состояния для любого сечения в данной задаче

$$g = \frac{gradT}{T} = \frac{12y_{полн}}{h^2 + 12y_{полн} \cdot y_*}. \quad (4)$$

Здесь

$$T = \frac{F}{\sqrt{3}A} \left( 1 + \frac{12y_{полн} \cdot y_*}{h^2} \right),$$

а модуль вектор-градиента  $gradT = \sqrt{\left( \frac{\partial T}{\partial y_*(h)} \right)^2}$ .

Зависимость «момент-кривизна», записанная для оси стержня,

$$y'' = -\frac{M_x}{EJ_x}$$

на любом этапе нагружения с учетом (2), (3) и (4) приводит к дифференциальному уравнению

$$\left[ \frac{a + 1.5 \left( y + f_m \sin \frac{\pi z}{l} \right)}{a + y + f_m \sin \frac{\pi z}{l}} \right] \cdot E_0 J_x y'' = -F \left( y + f_m \sin \frac{\pi z}{l} \right), \quad (5)$$

где обозначено  $a = \lambda_E h^2 / 12$ , причем упругая характеристика материала  $\lambda_E = 20,1587 \text{ м}^{-1}$  определена в [14] по экспериментальным данным других авторов.

Для реализации будем использовать метод переменного параметра упругости Биргера. Анализ уравнения (5) свидетельствует о том, что неоднородное, нелинейное дифференциальное уравнение содержит силу  $F$  в качестве параметра, значение которой не может быть определено в эйлеровом смысле. Наоборот, при заданном значении силы может быть вычислена и построена упругая линия, ей соответствующая. При этом первый множитель в левой части уравнения отражает инкрементальный характер модели деформирования, выражающийся в приращении величины упругой характеристики из-за стеснения нарастающих деформаций изгиба. Более того, приращение модуля упругости

зависит от величины дополнительного прогиба, то есть от самого решения, пока что неизвестного.

По известному начальному линейному решению будем последовательно производить корректировку упругих характеристик, каждый раз интегрируя разрешающее дифференциальное уравнение.

На первом этапе нагружения, принимая минимальным значение силы, будем полагать, что значение дополнительного прогиба  $y=0$ . В результате решения получим кривую прогибов, которую на втором шаге нагружения будем использовать в первом сомножителе как известную.

Обозначим в (5)

$$Y_i = \frac{a + 1,5y_{i-1} + 1,5f_m \sin \frac{\pi z}{l}}{a + y_{i-1} + f_m \sin \frac{\pi z}{l}}, \quad (6)$$

что приведет к уравнению

$$Y_i y'' + \frac{F}{E_0 J_x} y + \frac{F}{E_0 J_x} f_m \sin \frac{\pi z}{l} = 0 \quad (7)$$

Тогда, на первом шаге при  $F \rightarrow 0$  примем в (6)  $y_0=0$ , используя  $Y_1$  получим в результате решения (7) дополнительный прогиб на первом шаге  $y_1$ .

На втором шаге в (6) полагаем  $y=y_1$ , используем в (7)  $Y_2$  и далее по этапам нагружения  $Y_i$  и  $y=y_{i-1}$ . Нагружение продолжаем до тех пор, пока максимальные прогибы не превзойдут нормируемые значения соответствующих технических регламентов. Именно этот критерий позволит судить об исчерпании запаса устойчивости.

Предложенный алгоритм был реализован с помощью авторской программы «Стержень», реализующей численное решение в общем случае нелинейных дифференциальных уравнений, моделирующих это состояние. Используемый в программе численный метод имеет 8-й порядок точности решения, когда на начальных этапах нагружения рассматриваются исчезающе малые возмущения, поэтому позволяет получить достаточно точное решение. Метод произвольно высокого порядка для решения системы интегро-дифференциальных уравнений общего вида, основан на процедуре интерполирования, которая применяется не к самой функции, а к её производной, что исключает при вычислении производных операцию дифференцирования интерполяционных функций и связанную с ней погрешность [24].

С помощью этой программы были решены задачи о сжатии линейно-упругого стержня с начальными несовершенствами. Метод вычисления основывался на том, что исчезающе малые возмущения превращали однородное дифференциальное уравнение в неоднородное, а обычный стержень в сжато-изогнутый [25]. Отметим, что точность вычисления критической силы предлагаемым способом в идеально упругом стержне не зависит от вида упомянутого возмущения, необходимо лишь появление в стержне малых изгибающих моментов или начальных кривизн, обусловленных этим возмущением. Метод реализован не только для стержней, но и для сжатых стоек в составе простых рам и дает высокую точность вычисления критической силы. Расчет стоек рам с удовлетворительной точностью совпадает с результатами расчета по нормам СП 16.13330.2011 "Стальные конструкции" [26].

**Результаты исследования и их анализ.**

Для рассматриваемого случая результаты вычислений в инкрементальной постановке на некоторых характерных ступенях нагружения для прокатного стержня длиной  $l=1$  м, с отвечающими стандарту размерами сечения  $h=0,05$  м,  $b=0,02$  м с эйлеровой силой  $F_{Э} = 68,4$  кН представлены численно в таблице 1. Максимальное значение начальной погиби в середине длины стержня принято исчезающее малым  $f_m=1,0 \cdot 10^{-4}$  м=0,1 мм, что составляет 0,01% кривизны на одном метре (в 20 раз меньше строгой вышеуказанной прокатной нормы).

Таблица 1 - Значения прогибов сжато-изогнутого стержня с начальной погибью  $f_m = 0,1$  мм

$F$	$F/F_{Э}$	Дополнительный прогиб $y$ , мм	Полный прогиб $y_{полн}$ , мм	Относительный прогиб	
5	0,075	$8 \cdot 10^{-3}$	0,108	$< \frac{1}{1000}l$	
10	0,15	$16 \cdot 10^{-3}$	0,116		
17,1	0,25	$31 \cdot 10^{-3}$	0,131		
34,2	0,5	$86 \cdot 10^{-3}$	0,187		
51,3	0,75	$210 \cdot 10^{-3}$	0,31		
60	0,88	$280 \cdot 10^{-3}$	0,38		
62	0,91	$340 \cdot 10^{-3}$	0,44		
64	0,94	0,36	0,46		
66	0,97	0,41	0,51		
68	0,99	0,46	0,56		
70	1,023	0,51	0,61		
75	1,1	0,79	0,89		
80	1,17	1,0	1,1		$> \frac{1}{1000}l$
85	1,24	2,0	2,1		$> \frac{1}{500}l$
90	1,32	2,1	2,2		
95	1,39	-2,1	-2,0	-	

При вариационном решении задачи о центральном сжатии гибкого стержня [23] дифференциальное уравнение изгиба стержня через базисные функции преобразуется в систему квадратных алгебраических уравнений, приводящих на каждом шаге нагружения к результатам, представленным в таблице 2.

Таблица 2 - Значения прогибов сжимаемого гибкого стержня методом Бубнова-Галеркина

$F$ , кН	$F / F_{Э}$	Постоянные интегрирования		Наибольший прогиб $U_{полн}$ , мм	Относительный прогиб
		$C_1$	$C_2$		
68,0	0,99	0	0	0	$< \frac{1}{1000}l$
69,4	1,015	0,000011	$-9,58 \cdot 10^{-20}$	$3,0 \cdot 10^{-3}$	
75,2	1,1	0,00085	$-1,1 \cdot 10^{-17}$	0,21	
80,3	1,17	0,0021	$-1,02 \cdot 10^{-17}$	0,53	
85,5	1,25	0,0044	$-1,47 \cdot 10^{-17}$	1,1	$> \frac{1}{1000}l$
88,9	1,3	0,0076	$-1,5 \cdot 10^{-15}$	1,9	
90,6	1,32	0,0104	$-5,74 \cdot 10^{-17}$	2,6	$> \frac{1}{500}l$
92,3	1,35	0,0153	$-2,1 \cdot 10^{-17}$	3,8	
94,0	1,37	0,0256	$-4,55 \cdot 10^{-15}$	6,4	
95,7	1,4	0,0627	$-2,17 \cdot 10^{-15}$	15,7	

При классическом подходе величина дополнительного прогиба определяется по общеизвестной формуле из [27]

$$y = \frac{f_m}{\frac{F_3}{F} - 1} \quad (8)$$

Результаты ее использования для тех же ступеней нагружения приведены в таблице 3.

Таблица 3 - Значения прогибов сжато-изогнутого Эйлера стержня с начальной погибью  $f_m = 0,1$  мм

$F$	$F / F_3$	Дополнительный прогиб $y$ , мм	Полный прогиб $y_{полн}$ , мм	Относительный прогиб
17,1	0,25	0,033	0,133	$< \frac{1}{1000} l$
34,2	0,5	0,1	0,2	
51,3	0,75	0,3	0,4	
62	0,91	0,97	1,07	$> \frac{1}{1000} l$
66	0,96	2,75	2,85	$> \frac{1}{500} l$
68	0,99	17	17,1	
68,4	1,0	$\rightarrow \infty$	$\rightarrow \infty$	

Анализ табличных данных показывает, что при инкрементально-анизотропной модели деформирования материала эффект начального возмущения сказывается не до, а после достижения эйлеровой силы, что наглядно видно на рисунке 3. В зависимости от того, какую величину принять для нормируемого прогиба (на рисунке эта область затонирована), под критической силой следует понимать  $F_{кр} \approx 1.15 F_3$  или  $F_{кр} \approx 1.25 F_3$ .

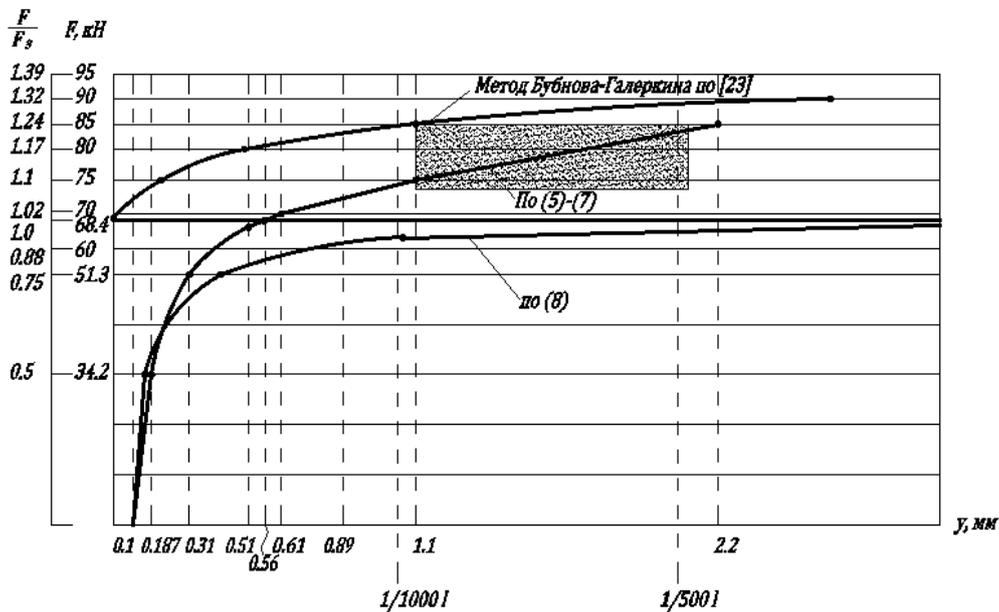


Рисунок 3 - График зависимости полного прогиба посередине высоты стержня от сжимающей силы при исчезающе малой погибью  $f_m=0,1$  мм

Задавая иное максимальное значение начальной погиби  $f_m=1$  мм, соизмеримое с нормируемой, получим прогибы, представленные в таблице 4 и на рисунке 4. На нём

затонирована область возможных нормируемых прогибов и отвечающие им значения критической силы  $1,17F_{\text{э}} < F_{\text{кр}} < 1,25F_{\text{э}}$

Таблица 4. Значения прогибов сжато-прогнутого стержня с начальной погибью  $f_m=1$  мм

$F$ , кН	$\frac{F}{F_{\text{э}}}$	Дополнительный прогиб $y$ , мм	Полный прогиб $y_{\text{полн}}$ , мм	Относительный прогиб
5	0,075	$8 \cdot 10^{-3}$	1,008	$< \frac{1}{500} l$
10	0,15	$17 \cdot 10^{-2}$	1,17	
17,4	0,25	$24 \cdot 10^{-2}$	1,24	
34,2	0,5	$62 \cdot 10^{-2}$	1,62	
51,3	0,75	1,3	2,3	$< \frac{1}{200} l$
60	0,88	1,7	2,7	
62	0,91	1,85	2,85	
64	0,94	2,0	3,0	
66	0,97	2,2	3,2	
68	0,99	2,4	3,4	
70	1,023	2,6	3,6	$< \frac{1}{100} l$
75	1,1	3,4	4,4	
80	1,17	4,5	5,5	$> \frac{1}{100} l$
85	1,24	6,2	7,2	
90	1,32	9,3	10,3	
95	1,39	17,0	18,0	

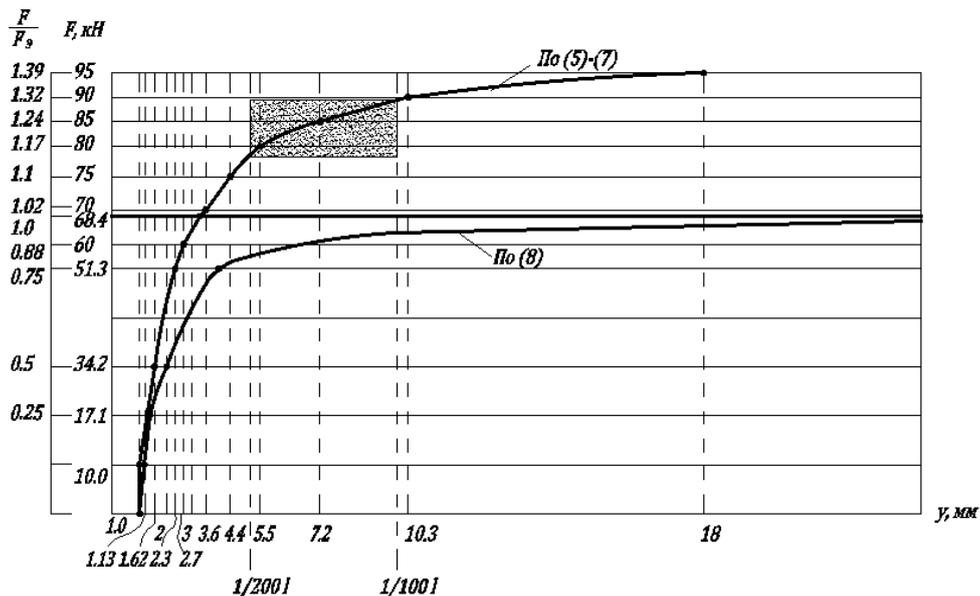


Рисунок 4 - График зависимости полного прогиба посередине высоты стержня от сжимающей силы при погиби  $f_m=1$  мм

При значении максимального погиба  $f_m=2$  мм, равного предельно допустимой серповидности (кривизне) по вышеуказанным стандартам, получим прогибы, приведённые в таблице 5 и на рисунке 5. Область значений критической силы в этом случае лежит в интервале  $F_{\text{кр}} \leq 1,17F_{\text{э}}$ .

Таблица 5 – Значения прогибов сжато-изогнутого стержня с начальной погибью  $f_m = 2$  мм

$F$ , кН	$\frac{F}{F_3}$	Дополнительный прогиб $y$ , мм	Полный прогиб $U_{полн}$ , мм	Относительный прогиб
5	0,075	$16 \cdot 10^{-2}$	2,16	$< \frac{1}{200} l$
10	0,15	$22 \cdot 10^{-2}$	2,22	
17,4	0,25	$45 \cdot 10^{-2}$	2,45	
34,2	0,5	1,1	3,1	
51,3	0,75	2,3	4,3	
60	0,88	3,2	5,2	$< \frac{1}{100} l$
62	0,91	3,4	5,4	
64	0,94	3,7	5,7	
66	0,97	4,0	6,0	
68	0,99	4,4	6,4	
70	1,023	4,8	6,8	
75	1,1	6,2	8,2	
80	1,17	8,0	10,0	$> \frac{1}{100} l$
85	1,24	11,0	13,0	
90	1,32	16,0	18,0	
95	1,39	30,0	32,0	

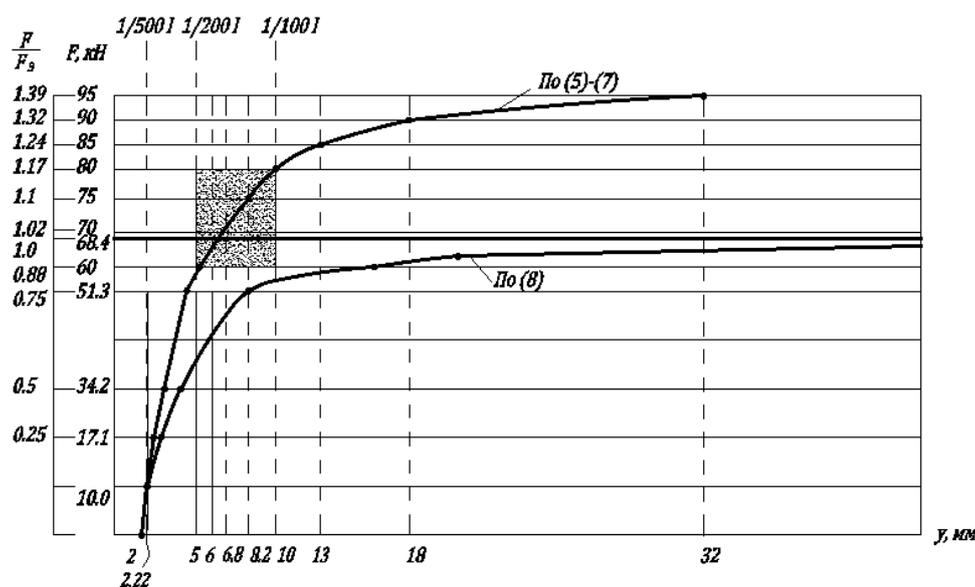


Рисунок 5 - График зависимости полного прогиба посередине высоты стержня от сжимающей силы при предельной погибью  $f_m = 2$  мм

Сравнительный результат определения прогибов для рассмотренных случаев начальной погиби представлен в таблице 6, в которой затонированы величины сил и прогибов, отвечающие началу пластического течения в крайнем волокне.

Отметим, что пластические деформации возникают только при больших погибях и существенном значении силы  $F > F_3$ . Как отмечалось ранее, размеры сечений в рассматриваемой задаче принимались из соображений условий упругой работы материала при продольном изгибе в рамках бифуркационного подхода.

Таблица 6 – Сравнительный результат прогибов сжато-изогнутого стержня при разных начальных погибах

F, кН	$\frac{F}{F_0}$	Прогибы в середине длины					
		Начальная погиб $f_m = 0,1$ мм		Начальная погиб $f_m = 1$ мм		Начальная погиб $f_m = 2$ мм	
		Прогиб у, мм	Полный прогиб $u_{полн}$ , мм	Прогиб у, мм	Полный прогиб $u_{полн}$ , мм	Прогиб у, мм	Полный прогиб $u_{полн}$ , мм
5	0,073	$8 \cdot 10^{-3}$	0,108	$8 \cdot 10^{-3}$	1,008	$16 \cdot 10^{-2}$	2,16
10	0,146	$16 \cdot 10^{-3}$	0,116	$17 \cdot 10^{-2}$	1,17	$22 \cdot 10^{-2}$	2,22
17,4	0,25	$31 \cdot 10^{-3}$	0,131	$24 \cdot 10^{-2}$	1,24	$45 \cdot 10^{-2}$	2,45
34,2	0,5	$87 \cdot 10^{-3}$	0,187	$62 \cdot 10^{-2}$	1,62	1,1	3,1
51,3	0,75	$210 \cdot 10^{-3}$	0,31	1,3	2,3	2,3	4,3
60	0,877	$280 \cdot 10^{-3}$	0,38	1,7	2,7	3,2	5,2
62	0,906	$340 \cdot 10^{-3}$	0,44	1,85	2,85	3,4	5,4
64	0,936	0,36	0,46	2,0	3,0	3,7	5,7
66	0,965	0,41	0,51	2,2	3,2	4,0	6,0
68	0,995	0,46	0,56	2,4	3,4	4,4	6,4
70	1,023	0,51	0,61	2,6	3,6	4,8	6,8
75	1,096	0,79	0,89	3,4	4,4	6,2	8,2
80	1,17	1,0	1,1	4,5	5,5	8,0	10,0
85	1,243	2,0	2,1	6,2	7,2	11,0	13,0
90	1,316	2,1	2,2	9,3	10,3	16,0	18,0
95	1,389	-2,1	-	17,0	18,0	30,0	32,0

В классическом труде А.С. Вольмира [27] сжимаемую стержневую систему с начальной погибью характеризуют с помощью относительных величин: не только  $F/F_0$ , но и отношением дополнительного прогиба у к наибольшей погиби  $f_m$ . Отличительной характеристикой конкретного сжимаемого стержня является отношение максимальной погиби к радиусу инерции поперечного сечения в плоскости наименьшей жесткости. В нашем случае

$$i_x = \sqrt{\frac{J_x}{A}} = 5,77 \text{ мм};$$

$$\zeta_{0,1} = \frac{f_m}{i_x} = 0,1 / 5,77 = 0,0173;$$

$$\zeta_{1,0} = \frac{f_m}{i_x} = 1,0 / 5,77 = 0,173;$$

$$\zeta_{2,0} = \frac{f_m}{i_x} = 2,0 / 5,77 = 0,347.$$

То есть, чем больше эта величина, тем быстрее должны нарастать дополнительные прогибы при росте сжимающей силы, что означает возрастающую деформативность.

По результатам, представленным в таблицах 1, 4, 5 и 6 построены графики в вышеуказанных координатах, представленные на рисунке 6 сплошными линиями. Пунктирной линией показана кривая по классическому соотношению (8), причем она является общей для всех случаев относительной погиби одного и того же стержня.

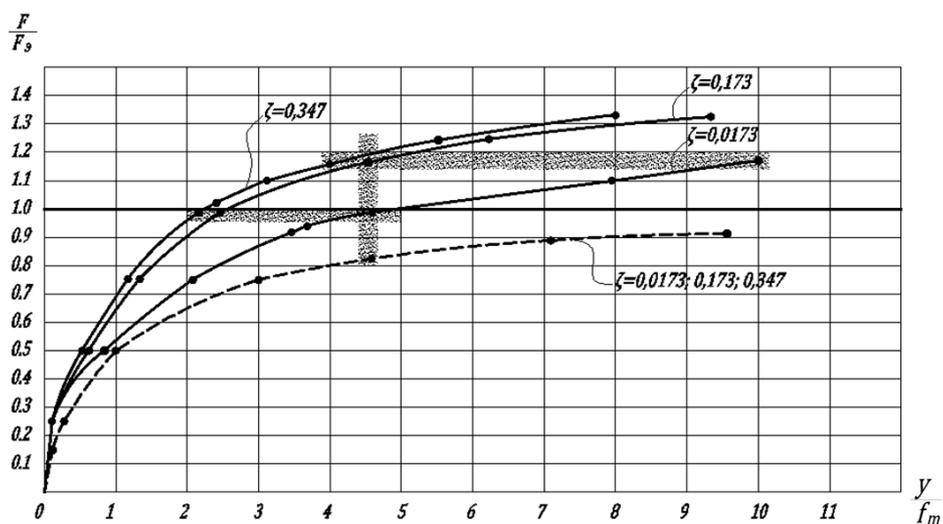


Рисунок 6 – График зависимости полного относительного дополнительного прогиба стержня от сжимающей силы при различных начальных погибях

Очевидно качественное отличие поведения системы при использовании инкрементальной модели деформирования материала. Это заключается не только в том, что прогибы нарастают при нагрузках больших эйлеровой силы (вертикальная тонировка). Характерным является обратный порядок расположения кривых по  $\zeta$ : чем больше начальная погибь, отнесенная к радиусам инерции, тем больше сопротивляемость. Это означает, что чем больше будет величина начальной погиби  $f_m$ , тем меньшее значение дополнительного прогиба будет требоваться для усиления градиентного эффекта (горизонтальная тонировка).

#### Выводы.

- 1) Приведенные в статье теоретические построения демонстрируют, что в сжатом изогнутом стержне с начальной погибью вследствие неоднородности напряженного состояния в сечениях стержня в материале создается индуцированная видом напряженного состояния инкрементальная криволинейная анизотропия со сложно изменяющимися упругими характеристиками.
- 2) Продемонстрирована эффективность численного решения соответствующего уравнения изогнутого стержня в отклоненном состоянии. Решение строится на моделировании прогибов стержня с использованием метода переменного параметра упругости Биргера.
- 3) Установлено заметное увеличение силы, соответствующей значительному нарастанию прогибов по сравнению с бифуркационным подходом.
- 4) Установлена взаимосвязь между величиной начального прогиба и дополнительного прогиба при проявлении градиентных эффектов.

#### Благодарности

Работа выполнена по «Плану фундаментальных научных исследований Российской академии архитектуры и строительных наук и министерства строительства и жилищно-коммунального хозяйства Российской Федерации на 2021 г.» по теме № 3.1.1.14 «Разработка методов определения устойчивости стержней с анизотропией, индуцированной видом напряженного состояния».

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Xiao Y., Zhang Z., Wang J. Granular hyperelasticity with inherent and stress-induced anisotropy. *Acta Geotech.* 15, 671–680 (2020). <https://doi.org/10.1007/s11440-019-00768-z>
2. Бусько В.Н., Осипов А.А.. Применение магнитошумового метода для контроля механической анизотропии ферромагнитных материалов// Приборы и методы измерений. 2019. Т. 10. № 3. С. 281–292. doi:10.21122/2220-9506-2019-10-3-281-292
3. Попович А.А., Суфияров В.Ш., Борисов Е.В., Полозов И.А., Масайло Д.В., Григорьев А.В. Анизотропия механических свойств изделий, изготовленных методом селективного лазерного плавления порошковых материалов// Известия вузов. Порошковая металлургия и функциональные покрытия. 2016. №3. С.4-11. doi:dx.doi.org/10.17073/1997-308X-2016-3-4-11.
4. Ельцов Р.И. Разработка технологического процесса изготовления сварных конструкций // Строительные материалы и изделия. 2021. Том 4. № 5. С.35-44.
5. Одесский П.Д., Гурьева Е.С. Влияние пластической деформации на анизотропию механических свойств стальных листов большой толщины для строительных конструкций // Строительная механика и расчет сооружений. 1991. № 1. С.70-77.
6. Муравьев В.В., Муравьева О.В., Волкова Л.В. Влияние анизотропии механических свойств тонколистового стального проката на информативные параметры волн Лэмба. *Сталь.* 2016. № 10. С. 75-79.
7. Finelli A., Labanti M. Analysis of the influence of the anisotropy induced by cold rolling on duplex and super-austenitic stainless steels // *Frattura ed Integrità Strutturale.* 2010. Iss 13. P. 24-30.
8. Loginov Y.N., Puzanov M.P. Influence of properties anisotropy on stress-deformed state at rolling stripes from electrical steel // *Chernye Metally.* 2018. Iss. 10. P. 22-27.
9. Устинов К.Б.. О наведенной анизотропии механических свойств эластомеров // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2019. №5. С.27-36. doi:10.1134/S0572329919050167
10. Experimental analysis of the effect of carbon nanoparticles with different geometry on the appearance of anisotropy of mechanical properties in elastomeric composites / К.А. Mokhireva, А. Svistkov, Vladislav N. Solod'ko, L. Komar, K. Stöckelhuber // *Polymer testing.* 2017. Т. 59. С. 46-54. doi:10.1016/j.polymertesting.2017.01.007
11. Шадрин В.В., Мохирева К.А., Комар Л.А. Анизотропия механических свойств наполненных вулканизаторов под воздействием внешней нагрузки. – Вестник Пермского федерального исследовательского центра. 2017. № 1. С. 93-98.
12. Корнеев С.А., Корнеев В.С., Романюк Д.А. Математическое моделирование эффекта наведенной деформационной анизотропии резинокордного упругого элемента плоской муфты. – Омский научный вестник. 2017. № 3(153). С. 10-15.
13. Комар Л.А., Мохирева К.А., Морозов И.А.. Исследование появления анизотропных свойств полимерных нанокомпозитов в результате предварительного деформирования в условиях двухосного нагружения.- Вестник Пермского федерального исследовательского центра. 2017. № 2. С. 61-66.
14. Калашников С.Ю. Экспериментальная проверка модели деформирования материала в условиях неоднородного напряжённого состояния: монография. ВолгГТУ. Волгоград, 2017. 80 с.
15. Колчунов В.И., Федоров В.С. Понятийная иерархия моделей в теории сопротивления строительных конструкций // *Промышленное и гражданское строительство.* 2020. № 8. С. 16-23. doi:10.33622/0869-7019.2020.08.16-23.
16. Петров В.В. Инкрементальные уравнения механики деформируемого тела в полных функциях. Вестник отделения строительных наук. Вып.14: в 2 т. Т.1. РААСН Иван. гос. архит.-стр. ун-т. М. Иваново, 2010. С. 159-166.
17. Зиновьев А.С. Напряженно-деформированное состояние системы "плита - слой основания" на базе инкрементальной модели деформирования // Вестник Саратовского государственного технического университета. 2009. Вып. 1(37). С. 27-33.
18. Модель деформирования железобетона в приращениях и расчет балок-стенок и изгибаемых плит с трещинами : монография / Н.И. Карпенко [и др.]; М-во образования и науки Рос. Федерации, Федер. гос. бюджет. образоват. учреждение высш. проф. образования Петрозав. гос. ун-т. - Петрозаводск : Изд-во ПетрГУ, 2013. 153 с.
19. Петров В.В. Нелинейная инкрементальная строительная механика. М.: Инфра. Инженерия, 2014. 480 с.
20. Купавцев В.В. Базисные функции метода двусторонних оценок в задачах устойчивости упругих неоднородно сжатых стержней. Вестник МГСУ. № 6. С. 63-70.
21. Инкрементальная модель для исследования устойчивости высотного сооружения на неоднородном основании / Иноземцев В.К., Синева Н.Ф., Иноземцева О.В. // *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений.* 2008. №2. С. 41-46.
22. About the Distortion Model of Operational Compressed-Bent Bars with Induced Anisotropy / С.Ю. Калашников, Е.В. Гурова, Р.Х. Курамшин, Б. Языев // *International Scientific Conference on Building Life-cycle Management. Information Systems and Technologies (Moscow 26 November 2021)* / eds.: А. Ginzburg, G. Kashevarova. - Springer, Cham, 2022. Vol. 231. P. 95-102. [https://doi.org/10.1007/978-3-030-96206-7\\_10](https://doi.org/10.1007/978-3-030-96206-7_10).

23. Калашников С.Ю., Гурова Е.В., Шведов Е.Г. Применение метода Бубнова - Галеркина для анализа деформирования сжато-изогнутого стержня с индуцированной анизотропией // Вестник Волгоградского государственного архитектурно-строительного университета. Серия: Строительство и архитектура. 2022. Вып. 1 (86). С. 132-144.
24. Бандурин Н.Г., Калашников С.Ю. Метод и пакет программ для численного решения систем существенно нелинейных интегро-дифференциально-алгебраических уравнений (корректные по Адамару двумерные и трехмерные краевые задачи) // Вычислительные технологии. 2014. Т. 19. № 5. С. 3-11.
25. Бандурин Н.Г., Калашников С.Ю. Численный метод и программа для определения критического состояния упругого стержня переменной жесткости в общем случае закрепления его концов // Строительство и реконструкция. 2015. № 2. С. 4-11.
26. Бандурин Н.Г., Калашников С.Ю. Расчёт сжатых стоек в составе простых плоских рам с помощью компьютерной программы и сравнение результатов с расчётами по СП 16.13330.2011 «Стальные конструкции» // Вестник Волгоградского гос. архит.-строит. ун-та. Сер. Строительство и архитектура. 2016. № 46 (65). С. 48-57.
27. Вольмир А.С. Устойчивость упругих систем. М.: Физматгиз, 1963. 880 с.

## REFERENCES

1. Xiao Y., Zhang Z., Wang J. Granular hyperelasticity with inherent and stress-induced anisotropy. *Acta Geotech.* 15, 671–680 (2020). <https://doi.org/10.1007/s11440-019-00768-z>
2. Bus'ko V.N., Osipov A.A. Primenenie magnitoshumovogo metoda dlya kontrolya mekhanicheskoy anizotropii ferromagnitnykh materialov // *Priboiry i metody izmerenij.* 2019. T. 10. No. 3. Pp. 281–292. doi:10.21122/2220-9506-2019-10-3-281-292
3. Popovich A.A., Sufiyarov V.SH., Borisov E.V., Polozov I.A., Masajlo D.V., Grigor'ev A.V. Anizotropiya mekhanicheskikh svoystv izdelij, izgotovlennykh metodom selektivnogo lazernogo plavlenniya poroshkovykh materialov // *Izvestiya vuzov. Poroshkovaya metallurgiya i funkcional'nye pokrytiya.* 2016. No. 3. Pp. 4-11. doi:dx.doi.org/10.17073/1997-308X-2016-3-4-11.
4. El'cov R.I. Razrabotka tekhnologicheskogo processa izgotovleniya svarnykh konstrukcij // *Stroitel'nye materialy i izdeliya.* 2021. Tom 4. No. 5. Pp. 35-44.
5. Odesskij P.D., Gur'eva E.S. Vliyaniye plasticheskoy deformatsii na anizotropiyu mekhanicheskikh svoystv stal'nykh listov bol'shoj tolshchiny dlya stroitel'nykh konstrukcij // *Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzhenij.* 1991. No.1. Pp. 70-77.
6. Murav'ev V.V., Murav'eva O.V., Volkova L.V. Vliyaniye anizotropii mekhanicheskikh svoystv tonkolistovogo stal'nogo prokata na informativnye parametry voln Lemba. *Stal'.* 2016. No. 10. Pp. 75-79.
7. Finelli A., Labanti M. Analysis of the influence of the anisotropy induced by cold rolling on duplex and super-austenitic stainless steels // *Frattura ed Integrità Strutturale.* 2010. Iss 13. Pp. 24-30.
8. Loginov Y.N., Puzanov M.P. Influence of properties anisotropy on stress-deformed state at rolling stripes from electrical steel // *Chernye Metally.* 2018. Iss. 10. Pp.22-27.
9. Ustinov K.B. O navedennoy anizotropii mekhanicheskikh svoystv elastomerov // *Izvestiya Rossijskoj akademii nauk. Mekhanika tverdogo tela.* 2019. No. 5. Pp. 27-36. doi:10.1134/S0572329919050167
10. Experimental analysis of the effect of carbon nanoparticles with different geometry on the appearance of anisotropy of mechanical properties in elastomeric composites / K.A. Mokhireva, A. Svistkov, Vladislav N. Solod'ko, L. Komar, K. Stöckelhuber // *Polymer testing.* 2017. T. 59. Pp. 46-54. doi:10.1016/j.polymertesting.2017.01.007
11. SHadrin V.V., Mohireva K.A., Komar L.A. Anizotropiya mekhanicheskikh svoystv napolnennykh vulkanizatorov pod vozdeystviem vneshnej nagruzki. – *Vestnik Permskogo federal'nogo issledovatel'skogo centra.* 2017. No. 1. Pp. 93-98.
12. Korneev S.A., Korneev V.S., Romanyuk D.A. Matematicheskoe modelirovaniye efekta navedennoy deformatsionnoy anizotropii rezinokordnogo uprugogo elementa ploskoj mufty. – *Omskij nauchnyj vestnik.* 2017. No. 3(153). Pp. 10-15.
13. Komar L.A., Mohireva K.A., Morozov I.A. Issledovaniye poyavleniya anizotropnykh svoystv polimernykh nanokompozitov v rezul'tate predvaritel'nogo deformirovaniya v usloviyah dvuhosnogo nagruzheniya.- *Vestnik Permskogo federal'nogo issledovatel'skogo centra.* 2017. No. 2. Pp.61-66.
14. Kalashnikov S.YU. Eksperimental'naya proverka modeli deformirovaniya materiala v usloviyah neodnorodnogo napryazhyonnogo sostoyaniya: monografiya. VolgGTU. Volgograd, 2017. 80 p.
15. Kolchunov V.I., Fedorov V.S. Ponyatijnaya ierarhiya modelej v teorii soprotivleniya stroitel'nykh konstrukcij // *Promyshlennoe i grazhdanskoe stroitel'stvo.* 2020. No. 8. Pp. 16-23. doi:10.33622/0869-7019.2020.08.16-23.
16. Petrov V.V. Inkremental'nye uravneniya mekhaniki deformiruемого tela v polnykh funkciyah. *Vestnik otdeleniya stroitel'nykh nauk.* Vyp.14: v 2 t. T.1. RAASN Ivan. gos. arhit.-str. un-t. M. Ivanovo, 2010. Pp. 159-166.
17. Zinov'ev A.S. Napryazhenno-deformirovannoye sostoyaniye sistemy "plita - sloj osnovaniya" na baze inkremental'noy modeli deformirovaniya // *Vestnik Saratovskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta.* 2009. Vyp. 1(37). Pp. 27-33.

18. Model' deformirovaniya zhelezobetona v prirashcheniyah i raschet balok-stenok i izgibaemyh plit s treshchinami : monografiya / N.I. Karpenko [i dr.]; M-vo obrazovaniya i nauki Ros. Federacii, Feder. gos. byudzhet. obrazovat. uchrezhdenie vyssh. prof. obrazovaniya Petrozav. gos. un-t. - Petrozavodsk : Izd-vo PetrGU, 2013. 153 p.
19. Petrov V.V. Nelinejnaya inkremental'naya stroitel'naya mekhanika. M.: Infra – Inzheneriya, 2014. 480 p.
20. Kupavcev V.V. Bazisnye funkcii metoda dvustoronnih ocenok v zadachah ustojchivosti uprugih neodnorodno szhatyh sterzhnej. Vestnik MGSU. No. 6. Pp. 63-70.
21. Inkremental'naya model' dlya issledovaniya ustojchivosti vysotnogo sooruzheniya na neodnorodnom osnovanii / Inozemcev V.K., Sineva N.F., Inozemceva O.V. // Stroitel'naya mekhanika inzhenernyh konstrukcij i sooruzhenij. 2008. No. 2. Pp. 41-46.
22. About the Distortion Model of Operational Compressed-Bent Bars with Induced Anisotropy / S.YU. Kalashnikov, E.V. Gurova, R.H. Kuramshin, B. YAzyev // International Scientific Conference on Building Life-cycle Management. Information Systems and Technologies (Moscow 26 November 2021) / eds.: A. Ginzburg, G. Kashevarova. - Springer, Cham, 2022. Vol. 231Pp. 95-102. [https://doi.org/10.1007/978-3-030-96206-7\\_10](https://doi.org/10.1007/978-3-030-96206-7_10).
23. Kalashnikov S.YU., Gurova E.V., SHvedov E.G. Primenenie metoda Bubnova - Galerkina dlya analiza deformirovaniya szhato-izognutogo sterzhnya s inducirovannoj anizotropiej // Vestnik Volgogradskogo gosudarstvennogo arhitekturno-stroitel'nogo universiteta. Seriya: Stroitel'stvo i arhitektura. 2022. Vyp. 1 (86). Pp. 132-144.
24. Bandurin N.G., Kalashnikov S.YU. Metod i paket programm dlya chislennogo resheniya sistem sushchestvenno nelinejnyh integro-differencial'no-algebraicheskikh uravnenij (korrektnye po Adamaru dvumernye i trekhmernye kraevye zadachi) // Vychislitel'nye tekhnologii. 2014. T. 19. No. 5. Pp. 3-11.
25. Bandurin N.G., Kalashnikov S.YU. CHislennyj metod i programma dlya opredeleniya kriticheskogo sostoyaniya uprugogo sterzhnya peremennoj zhestkosti v obshchem sluchae zakrepleniya ego koncov // Stroitel'stvo i rekonstrukciya. 2015. No. 2. Pp. 4-11.
26. Bandurin N.G., Kalashnikov S.YU. Raschyot szhatyh stoek v sostave prostyh ploskih ram s pomoshch'yu komp'yuternoj programmy i sravnenie rezul'tatov s raschyotami po SP 16.13330.2011 «Stal'nye konstrukcii» // Vestnik Volgogradskogo gos. arhit.-stroit. un-ta. Ser. Stroitel'stvo i arhitektura. 2016. No. 46 (65). Pp. 48-57.
27. Vol'mir A.S. Ustojchivost' uprugih sistem. M.: Fizmatgiz, 1963. 880 p.

**Информация об авторах:**

**Калашников Сергей Юрьевич**

ФГБОУ ВО «Волгоградский государственный технический университет», г. Волгоград, Россия, советник РААСН, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой «Экспертиза и эксплуатация объектов недвижимости».

E-mail: [kalashnikov@vstu.ru](mailto:kalashnikov@vstu.ru)

**Гурова Елена Владимировна**

ФГБОУ ВО «Волгоградский государственный технический университет», г. Волгоград, Россия, кандидат технических наук, доцент кафедры «Экспертиза и эксплуатация объектов недвижимости».

E-mail: [eun.cafedra@yandex.ru](mailto:eun.cafedra@yandex.ru)

**Бандурин Николай Григорьевич**

ФГБОУ ВО «Волгоградский государственный технический университет», г. Волгоград, Россия, доктор технических наук, профессор кафедры «Строительные конструкции, основания и надежность сооружений».

E-mail: [bandurin\\_ng@mail.ru](mailto:bandurin_ng@mail.ru)

**Information about the authors:**

**Kalashnikov Sergey Yu.**

Volgograd State Technical University, Volgograd, Russia, Advisor to the RAASN, Doctor of Technical Sciences, Professor, Head of the Department "Examination and Operation of Real Estate objects".

E-mail: [kalashnikov@vstu.ru](mailto:kalashnikov@vstu.ru)

**Gurova Elena V.**

Volgograd State Technical University, Volgograd, Russia, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of the Department "Examination and Operation of Real Estate objects".

E-mail: [eun.cafedra@yandex.ru](mailto:eun.cafedra@yandex.ru)

**Bandurin Nikolay G.**

Volgograd State Technical University, Volgograd, Russia, Doctor of Technical Sciences, Professor of the Department of "Building Structures, Foundations and Reliability of Structures".

E-mail: [bandurin\\_ng@mail.ru](mailto:bandurin_ng@mail.ru)