

А.П. ЛОКТИОНОВ¹

¹ФГБОУ ВО «Юго-Западный государственный университет», г. Курск, Россия

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ СТОЕЧНО-БАЛОЧНОЙ КОНСТРУКТИВНОЙ СИСТЕМЫ

Аннотация. Объектом исследования являются стоечно-балочные конструктивные системы зданий с жестким сопряжением балки со стойкой. Цель исследования состоит в оценке влияния на точность решения задачи погрешности входных данных и числа заданных коэффициентов уравнения прогибов. Исследования проведены аналитическо-экспериментальными методами сеточной регуляризации, редукции измерений, решений на измерительном компакте, полиномиальной аппроксимации, линейной лагранжевой интерполяции и численного дифференцирования.

Аналитически и натурным экспериментом смоделировано жесткое сопряжение балки со стойкой. Для количественной оценки эффективности решения задачи определены значения целевого параметра и критерия оптимизации по минимуму функции Лебега. Предложено использовать полученные результаты решения обратной задачи Коши при экспериментально-теоретических исследованиях стоечно-балочных конструктивных систем.

Ключевые слова: балка, обратная задача Коши, модель измерения, прогиб, аппроксимация, критерий оптимизации.

A.P. LOKTIONOV¹

¹Southwest State University, Kursk, Russia

INVERSE CAUCHY PROBLEM FOR RACK-AND-BEAM STRUCTURE

Abstract. The object of this study is the building frames with rigid beam-to-column assemblies. The aim of the study is to assess the impact on the accuracy of the solution of the problem of the error of the input data and the number of given coefficients of the deflection equation. The studies were carried out using analytical and experimental methods of regularization, reduction of measurements, solutions on a measuring compact, polynomial approximation, linear Lagrangian interpolation and numerical differentiation.

Rigid coupling of a beam with a rack is modeled analytically and by a full-scale experiment. For a quantitative assessment of the effectiveness of solving the problem, the values of the target parameter and the optimization criterion are determined through the minimum of the Lebesgue function. It is proposed to use the obtained results of solving the inverse Cauchy problem in experimental and theoretical studies of rack-and-beam structures.

Keywords: beam, inverse Cauchy problem, measurement model, deflection, approximation, optimization criterion.

Введение

Объектом исследования являются стоечно-балочные конструктивные системы зданий при жестком сопряжении балки со стойкой. Коши с заданными коэффициентами членов двух младших степеней уравнения прогибов балки в стоечно-балочной конструкции при жестком сопряжении балки со стойкой. Исследования последних лет стоечно-балочной конструкции при заданных только осадке опоры балки или только наклоне упругой линии в опорном

© Локтионов А.П., 2023

поперечном сечении балки показали снижение влияния на точность решения задачи погрешности измерения прогибов балки с заданными коэффициентами уравнения прогибов. В связи с этим актуально исследование обратной задачи Коши для стоечно-балочной конструкции при одновременно заданных (фиксированных) двух младших коэффициентах уравнения прогибов балки.

Изучению вопросов разработки физических и численных методов экспериментальных исследований стоечно-балочных конструктивных систем посвящено значительное количество отечественных и зарубежных научных исследований, в том числе по жесткости узла сопряжения балки со стойкой и возможности передачи изгибающего момента от балки на стойку, для анализа строительных конструкций на стадии экспериментально-теоретических исследований, при обследовании строительных конструкций [1-11]. В экспериментальных исследованиях обратной задачи Коши для определения коэффициентов многочлена – уравнения прогибов балки, а затем вычисления начальных условий, характеристик передачи изгибающего момента от балки на стойку и внешней нагрузки на балку прогибы балки измеряют датчиками прогиба – прогибомерами: контактными, дистанционными, с навесными чувствительными элементами [12, 13]. Известны исследования по аналитическо-экспериментальным некорректным обратным задачам в физике, механике, технических науках, в которых даны предложения по решению коэффициентных обратных задач [14-17], по оценке объекта исследования параметрами идентификации на моделях измерения и вычислений в информационно-измерительной системе (ИИС) [3, 18, 19], по влиянию объема и точности экспериментальных данных на точность результатов обратной задачи [4, 10, 20]. Для повышения точности результатов обратной задачи применяют методы регуляризации, редукции измерений, решение на измерительном компакте, эффективно использование регуляризации сеточными методами, полиномиальной аппроксимации и линейной лагранжевой интерполяции, численного дифференцирования [19, 21-26]. В работах по разработкам показателей качества обработки данных и алгоритмов оценки влияния погрешности датчиков и интерполяции предлагается использовать функции и константы Лебега инструментами управления процессами регуляризации решения обратной задачи [5, 21, 27-33].

Опираясь на отмеченные результаты исследований, целью рассматриваемой работы является продолжение исследований регуляризации обратной задачи Коши для стоечно-балочной конструкции [10, 30, 32, 33] при увеличении количества заданных начальных параметров. Задачи, намеченные к решению: определение коэффициентов уравнения в обратной задаче Коши методом решения системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), методом неопределенных коэффициентов и численным дифференцированием интерполяционной формулы Лагранжа; разработка модели оценки эффективности решения обратной задачи Коши.

Модели и методы

Используем в аналитическо-экспериментальной задаче исследования стоечно-балочной конструктивной системы сеточную модель измерения прогибов при поперечном изгибе балки и модели вычислений методами решения СЛАУ, неопределенных коэффициентов и численным дифференцированием интерполяционной формулы Лагранжа.

Модель измерения прогибов балки. Решаем коэффициентную обратную задачу Коши для алгебраического многочлена прогибов

$$v_n(d, x) = \sum_{r=0}^n \frac{d_{n,r}}{r!} x^r, \quad d_{n,n} \neq 0 \quad (1)$$

степени n с функционально независимыми вещественными коэффициентами $d_{n,r}$, из которых младшие коэффициенты $d_{n,0}$ и $d_{n,1}$ фиксированы (заданы). Обратную задачу Коши решаем для поперечного изгиба по теории Эйлера-Бернулли балки постоянного поперечного сечения

($EI = \text{const}$) длиной l в стоечно-балочной конструкции при жестком сопряжении балки со стойкой, когда возможна передача изгибающего момента от балки на стойку (см. рисунок 1).

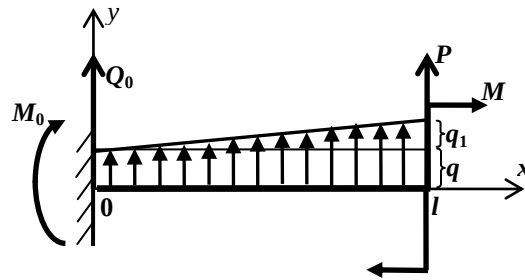


Рисунок 1 – Балка под комбинированной нагрузкой в стоечно-балочной конструкции

По экспериментальным значениям прогибов балки на отрезке $[0, l]$ вычисляем целевые характеристики задачи – значения коэффициентов многочлена (1)

$$d_{n,r} = v_n^{(r)}(d, 0), \quad r \in (2, K, n), \quad (2)$$

а при необходимости также значения начальных параметров и внешней нагрузки: единичной нагрузки изгибающим моментом M на свободном конце балки, сосредоточенной нагрузки P на свободном конце балки, постоянной распределенной нагрузки интенсивностью q и линейно изменяющейся возрастающей распределенной нагрузки интенсивностью от нуля при $x = 0$ до q_1 при $x = l$. Коэффициенты $d_{n,r}$ связаны с внешней нагрузкой M, P, q, q_1 , и начальными параметрами упругой линии балки $v_n(0), v'_n(0), M_0, Q_0$, в частности, при порядке дифференциального уравнения (2) $n = 5$:

$$d_{5,0} = v_5(0) \text{ – осадка опоры;}$$

$$d_{5,1} = v'_5(0) \text{ – наклон упругой линии в опорном поперечном сечении балки;}$$

$$d_{5,2} = v''_5(0) = M_0/(EI) = (-M + lP + l^2q/2 + l^2q_1/3)/(EI);$$

$$d_{5,3} = v'''_5(0) = Q_0/(EI) = -(lq + lq_1/2 + P)/(EI);$$

$$d_{5,4} = v^{(IV)}_5(0) = q/(EI);$$

$$d_{5,5} = v^{(V)}_5(0) = q_1/(lEI);$$

M_0, Q_0 – опорные реакции.

Параметрами идентификации, характеризующими балку, используем прогибы, коэффициенты уравнения прогибов и начальные параметры, в том числе перемещения в узле сопряжения балки со стойкой.

В аналитическо-экспериментальной обратной задаче Коши с применением сеточного метода регуляризации решения определяем измерительный участок компактом $[0, l]$ на прямой Ox (см. рисунок 1) и задаем для значений входных данных: прогибов $v_n(x_i)$ по (1) и измеренных средством измерений (СИ) значений $v_n^*(x_i)$, начальных параметров балки $d_{n,0}, d_{n,1}$ в модели измерения и вычислений, – точечное множество $X = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ узлов измерительной сетки, удовлетворяющее условию

$$0 < x_1 < x_2 < \dots < x_N \leq l, \quad (3)$$

где N – количество дискретных значений входных данных $v_n^*(x_i)$, значений функции $v_n(x_i)$ ($i = 1 : N, N = n - 1$); i – номер узла. Входные данные получены датчиками прогиба балки при измерениях или в результате расчетов на ЭВМ.

Вводим в соответствие внешней нагрузке на балку пространства состояний параметров идентификации в моделях измерения и вычислений m_s , где s – номер модели.

В моделях измерения и вычислений решаем обратную задачу Коши для уравнения (1) в общем случае при ненулевых начальных условиях. Реализация моделей измерения и вычислений в ИИС аппаратно распределена по СИ и информационной вычислительной системе в ИИС.

$$g_n(x) = v_n(x) - d_{n,0} - d_{n,1}x, \quad (4)$$

$$g_n^*(x_i) = v_n^*(x_i) - d_{n,0} - d_{n,1}x_i, \quad (5)$$

$$g_n^*(x_i) = \sum_{r=2}^n \frac{w_{n,r}}{r!} x_i^r \quad (i = 1 : N), \quad (6)$$

$$Ag_W = v^*, \quad (7)$$

$$A = \begin{pmatrix} x_1^2/2 & x_1^3/6 K & x_1^n/n! \\ x_2^2/2 & x_2^3/6 K & x_2^n/n! \\ \\ x_{n+1}^2/2 & x_{n+1}^3/6 K & x_{n+1}^n/n! \end{pmatrix},$$

$$d_{n,r} \approx w_{n,r}, \quad r \in (2, K, n). \quad (9)$$

Модель вычислений методом неопределенных коэффициентов. Для многочлена (1) решаем коэффициентную обратную задачу с математической моделью, включающей сетку узлов аппроксимации (3), вспомогательную аппроксимируемую функцию (5) и функции:

$$v_n^*(w, x) = d_{n,0} + d_{n,1}x + \sum_{r=2}^n \frac{w_{n,r}}{r!} x^r, \quad w_{n,n} \neq 0, \quad (10)$$

$$w_{n,r} = \sum_{i=1}^N l_{n,r,i}(0) g_n^*(x_i), \quad r \in (2, K, n) \quad (11)$$

$$\sum_{i=1}^N l_{n,r,i}(0) x_i^j = \begin{cases} 0 & \text{при } j \neq r \\ r! & \text{при } j = r \end{cases}, \quad j = 2:n, \quad r \in (2, K, n). \quad (12)$$

Здесь используем линейную лагранжеву аппроксимацию функции (10) интерполяционным полиномом Лагранжа (11), решением системы уравнений (12) методом неопределенных коэффициентов получаем формулы лагранжевых коэффициентов $l_{n,r,i}(0)$, вычисляем коэффициенты $w_{n,r}$ по (11) и коэффициенты $d_{n,r}$ по (9).

Модель вычислений методом дифференцирования интерполяционной формулы Лагранжа. Рассматриваем дифференцирование функции (1) с линейной лагранжевой одномерной аппроксимацией. Математическая модель, включает сетку узлов полиномиальной аппроксимации (3), аппроксимируемую функцию (4) и функции:

$$\varphi_{n-2}(x) = \frac{g_n(x)}{x^2}, \quad (13)$$

$$L_{n-2}(x) = \sum_{i=1}^N l_{n-2,i}(x) \frac{g_n^*(x_i)}{x_i^2}, \quad (14)$$

$$l_{n-2,i}(x) = \prod_{\substack{k=2 \\ k \neq i}}^n \frac{x - x_k}{x_i - x_k}, \quad (15)$$

$$v_n(x) \approx d_{n,0} + d_{n,1}x + x^2 L_{n-2}(x), \quad (16)$$

$$v_n^{(r)}(x) \approx \sum_{i=1}^N \left[r(r-1) l_{n-2,i}^{(r-2)}(x) + 2x l_{n-2,i}^{(r-1)}(x) + x^2 l_{n-2,i}^{(r)}(x) \right] \frac{g_n^*(x_i)}{x_i^2}, \quad r \in (2, K, n), \quad (17)$$

$$l_{n,r,i}(0) \approx \frac{r(r-1)}{x_i^2} l_{n-2,i}^{(r-2)}(x) \Big|_{x=0}, \quad r \in (2, K, n). \quad (18)$$

Здесь введена в рассмотрение на отрезке $[0, l]$ дополнительная аппроксимируемая функция (13), для аппроксимации которой применено лагранжево приближение (14), где $l_{n-2,i}(x)$ – лагранжевы коэффициенты, вычисляемые по формуле (15) и подставляемые в интерполяционную формулу Лагранжа (16) и формулу численного дифференцирования (17) при нахождении производных функции $v(x)$. Из (17) получаем формулы (18) лагранжевых коэффициентов в интерполяционном полиноме Лагранжа (18), далее вычисляем коэффициенты $w_{n,r}$ по (11) и коэффициенты $d_{n,r}$ по (9) аппроксимируемой функции (10).

Модель оценки эффективности решения коэффициентной обратной задачи Коши для стоечно-балочной конструкции. Ставим задачу оценить погрешность результатов определения параметров идентификации балки, оценить эффективность решения коэффициентной обратной задачи Коши в условиях влияния погрешности входных данных и разработать метод снижения влияния этой погрешности датчиков оптимизацией сетки аппроксимации (3). На качество приближения кроме погрешности входных данных сильное влияние оказывает степень многочлена, количество и расположение узлов сетки аппроксимации (3). Математическая модель, включает сетку узлов аппроксимации (3) и функции:

$$R[v_n(d, x_i)] = v_n^*(d, x_i) - v_n(d, x_i), \quad (19)$$

$$\Delta_{\max}[v_n(d, x_i)] = \varepsilon_p v_p \geq \Delta[v_n(d, x_i)] = |R[v_n(d, x_i)]|, \quad (20)$$

$$\Delta_{\max} [d_{n,r}] \leq \Lambda_{n,r} \Delta_{\max} [v_n(d, x_i)], \quad (21)$$

$$\Delta_{\max} [d_{n,r}] \leq \lambda_{n,r}(X) \cdot \sup \Delta_{\max} [v_n(d, x_i)], \quad (22)$$

$$\lambda_{n,r}(X) = \sum_{i=1}^N |l_{n,r,i}(0)|, \quad (23)$$

$$\alpha_{n,r} = \min \lambda_{n,r}(X), \quad (24)$$

$$\alpha_{ns,n,r} = \min l^r \lambda_{n,r}(X), \quad (25)$$

$$\pi_{n,r} = 1/\alpha_{ns,n,r}. \quad (26)$$

Каждое из входных данных $v_n^*(d, x_i)$ содержит погрешность измеренных в физическом эксперименте (или заданных таблично) значений $v_n(x_i)$ в виде (19). Погрешностью округления в вычислениях в сравнении с погрешностью входных данных пренебрегаем. При линейном преобразовании измеряемых входных данных $v(x_i)$ для значений входных величин $v^*(d, x_i)$ используем равномерную непрерывную норму погрешности с верхней границей абсолютной погрешности (20),

где ε_p – приведенная абсолютная погрешность датчиков (прогибомеров),

v_p – предел измерений датчиков, $\Delta[v(d, x_i)]$ – абсолютная погрешность датчиков в СИ [33].

Вычисленные значения коэффициентов $d_{n,r}$ содержат погрешность. Чувствительность верхней границы абсолютной погрешности коэффициента $d_{n,r}$ – числа $\Delta_{\max} [d_{n,r}]$ к ошибкам

начальных данных определяется соотношением (21), где $\Lambda_{n,r} = \max \sum_{i=1}^N |l_{n,r,i}(0)|$ – константа Лебега [32].

С учетом соотношений (20) справедлива оценка решения задачи по неравенству (22) абсолютным числом обусловленности $\lambda_{n,r}(X)$, связывающим верхние границы абсолютной погрешности датчиков $\Delta_{\max} [v(x_i)]$ и решения вычислительной задачи $\Delta_{\max} [d_{n,r}]$. Абсолютное число обусловленности совпадает с функцией Лебега (23), которую используем в качестве целевой функции в задаче восстановления коэффициентов многочлена (1), позволяющей оценить влияние погрешности СИ и распределения узлов сетки аппроксимации на точность вычисления коэффициентов $d_{n,r}$. Функция (23) является аналогом функции Лебега в [30, с. 59] с тем отличием, что число узлов аппроксимации в (23) меньше на единицу.

В оптимизационных исследованиях вводим целевой параметр (24), параметром регуляризации исследуемой обратной задачи получаемое редуцией измерений распределение узлов сетки аппроксимации (3), а критерием оптимизации решения задачи функцию (25). Функции (24) и (25) могут быть реализованы прямым аналитическим методом разыскания безусловного экстремума (минимума) функции (12-5) нескольких аргументов – координат узлов аппроксимации на точечном множестве X с учетом формул лагранжевых коэффициентов $l_{n,r,i}(0)$ или численными методами. Показателем качества решения задачи применим показатель (26) [32].

Результаты исследования и их анализ

Лагранжевы коэффициенты $l_{3,2,i}(0)$ целевой характеристики $d_{2,2}$ в модели измерения и вычислений m_2 получаем методом неопределенных коэффициентов с использованием уравнения (2) порядка $n = 3$ и решением системы уравнений (12) или уравнения (18) в методе дифференцирования интерполяционной формулы при $n = 3, r = 2$; для задачи (11) по формуле (12) получаем абсолютное число обусловленности $\alpha_{3,2}(0)$. Эти же методы используем в моделях измерения и вычислений m_2 и m_3 для получения лагранжевых коэффициентов $l_{3,2,i}(0)$, $l_{4,2,i}(0)$ и абсолютных чисел обусловленности $\alpha_{2,2}(0)$, $\alpha_{3,2}(0)$ при $n = 3$,

$n = 4$ (см. таблицу 1). В модели измерения и вычислений m_2 получен единственный лагранжевый коэффициент $l_{2,2,1}(0)$ целевой характеристики $d_{2,2}$.

Алгоритм получения лагранжевых коэффициентов методом неопределенных коэффициентов в сравнении с методом дифференцирования интерполяционной формулы имеет недостатки. При выводе формул лагранжевых коэффициентов нескольких целевых характеристик для каждой характеристики решается индивидуальная система уравнений (12). Громоздкость вывода формул быстро растет с увеличением степени многочлена $v_n(x)$, особенно для малых значений r , что заметно уже при $n = 4$ и $r = 3$.

Таблица 1 – Лагранжевы коэффициенты $l_{n,2,i}(0)$ и абсолютные числа обусловленности $\lambda_{n,2}$

n	i	Лагранжевы коэффициенты	Абсолютные числа обусловленности задачи
2	1	$\frac{2}{x_1^2}$	$\frac{2}{x_1^2}$
3	1	$-\frac{2x_2}{x_1^2(x_1 - x_2)}$	$2 \frac{x_1^3 + x_2^3}{x_1^2 x_2^2 (x_2 - x_1)}$
	2	$-\frac{2x_1}{x_2^2(x_2 - x_1)}$	
4	1	$\frac{2x_2 x_3}{x_1^2(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)}$	$2 \frac{x_1^3 x_3^3 (x_3 - x_1) + x_1^3 x_2^3 (x_2 - x_1) + x_2^3 x_3^3 (x_3 - x_2)}{x_1^2 x_2^2 x_3^2 (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}$
	2	$\frac{2x_1 x_3}{x_2^2(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)}$	
	3	$\frac{2x_1 x_2}{x_3^2(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}$	
5	1	$-2 \frac{x_2 x_3 x_4}{x_1^2(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4)}$	$\sum_{i=1}^4 l_{4,2,i}(0) $
	2	$-2 \frac{x_1 x_3 x_4}{x_2^2(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4)}$	
	3	$-2 \frac{x_1 x_2 x_4}{x_3^2(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)(x_3 - x_4)}$	
	4	$-2 \frac{x_1 x_2 x_3}{x_4^2(x_4 - x_1)(x_4 - x_2)(x_4 - x_3)}$	

В процессе получения показателя (26) минимизированием функции (23) определяем оптимальные координаты узлов сетки аппроксимации, в частности, безразмерные координаты $x_{n,i,m,l} = lx_{n,i,m}$ (см. таблицу 2).

Таблица 2 – Оптимальные координаты узлов сетки аппроксимации $x_{n,i,m,l}$ при $x_{n,n,m,l} = 1,000$

Модели	m_2	m_3		m_4		
i	1	1	2	1	2	3
Формулы координат в радикалах	$\sqrt[3]{1-\sqrt{2}} + \sqrt[3]{1+\sqrt{2}}$	-	-	-	-	-
Численные значения координат	0,5961	0,3546	0,8143	0,2322	0,5994	0,8896

Оптимальные координаты узлов сетки аппроксимации в моделях m_3 и m_4 получены только численным способом из-за сложности аналитического решения в силу теоремы Абеля.

При заданных (фиксированных) осадке опоры балки и наклоне упругой линии в опорном поперечном сечении балки в рассмотренных моделях измерения и вычислений получено уменьшение погрешности определения выходных величин и значения критерия оптимизации решения задачи с $N = n - 1$ в сравнении с исследованным в работе [24] условием $N = n + 1$ примерно на порядок, значение этого критерия также меньше значений критериев при заданном одном коэффициенте уравнения прогибов балки [32, 33] с $N = n$ (см. рисунок 2). Численные значения критерия оптимизации решения задачи получены для уравнения прогибов второй, третьей, четвертой и пятой степени. На рисунке 2 показаны выборки 1, 2, 3 и 4 генеральных совокупностей множеств элементов $\alpha_{ns,n,2}$. Общие признаки выборки 1 для моделей m_1, m_2, m_3 : определению подлежат все коэффициенты уравнения прогибов балки, $N = n + 1$, точечное множество узлов сетки аппроксимации X на отрезке $[0,05l, 0,95l]$ [24]. Общие признаки выборок 2 и 3 для моделей m_1, m_2, m_3 : определению подлежат коэффициенты уравнения прогибов балки кроме известного фиксированного коэффициента $d_{n,0}$ и $d_{n,1}$ соответственно, $N = n$, множество узлов сетки аппроксимации X на отрезке $[0, l]$. Общие признаки выборок 4 и 5 для моделей m_1, m_2, m_3, m_4 : определению подлежат коэффициенты уравнения прогибов балки кроме известных фиксированных коэффициентов $d_{n,0}$ и $d_{n,1}$, $N = n - 1$, множество узлов сетки аппроксимации X на отрезке $(0, l]$. Разнообразие элементов $\alpha_{ns,n,2}$ и $\alpha_{ns,n,2,c}$ в выборках характеризуем экстремальными крайними значениями 2,00 и 1564, размахом 782. Для этих обратных задач значения показателя качества находятся в диапазоне от 6×10^{-4} до 0,5, показатель качества снижается с ростом степени уравнения (1). Значение показателя качества выборки 1 при $N = n + 1$ находится в диапазоне от 2×10^{-3} до 5×10^{-2} , значение показателя качества выборки 4 при $N = n - 1$ для моделей m_1, m_2, m_3 находится в диапазоне от 6×10^{-3} до 0,5. Результаты выборки 5 на равномерной сетке выявили преимущество оптимальной неравномерной сетки в выборке 4 в 10-80 раз.

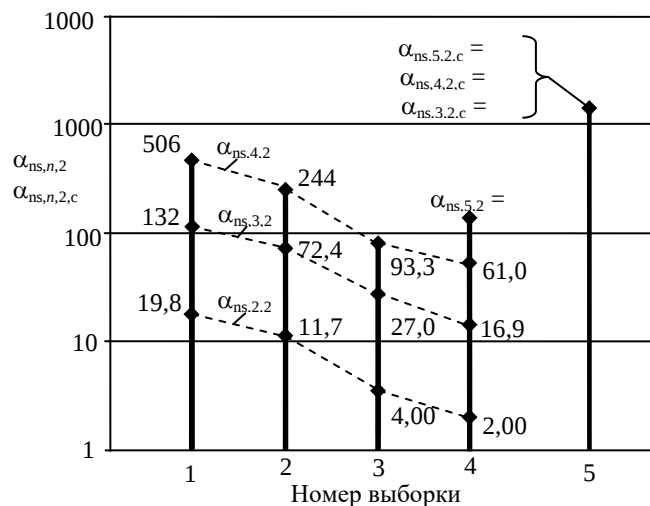


Рисунок 2 – Сопоставление критериев оптимизации решения задачи

Сравнение значений критерия оптимизации решения задачи показывает, что рост числа заданных коэффициентов уравнения прогибов снижает влияние погрешности измерения прогибов балки на точность решения задачи.

Экспериментально проверена разработанная математическая модель измерения и вычислений m_3 при определении коэффициента $d_{4,2}$ уравнения прогибов балки с фиксированными двумя младшими коэффициентами в обратной задаче Коши для стоечно-балочной конструктивной системы. Выполнен натурный эксперимент по методике [9] на физической модели с балкой, нагруженной равномерной нагрузкой $q = 30,90$ Н/м от

собственного веса и сосредоточенной нагрузкой $P = -50,00$ Н на свободном конце. Физическая модель балки – стальная консольная балка; длина $l = 1,000$ м; модуль упругости $E = 201,0$ ГПа; поперечное сечение в виде прямоугольника (высота $0,0400$ м, ширина $0,0100$ м). Фиксированная осадка опоры балки $d_{4,0} = -2 \cdot 10^{-6}$ м. Фиксированный наклон упругой линии в опорном поперечном сечении балки $d_{4,1} = 170 \cdot 10^{-6}$ рад. В СИ использованы четыре прогибомера. Класс точности прогибомеров 0. Предел измерений прогибомеров 2 мм. Цена деления прогибомеров $0,002$ мм.

Натурные эксперименты на модели измерения и вычислений m_3 на примере определения коэффициента $d_{4,2}$ уравнения прогибов балки с фиксированными двумя младшими коэффициентами при жесткой заделке балки позволили сравнить расчетные и экспериментальные значения прогибов (см. таблицу 3).

Таблица 3 – Параметры прогибов в модели m_3

Номер узла сетки i	1	2	3
Координаты узлов сетки аппроксимации, м	0,355	0,814	1,000
Расчетные значения $v_4(x_i)$, м	$-300,7 \times 10^{-6}$	$-1,4162 \times 10^{-3}$	$-1,9803 \times 10^{-3}$
Экспериментальные значения $v_4^*(x_i)$, м	-299×10^{-6}	$-1,413 \times 10^{-3}$	$-1,978 \times 10^{-3}$
Погрешность $R(v_i)$, м	2×10^{-6}	3×10^{-6}	2×10^{-6}
Дополнительная относительная погрешность $\delta(d_{4,2})$ при неточности в 1 мм фиксирования x_i , %	1,7	0,48	0,24

Результаты аналитическо-экспериментальной обратной задаче Коши по восстановлению значения $d_{4,2}$ с натурным экспериментом: заданное значение $d_{4,2} = -6572 \times 10^{-6} \text{ м}^{-1}$, значение выходного параметра в модели измерения и вычислений $w_{4,2} = -651 \times 10^{-5} \text{ м}^{-1}$, абсолютная погрешность вычисления $d_{4,2} - R[d_{4,2}] = 6 \cdot 10^{-5} \text{ м}^{-1}$, относительная погрешность вычисления $d_{4,2} - \delta(d_{4,2}) = 0,9\%$.

Результат оценки натурального эксперимента подтверждает обоснованность предложенной модели измерения и вычислений и натурального эксперимента с балкой.

$$\frac{R[d_{4,2}]}{l^2 \min R[v_i]} = \frac{6 \times 10^{-5}}{2 \times 10^{-6}} = 3 \times 10^1 < \alpha_{ns,4,2} = 93,3$$

В таблицу 3 последней строкой представлены результаты вычислительного эксперимента по оценке влияния неточности фиксирования оптимальных координат узлов сетки аппроксимации на точность аналитическо-экспериментальной обратной задачи Коши. Эта дополнительная погрешность требует учета при разработке плана экспериментально-теоретических исследований строительных конструкций, так как может по величине быть сопоставимой с основной погрешностью от влияния погрешности датчиков прогиба.

Выводы

На основе теории обратных задач решена аналитическо-экспериментальная коэффициентная обратная задача Коши с заданными коэффициентами членов двух младших степеней уравнения прогибов балки для стоечно-балочной конструкции при жестком сопряжении балки со стойкой. Рассмотрены модели вычислений методами решения СЛАУ, неопределенных коэффициентов и численным дифференцированием набора значений измеренных прогибов. Сравнение значений критерия оптимизации решения задачи показало снижение влияния на точность задачи погрешности измерения прогибов балки с ростом числа заданных коэффициентов уравнения прогибов.

Представленные результаты решения аналитическо-экспериментальной коэффициентной обратной задачи Коши к определению коэффициентов уравнения прогибов балки для стоечно-балочной конструкции можно рекомендовать к использованию для анализа конструкций при экспериментально-теоретических исследованиях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Tushina O.A., Danilov A.I. The stiffness of rigid joints of beam with hollow section column // Magazine of Civil Engineering. 2016. Vol. 64(4). Pp. 40–51. <https://doi.org/10.5862/MCE.64.4>.
2. Tushina V.M. Semi-rigid steel beam-to-column connections // Magazine of Civil Engineering. 2017. Vol. 73(5). Pp. 25–39. <https://doi.org/10.18720/MCE.73.3>.
3. Кашеварова Г.Г., Тонков Ю.Л., Тонков И.Л. Интеллектуальная автоматизация инженерного обследования строительных объектов // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. 2017. Vol. 13(3). Pp. 42–57. <https://doi.org/10.22337/1524-5845-2017-13-3-42-57>.
4. Локтионов А.П. Информационно-измерительная система с лагранжевой аппроксимацией для экспериментально-расчетного определения усилий в элементах конструктивных систем при обследовании зданий текстильной и химической промышленности // Известия высших учебных заведений. Технология текстильной промышленности. 2017. Т. 370. № 4. С. 252–258. URL:http://tp.ivgpn.com/wp-content/uploads/2017/12/370_55.pdf (дата обращения: 26.12.2022).
5. Yang C. Sensor placement for structural health monitoring using hybrid optimization algorithm based on sensor distribution index and FE grids // Structural Control and Health Monitoring. 2018. Vol. 5(6). <https://doi.org/10.1002/stc.2160>.
6. Люблинский В.А., Томина М.В. Экспериментальное исследование прочности и податливости вертикального сварного стыка // Системы. Методы. Технологии. 2018. № 3 (39). С. 154–158. doi:10.18324/2077-5415-2018-3-154-158.
7. Lehmhus D., Busse M. Structural health monitoring (SHM). In: Bosse S., Lehmhus D., Lang W. (eds). Material Integrated Intelligent Systems Technology and Applications: Technology and Applications. John Wiley & Sons Inc.; 2018. Pp. 529–570. 696 p. <https://doi.org/10.1002/9783527679249>.
8. Малахова А.Н., Маринина Д.А. Податливость вертикальных стыков крупнопанельных зданий на закладных деталях // Строительство и реконструкция. 2019. № 6 (86). С.10–18. doi:10.33979/2073-7416-2019-86-6-10-18.
9. Локтионов А.П. Информационная система анализа балочных элементов под комбинированной нагрузкой // Строительная механика и расчет сооружений. 2021. № 2. С. 45–52. doi:10.37538/0039-2383.2021.2.45.52.
10. Локтионов А.П. Информационно-измерительная система мониторинга балок в строительных конструкциях // Известия Юго-Западного государственного университета. 2021. Т. 25. № 4. С. 23–51. doi:10.21869/2223-1560-2021-25-4-29-51.
11. Авдеев К.В., Мамин А.Н., Бобров В.В., Бамматов А.А., Мартыанов К.В., Пряхин С.Н. Петлевые стыки стержневой арматуры. История развития, проблемы и актуальность // Строительство и реконструкция. 2022. № 6 (104). С. 4–11.
12. Локтионов А. П. Об измерении изгибающих нагрузок навесными электротензометрическими преобразователями // Изв. вузов. Авиационная техника. 1982. № 2. С. 73–75.
13. Локтионов А.П. Обзор и анализ способов и устройств измерения поперечной изгибной нагрузки на элементы шасси / Курск. политехн. ин-т. Курск, 1991. 45 с. – Деп. В ЦНТИ ГА 15.09.91, № 835-га91.
14. Ватульян А.О., Плотноков Д.К. Обратные коэффициентные задачи в механике // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2019. № 3. С. 37–47. doi: 10.15593/perm.mech/2019.3.0.
15. Shi Z., O'Brien W. Development and implementation of automated fault detection and diagnostics for building systems: A review // Automation in Construction. 2019. No. 104. Pp. 215–229. doi:10.1016/j.autcon.2019.04.002.
16. Favorskaya A.V., Petrov I.B. Grid-characteristic calculation of multistorey buildings destruction // Mathematical Models and Computer Simulations. 2020. No. 32(3). Pp. 102–114. doi:<https://doi.org/10.20948/mm-2020-03-06>.
17. Перельмутер А.В. Обратные задачи строительной механики // Вестник Томского государственного архитектурно-строительного университета. 2020. № 22(4). С. 83–101. doi:10.31675/1607-1859-2020-22-4-83-101.
18. Siraya T.N. Methods of data processing in measurements and metrological models // Measurement Techniques. 2018. No. 61. Pp. 9–16. <https://doi.org/10.1007/s11018-018-1380-y>.
19. Smirnova A., Bakushinsky A. On iteratively regularized predictor-corrector algorithm for parameter identification // Inverse Problems. 2020. Vol. 36. No. 12. id.125015. P. 30. doi:10.1088/1361-6420/abc530.
20. Кудрявцев К.Я. Алгоритм построения полинома наилучшего равномерного приближения по экспериментальным данным // Вестник национального исследовательского ядерного университета МИФИ. 2019. Т. 8(5). С. 480–486. <https://doi.org/10.1134/S2304487X1905002X>.
21. Bakushinsky A. B., Kokurin, M. M., Kokurin, M. Yu. Regularization Algorithms for Ill-Posed Problems. Inverse and Ill-Posed Problems Series, 61. Boston. USA: De Gruyter; 2018. <https://doi.org/10.1515/9783110557350>.

22. Балакин Д.А., Пытьев Ю.П. Редукция измерения при наличии субъективной информации // Математическое моделирование и численные методы. 2018. Т. 30. № 12. С. 84–110. doi:10.31857/S023408790001938-5.
23. Verbrugge M.W., Wampler C.W., Baker D.R. Smoothing methods for numerical differentiation to identify electrochemical reactions from open-circuit-potential data // Journal of The Electrochemical Society. 2018. Vol. 165 No. 16. Pp. A4000-A4011. <https://doi.org/10.1149/2.0951816.jes>.
24. Loktionov A.P. Numerical differentiation in the measurement model // Measurement Techniques. 2019. No. 62. Pp. 673-680. <https://doi.org/10.1007/s11018-019-01677-z>.
25. Kalenchuk-Porkhanova A. Best Chebyshev approximation for compression of big information arrays // Proceedings of the 10th International Scientific and Practical Conference named after A. I. Kitov "Information Technologies and Mathematical Methods in Economics and Management (IT&MM-2020)". October 15-16, 2020. Moscow, Russia. P1-13. URL:<http://sunsite.informatik.rwth-aachen.de/ftp/pub/publications/CEUR-WS/Vol-2830.zip.paper25.pdf>. (дата обращения 20.12.2022).
26. Boykov I.V., Krivulin N.P. An approximate method for recovering input signals of measurement transducers // Measurement Techniques. 2022. V. 64. No. 4. Pp. 943-948. <https://doi.org/10.1007/s11018-022-020263>.
27. Loktionov A.P. Regularization of the lattice time function of the signal in the communication channel // Telecommunications and Radio Engineering. 2013. Vol. 72. No. 2. Pp. 161-171. doi:10.1615/TelecomRadEng.v72.i2.70.
28. Мешихин И.А., Гаврюшин С.С. Критерии качества и алгоритм выбора редуцированных моделей для мониторинга технических конструкций // Математическое моделирование и численные методы. 2016. Т. 12. № 4. С. 103-121. <https://doi.org/10.18698/2309-3684-2016-4-103121>.
29. Ibrahimoglu B.A. Lebesgue functions and Lebesgue constants in polynomial interpolation // Journal of Inequalities and Applications. 2016. No. 93. Pp. 1-15. <https://doi.org/10.1186/s13660-016-1030-3>.
30. Loktionov A.P. Information measuring system of numerical differentiation for the analysis of elements of mechanical structures // Journal of the Serbian Society for Computational Mechanics. 2018. Vol. 12. No. 2. Pp. 53-71. doi: 10.24874/jsscm.2018.12.02.04.
31. Meshchikhin I.A., Gavryushin S.S. The envelope method in the problem of choosing a rational composition of measuring instruments // Measurement Techniques. 2021. No. 64. Pp. 151-155. doi:<https://doi.org/10.1007/s11018-021-01910-8>.
32. Локтионов А.П. Обратная задача коши для балок в строительных конструкциях // Строительство и реконструкция. 2022. № 2 (100). С. 13-25. doi:10.33979/2073-7416-2022-100-2-13-25.
33. Локтионов А.П. Восстановление начальных параметров балки при заданных младших коэффициентах уравнения прогибов // Строительная механика и расчет сооружений. 2022. № 6. С. 2-7. doi:10.37538/0039-2383.2022.6.2.7 ИФ =0,552.

REFERENCES

1. Tushina O.A., Danilov A.I. The stiffness of rigid joints of beam with hollow section column. Magazine of Civil Engineering. 2016. Vol. 64. No. 4. Pp. 40-51. <https://doi.org/10.5862/MCE.64.4>.
2. Tushina V.M. Semi-rigid steel beam-to-column connections. Magazine of Civil Engineering. 2017. Vol. 73. No. 5. Pp. 25-39. <https://doi.org/10.18720/MCE.73.3>.
3. Kashevarova G.G., Tonkov, Y.L., Tonkov I.L. Intel'ektual'naya avtomatizatsiya inzhenernogo obsledovaniya stroitel'nykh ob'ektov [Intellectual automation of engineering survey of building objects] // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, 2017. Vol. 13. No. 3. Pp. 42-57. <https://doi.org/10.22337/1524-5845-2017-13-3-42-57>. (rus).
4. Loktionov A.P. Informacionno-izmeritel'naya sistema s lagranzhevoj approksimaciej dlya e'ksperimental'no-raschetnogo opredeleniya usilij v e'lementax konstruktivny'x sistem pri obsledovanii zdaniy tekstil'noj i ximicheskoy promyshlennosti [Information-measuring system of experimental and calculation determination of a bending moment with the Lagrange approximation at inspection of buildings]. Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii, Seriya Tekhnologiya Tekstil'noi Promyshlennosti. 2017. Vol. 370. No. 4. Pp. 252-258. URL:http://tup.iugpu.com/wp-content/uploads/2017/12/370_55.pdf (data obrashheniya: 26.12.2022). (rus).
5. Yang C. Sensor placement for structural health monitoring using hybrid optimization algorithm based on sensor distribution index and FE grids. Structural Control and Health Monitoring. 2018. Vol. 5. No. 6. P. 2160. <https://doi.org/10.1002/stc.2160>.
6. Lyublinskiy V.A., Tomina M.V. E'ksperimental'noe issledovanie prochnosti i podatlivosti vertikal'nogo svarnogo sty'ka [Experimental study of the strength and suppleness of a vertical welded joint]. Sistemy. Metody. Tekhnologii. 2018. Vol. 3. No. 39. Pp. 154-158. doi:10.18324/2077-5415-2018-3-154-158. (rus).
7. Lehmhus D., Busse M., Structural Health Monitoring (SHM). In: Bosse S., Lehmhus D., Lang W. (eds). Material Integrated Intelligent Systems Technology and Applications: Technology and Applications. John Wiley & Sons Inc.; 2018. Pp. 529–570. 696 p. <https://doi.org/10.1002/9783527679249>.

8. Malakhova A.N., Marinina D.A. Podatlivost' vertikal'ny'x sty'kov krupnopanel'ny'x zdaniy na zakladny'x detal'yax [The compliance of vertical joints of large-panel buildings made on embedded parts]. Building and Reconstruction. 2019. Vol. 86. No. 6. Pp. 10-18. doi:10.33979/2073-7416-2019-86-6-10-18. (rus).
9. Loktionov A.P. Informacionnaya sistema analiza balochny'x e'lementov pod kombinirovannoj nagruzkoj [Information system for analysis of beam elements under combined load]. Structural Mechanics and Analysis of Constructions. 2021. No. 2. Pp. 45-52. doi:10.37538/0039-2383.2021.2.45.52. (rus).
10. Loktionov A.P. Informacionno-izmeritel'naya sistema monitoringa balok v stroitel'ny'x konstrukciyax [Information and Measurement System for Monitoring Beams in Building Structures]. Proceedings of the Southwest State University. 2021. Vol. 25. No. 4. Pp. 29-51. doi:10.21869/2223-1560-2021-25-4-29-51. (rus).
11. Avdeev K.V., Mamin A.N., Bobrov V.V., bammatov A.A., Martyanov K.V., Pryakhin S.N. Petlevy'e sty'ki sterzhnevoj armatury'. Istoriya razvitiya, problemy' i aktual'nost' [The loop joins of rebars. development history, problems and relevance]. Building and reconstruction. 2022. No. 6 (104). Pp. 4-11. (rus).
12. Loktionov A.P. Measurement of bending loads with suspended electric strain gages // Soviet Aeronautics. 1982. No. 25(2). Pp. 85-88.
13. Loktionov A.P. Obzor i analiz sposobov i ustroystv izmereniya poperechnoj izgibnoj nagruzki na e'lementy' shassi [Review and analysis of methods and devices for measuring transverse bending load on chassis elements]. Kursk. politehn. in-t. Kursk, 1991. 45 p. Dep. V CNTI GA 15.09.91, № 835-ga91. (rus).
14. Vatulyan A.O., Plotnikov D.K. Obratny'e koe'ffitsientny'e zadachi v mexanike [Inverse coefficient problems in mechanics]. Vestnik Permskogo nacional'nogo issledovatel'skogo politexnicheskogo universiteta. Mexanika. 2019. No. 3. Pp. 37-47. doi:10.15593/perm.mech/2019.3.04. (rus).
15. Shi Z., O'Brien W. Development and implementation of automated fault detection and diagnostics for building systems: A review. Automation in Construction. 2019. No. 104. Pp. 215-229. doi:10.1016/j.autcon.2019.04.002.
16. Favorskaya A.V., Petrov I.B. Grid-characteristic calculation of multistorey buildings destruction // Mathematical Models and Computer Simulations. 2020. No. 32(3). Pp. 102-114. doi:https://doi.org/10.20948/mm-2020-03-06.
17. Perelmuter A.V. Obratnye zadachi stroitel'noi mekhaniki [Inverse problems of structural mechanics]. Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo arhitekturno-stroitel'nogo universiteta. 2020. Vol. 22. No. 4. Pp. 83-101. doi:10.31675/1607-1859-2020-22-4-83-101. (rus).
18. Siraya T.N. Methods of data processing in measurements and metrological models // Measurement Techniques. 2018. No. 61. Pp. 9-16. https://doi.org/10.1007/s11018-018-1380-y.
19. Smirnova A., Bakushinsky A. On iteratively regularized predictor-corrector algorithm for parameter identification. Inverse Problems. 2020. Vol. 36. No. 12. id.125015. P. 30. doi:10.1088/1361-6420/abc530.
20. Kudryavcev K.Ya. Algoritm postroeniya polinoma nailuchshego ravnomernogo priblizheniya po eksperimental'ny'm dannym [Algorithm for constructing a polynomial of the best uniform approximation from experimental data]. Vestnik nacional'nogo issledovatel'skogo yadernogo universiteta MIFI. 2019. Vol. 8. No. 5. Pp. 480-486. https://doi.org/10.1134/S2304487X1905002X. (rus).
21. Bakushinsky A. B., Kokurin, M. M., Kokurin, M. Yu. Regularization Algorithms for Ill-Posed Problems. Inverse and Ill-Posed Problems Series, 61. Boston. USA: De Gruyter; 2018. https://doi.org/10.1515/9783110557350.
22. Balakin D. A., Pyt'ev Yu. P. Measurement reduction in the presence of subjective information // Mathematical Models and Computer Simulations. 2019. Vol. 11, No. 4. Pp. 596-610. https://doi.org/10.1134/S2070048219040033.
23. Verbrugge M.W., Wampler C.W., Baker D.R. Smoothing methods for numerical differentiation to identify electrochemical reactions from open-circuit-potential data // Journal of The Electrochemical Society. 2018. Vol. 165. No. 16. Pp. A4000-A4011. https://doi.org/10.1149/2.0951816jes.
24. Loktionov A.P. Numerical differentiation in the measurement model // Measurement Techniques. 2019. No. 62. Pp. 673-680. https://doi.org/10.1007/s11018-019-01677-z.
25. Kalenchuk-Porkhanova A. Best Chebyshev approximation for compression of big information arrays. Proceedings of the 10th International Scientific and Practical Conference named after A. I. Kitov "Information Technologies and Mathematical Methods in Economics and Management (IT&MM-2020)". October 15-16. 2020. Moscow. Russia. Pp. 1-13. URL: http://sunsite.informatik.rwth-aachen.de/ftp/pub/publications/CEUR-WS/Vol-2830.zip. paper25.pdf. (accessed 20.12.2022).
26. Boykov I.V., Krivulin N.P. An approximate method for recovering input signals of measurement transducers // Measurement Techniques. 2022. Vol. 64. No. 4. Pp. 943-948. https://doi.org/10.1007/s11018-022-020263.
27. Loktionov A.P. Regularization of the lattice time function of the signal in the communication channel // Telecommunications and Radio Engineering. 2013. Vol. 72. No. 2. Pp. 161-171. doi:10.1615/TelecomRadEng.v72.i2.70.
28. Meschikhin I.A., Gavryushin S.S. Algoritm postroeniya polinoma nailuchshego ravnomernogo priblizheniya po eksperimental'ny'm dannym [Algorithm for constructing a polynomial of the best uniform

approximation from experimental data]. Mathematical Models and Computer Simulations. 2016. Vol. 12. No. 4. Pp. 103-121. <https://doi.org/10.18698/2309-3684-2016-4-103121>. (rus),

29. Ibrahimoglu B.A. Lebesgue functions and Lebesgue constants in polynomial interpolation // Journal of Inequalities and Applications. 2016. No. 93. Pp. 1-15. <https://doi.org/10.1186/s13660-016-1030-3>.

30. Loktionov A.P. Information measuring system of numerical differentiation for the analysis of elements of mechanical structures // Journal of the Serbian Society for Computational Mechanics. 2018. Vol. 12. No. 2. Pp. 53-71. doi:10.24874/jsscm.2018.12.02.04.

31. Meshchikhin I.A., Gavryushin S.S. The envelope method in the problem of choosing a rational composition of measuring instruments // Measurement Techniques. 2021. No. 64. Pp. 151-155. doi:<https://doi.org/10.1007/s11018-021-01910-8>.

32. Loktionov A.P. Obratnaya zadacha koshi dlya balok v stroitel'nykh konstrukciyax [Inverse cauchy problem for beams in building structures]. Building and reconstruction. 2022. No. 2 (100). Pp. 13-25. doi:10.33979/2073-7416-2022-100-2-13-25. (rus)

33. Loktionov A.P. Vosstanovlenie nachal'nykh parametrov balki pri zadannykh mladshix koefficientax uravneniya progibov [Recovery of the initial parameters of the beam with the given junior coefficients of the deflection equation]. Structural Mechanics and Analysis of Constructions. 2022. No. 6. Pp. 2-7. doi:10.37538/0039-2383.2022.6.2.7, (rus)

Информация об авторе:

Локтионов Аскольд Петрович

ФГБОУ ВО «Юго-Западный государственный университет», г. Курск, Россия,

доктор технических наук, доцент.

E-mail: loapa@mail.ru

Information about authors:

Loktionov Askold P.

Southwest State University, Kursk, Russia,

doctor of engineering, associate professor.

E-mail: loapa@mail.ru