УДК 624.072 DOI: 10.33979/2073-7416-2022-104-6-12-21

П.Д. ДЁМИНОВ[1]
[1]Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, г. Москва, Россия

ВЕРОЯТНОСТНЫЕ ПАРАМЕТРЫ ЖЕСТКОСТИ ЖЕЛЕЗОБЕТОННОЙ БАЛКИ, ЛЕЖАЩЕЙ НА СТОХАСТИЧЕСКИ НЕОДНОРОДНОМ ОСНОВАНИИ

Аннотация. *Представлены результаты определения вероятностных параметров прочностных характеристик бетона при контроле кубиковой прочности и прочности при растяжении, а также вероятностных параметров распределения модуля деформации бетона. Проведена оценка влияния стохастической неоднородности бетона на приведенный момент инерции железобетонного сечения и получены вероятностные параметры распределения начальной изгибной жесткости балки. Проведена оценка влияния статистического характера прочности бетона на высоту сжатой зоны бетона и упругопластический момент сопротивления сечения балки и получены вероятностные параметры распределения момента образования нормальных трещин. Определена вероятность образования нормальных трещин в фундаментной балке для случаев контроля кубиковой прочности бетона и прочности бетона на растяжение. Получены характеристики распределения длины зон с трещинами в фундаментной балке, загруженной рядом сосредоточенных случайных сил для случаев контроля кубиковой прочности бетона и прочности бетона на растяжение, что открывает возможность решения уравнения изгиба балки на упругом основании с кусочно-постоянной жесткостью в замкнутом виде.*

Ключевые слова: *железобетонная балка, упругое основание, момент трещиностойкости, нормальное распределение, вероятностные параметры, зоны с трещинами.*

P.D. DEMINOV[1]
[1]National Research Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russia

PROBABILISTIC STIFFNESS PARAMETERS OF A REINFORCED CONCRETE BEAM LYING ON A STOCHASTICALLY INHOMOGENEOUS FOUNDATION

Abstract. *The results of determining the probabilistic parameters of the strength characteristics of concrete in the control of cubic strength and tensile strength, as well as the probabilistic parameters of the distribution of the concrete deformation modulus are presented. The influence of stochastic inhomogeneity of concrete on the reduced moment of inertia of a reinforced concrete section has been evaluated, and the probabilistic parameters of the distribution of the initial bending stiffness of the beam have been obtained. The influence of the statistical nature of concrete strength on the height of the compressed zone of concrete and the elastic-plastic section modulus of the beam was evaluated, and the probabilistic parameters of the distribution of the moment of normal cracking were obtained. The probability of formation of normal cracks in the foundation beam is determined for the cases of control of the cubic strength of concrete and the tensile strength of concrete. The characteristics of the distribution of the length of zones with cracks in a foundation beam loaded with a number of concentrated random forces are obtained for the cases of controlling the cubic strength of concrete and the tensile strength of concrete, which opens up the possibility of solving the equation of beam bending on an elastic foundation with piecewise constant stiffness in a closed form .*

Keywords: *reinforced concrete beam, elastic foundation, crack resistance moment, normal distribution, probability parameters, zones with cracks.*

Введение

Обеспечение надежности конструкций должно опитраться на реальные свойства материалов и нагрузок [1]. Прочностные и деформационные характеристики бетона и соответственно жесткость железобетонной балки до и после образования трещин обладают ярко выраженной случайной природой [2], характеристики грунтов основания имеют стахастическую природу [3, 4]. Учет стохастичесой природы факторов, влияющих на надежность конструкций на упругом основании, позволяет оценить их надежность [5, 6]. Разработка расчетного аппарата, необходимого для решения задач в вероятностной постановке, опирается на надежный статистический анализ [7, 8] и [9].

В работе [10] получены статистические параметры распределения плотности предельных изгибающих моментов и определена вероятность разрушения фундаментной балки на статистически неоднородном основании с одним коэффициентом постели. В работе [11] построеные вероятностные характеристики предельной поперечной силы с учетом слуйных свойств прочности бетона. Вероятность разрушения железобетонной балки, лежащей на стохастическом основании с двумя коэффициентами постели, по наклонному сечению от поперечной силы определена в работе [12]. Для случая изгиба железобнтонной балки со случайными параметрами, лежащей на статистически неоднородном основании в работе [13] найдена вероятность образования запредельных прогибов.

Модели и методы

Будем рассматривать прочностные характеристики бетона R_b, R_{bt} и его начальный модуль упругости E_b как функции случайной нормально распределенной [14] кубиковой прочности бетона R с математическим ожиданиями и дисперсиями гауссовских распределений $< R_b >,\ D_{R_b}, < R_{bt} >,\ D_{R_{bt}}, < E_b >,\ D_{E_b}$. При контроле прочности бетона на растяжение её вероятностными параметрами являются $< R_{bt} > u\ D_{R_{bt}}$.

Прочность бетона на растяжение R_{bt} как функцию кубиковой прочности бетона R представим в форме линейной зависимости, которая позволяет учесть не только статистический характер прочности бетона, но и вероятностный характер эмпирической зависимости $R_{bt} = f(R)$

$$R_{bt} = a_{bt}R + b_{bt},$$

при этом коэффициенты $a_{bt}\ u\ b_{bt}$ подбираются таким образом, чтобы учесть изменчивости кубиковой прочности бетона и его прочности на растяжение.

Действующие нормативные документы допускают принимать кубиковую прочность бетона распределённой по нормальному закону. Тогда, как показано в [15], математические ожидания <R>, $< R_{bt} >$, дисперсии $D_R, D_{R_{bt}}$, средние коэффициенты вариации $\nu_R,\ \nu_{R_{bt}}$ кубиковой прочности бетона R и прочности бетона на растяжение R_{bt} будут равны

$$< R > = R_n\ \frac{\gamma_R^p - \frac{\gamma_R^n}{\gamma_b}}{\gamma_R^p - \gamma_R^n};\quad D_R = \left(R_n \frac{1-\frac{1}{\gamma_b}}{\gamma_R^p - \gamma_R^n}\right)^2;\qquad \nu_R = \frac{1-\frac{1}{\gamma_b}}{\gamma_R^p - \frac{\gamma_R^n}{\gamma_b}};\tag{1}$$

$$< R_{bt} > = R_{bt,n}\ \frac{\gamma_{R_{bt}}^p - \frac{\gamma_{R_{bt}}^n}{\gamma_{bt}}}{\gamma_{R_{bt}}^p - \gamma_{R_{bt}}^n};\ D_{R_{bt}} = \left(R_{bt,n} \frac{1-\frac{1}{\gamma_{bt}}}{\gamma_{R_{bt}}^p - \gamma_{R_{bt}}^n}\right)^2;\quad \nu_{R_{bt}} = \frac{1-\frac{1}{\gamma_{bt}}}{\gamma_{R_{bt}}^p - \frac{\gamma_{R_{bt}}^n}{\gamma_{bt}}},\tag{2}$$

где $R_{n\,,} R_{bt,n}$ - нормативные значения кубиковой прочности бетона и его прочности при растяжении;

$\gamma_R^n, \gamma_{R_{bt}}^n, \gamma_R^p, \gamma_{R_{bt}}^p,$ – число средних квадратических отклонений кубиковой прочности и прочности на растяжение, позволяющих достичь требуемых обеспеченностей нормативных и расчетных значений прочностей [16]. Для нормального распределения вероятностей для нормативных значений прочностных характеристик $\gamma_R^n,\ \gamma_{R_{bt}}^n = 1{,}645$ с обеспеченностью 0,9495, а для расчетных значений $\gamma_R^p,\ \gamma_{R_{bt}}^p = 3$ с обеспеченностью 0,99865;

γ_b, γ_{bt} - коэффициенты надёжности по бетону, которые принимаются равными 1,3 для кубиковой прочности и 1,3 или 1,5 для прочности при растяжении в соответствии с действующими нормативными документами. В дальнейшем все неоговорённые обозначения совпадают с [21].

С учетом выражений (1) коэффициенты будут равны

$$a_{bt} = \frac{R_{bt,n}}{R_n\left(1-\gamma^n_{R_{bt}}\frac{1-\frac{1}{\gamma_{bt}}}{\gamma^p_{R_{bt}}-\frac{\gamma^n_{R_{bt}}}{\gamma_{bt}}}\right)\frac{1-\frac{1}{\gamma_b}}{\gamma^p_R-\gamma^n_R}}, \quad b_{bt} = \frac{R_{bt,n}\left(\frac{1-\frac{1}{\gamma_b}}{\gamma^p_R-\frac{\gamma^n_R}{\gamma_b}}-\frac{1-\frac{1}{\gamma_{bt}}}{\gamma^p_{R_{bt}}-\frac{\gamma^n_{R_{bt}}}{\gamma_{bt}}}\right)}{\left(1-\gamma^n_{R_{bt}}\frac{1-\frac{1}{\gamma_{bt}}}{\gamma^p_{R_{bt}}-\frac{\gamma^n_{R_{bt}}}{\gamma_{bt}}}\right)\frac{1-\frac{1}{\gamma_b}}{\gamma^p_R-\frac{\gamma^n_R}{\gamma_b}}}. \quad (3)$$

Математическое ожидание и дисперсия прочности бетона на растяжение при контроле кубиковой прочности с учетом выражений (2) будут равны

$$< R_{bt} >= a_{bt} < R > +b_{bt}, \quad D_{R_{bt}} = a^2_{bt} D_R .$$

Начальный модуль упругости бетона E_b будем полагать неслучайной функцией кубиковой прочности бетона проверенного практикой вида

$$E_b(R) = 550\,00\, R/(27 + R).$$

После линеаризации функции $E_b(R)$ в окрестности математического ожидания кубиковой прочности бетона $< R >$ получаем вероятностные параметры распределения (математическое ожидание и дисперсию) начального модуля упругости бетона, полагая закон нормальным

$$< E_b >= \frac{550\,00\ < R >}{27+< R >}; \qquad D_{E_b} = \left[\frac{550\,00 \cdot 27}{(27+< R >)^2}\right]^2 D_R .$$

Начальная жесткость железобетонной балки примем в виде

$$B_0(R) = 0{,}85\, I_{red}(R) E_b(R).$$

Приведенный момент инерции железобетонного сечения является функцией случайной кубиковой прочности бетона

$$I_{red}(R) = I_b + \frac{E_s}{E_b(R)}$$

Оценим влияние разброса кубиковой прочности бетона на приведенный момент инерции поперечного сечения балки.

Предположим, что кубиковая прочность бетона получила отклонение от среднего значения на три среднеквадратических отклонения, то есть на 40,5%, даже при высоком коэффициенте армирования балки, равном 2%, отклонение приведенного момента инерции сечения от его среднего значения составит около 1%. Поэтому в дальнейшем будем принимать момент инерции приведенного сечения балки детерминированной величиной, вычисленной при $R =< R >$.

Тогда вероятностные параметры начальной жесткости железобетонной балки будут равны

$$< B_0 > = 0{,}85\, I_{red} < E_b >, \qquad D_{B_0} = (0{,}85\, I_{red})^2 D_{E_b}.$$

Момент образования нормальных трещин в железобетонной балке равен

$$M_{crc}(R_{bt}, R) = R_{bt} W_{pl}(R)\ или\ M_{crc}(R) = (a_{bt} R + b_{bt}) W_{pl}(R).$$

Упругопластический момент сопротивления прямоугольного железобетонного сечения для крайнего растянутого волокна бетона будем принимать детерминированной функцией случайной кубиковой прочности бетона

$$W_{pl}(R) = W_{pl_b} + W_s(R) =$$

$$= b(h - x)\left(\frac{h}{2} + \frac{x}{6}\right) + 2\frac{E_s}{E_b(R)} A_s\left(h_0 - \frac{x}{3}\right) - 2\frac{E_s}{E_b(R)} A'_s\left(\frac{x-a'}{h-x}\right)\left(\frac{x}{3} - a'\right), \quad (4)$$

где W_{pl_b} – упругопластический момент сопротивления бетона балки;

$W_s(R)$ – приведенный момент сопротивления арматуры.

Высота сжатой зоны бетона x перед образованием нормальной трещины, входящая в (4), тоже является функцией случайной кубиковой прочности бетона через его начальный модуль упругости

$$(R) = h\left\{1 - \frac{\left[h + 2\left(1 - \frac{a'}{h}\right)\frac{E_s}{E_b(R)}A_s'\,b\right]}{2\left[bh + \frac{E_s}{E_b(R)}(A_s + A_s')\right]}\right\}.$$

Из этого выражения видно, что высота сжатой зоны бетона связана с кубиковой прочностью бетона достаточно сложной зависимостью. Оценим влияние случайного разброса кубиковой прочности бетона на разброс высоты сжатой зоны бетона. Предположим, что кубиковая прочность бетона получила отклонение от среднего значения на три среднеквадратических отклонения, то есть на 40,5%, тогда высота сжатой зоны бетона отклонится от своего среднего значения на 5%, что можно считать незначительным. Поэтому в дальнейшем будем принимать высоту сжатой зоны бетона детерминированной величиной, вычисленной при $R =< R >$.

Оценим теперь влияние разброса кубиковой прочности бетона на упругопластический момент сопротивления сечения балки. Кубиковая прочность бетона входит только в момент сопротивления арматуры, равный

$$W_s(\tilde{R}) = 2\frac{E_s}{E_b(R)}A_s\left(h_0 - \frac{x}{3}\right) - 2\frac{E_s}{E_b(R)}A_s'\left(\frac{x - a'}{h - x}\right)\left(\frac{x}{3} - a'\right).$$

Пусть кубиковая прочность бетона получила отклонение от среднего значения на три среднеквадратических отклонения, то есть на 40,5%, тогда даже при коэффициенте армирования сечения, равном 2%, что в фундаментных балках случается редко, отклонение момента сопротивления арматуры от его среднего значения составляет около 11%. Если при этом учесть, что $W_s(R)$ составляет не более 40% от $W_{pl}(R)$, то отклонение $W_{pl}(R)$ от среднего значения составит около 4%. Поэтому в дальнейшем мы пренебрежём случайным характером упругопластического момента сопротивления и будем считать его детерминированной величиной, вычисленной при $R =< R >$, что существенно упрощает расчётный аппарат.

Результаты исследования и их анализ

Полагая закон распределения M_{crc} нормальным, найдем параметры его распределения при контроле прочности бетона на растяжение

$$< M_{crc} > = W_{pl} < R_{bt} >; \qquad D_{M_{crc}} = W_{pl}^2 D_{R_{bt}}.$$

При контроле прочности бетона на сжатие с учётом выражений (3) имеем

$$< M_{crc} > = W_{pl}(a_{bt} < R > + b_{bt}); \quad D_{M_{crc}} = W_{pl}^2 a_{bt}^2 D_R.$$

Плотность распределения вероятности момента трещиностойкости будет подчиняться нормальному закону и при контроле прочности на сжатие имеет вид

$$p_{M_{crc}}(M_{crc}, R) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D_{M_{crc}}(R)}}\, exp\left[-\frac{(M_{crc} - < M_{crc}(R) >)^2}{2D_{M_{crc}}(R)}\right].$$

Условная вероятность образования нормальной трещины в железобетонной балке для конкретной реализации кубиковой прочности бетона будет равна

$$\mathbb{P}_{crc}(R) = \int_{M_{crc}(R)}^{\infty} p_M(M, R)\, dM,$$

где $M_{crc}(R)$ – момент образования трещин в железобетонной балке;

$p_M(M,R)$ – условная плотность распределения изгибающих моментов в балке на упругом стохастическом основании в характерном поперечном сечении при некоторой случайной реализации кубиковой прочности бетона R.

Полная вероятность образования нормальной трещины в характерном сечении балки, учитывая случайный характер R, будет равна

$$\mathbb{P}_{crc} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{P}_{crc}(R) p_R(R) dR = \int_{-\infty}^{\infty} p_R(R) \int_{M_{crc}(R)}^{\infty} p_M(M,R)\, dM dR =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi D_R}} exp\left[-\frac{(R-<R>)^2}{2D_R}\right]\left\{1-\Phi\left[\frac{M_{crc}(R)-<M(R)>}{D_M(R)}\right]\right\} dR,$$

где $\Phi(z)$ - интеграл вероятности Гаусса вида

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} \exp(-\frac{t^2}{2}) dt.$$

Если контролируется прочность бетона на растяжение, т.е. $M_{crc} = f(R_{bt})$, то вероятность образования нормальных трещин будет определяться по формуле

$$\mathbb{P}_{crc} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} p_{R_{bt}}(R_{bt})\ p_R(R) \int_{M_{crc}(R_{bt})}^{\infty} p_M(M,R) dM dR_{bt} dR.$$

Обобщая вышесказанное, функцию жесткости железобетонной балки как функцию изгибающих моментов, аппроксимирующую изменение жесткости после образования трещин, можно записать в следующем виде [17] (рисунок 1).

$$B(M) = B_0\Theta(M) - (B_0 - B_{crc}) \cdot \Theta(M - M_{crc}) - B_{crc} \cdot \Theta(M - M_{ult}),$$

где $\Theta(z - z_1)$ - единичная запаздывающая функция Хевисайда [18] (рисунок 1).

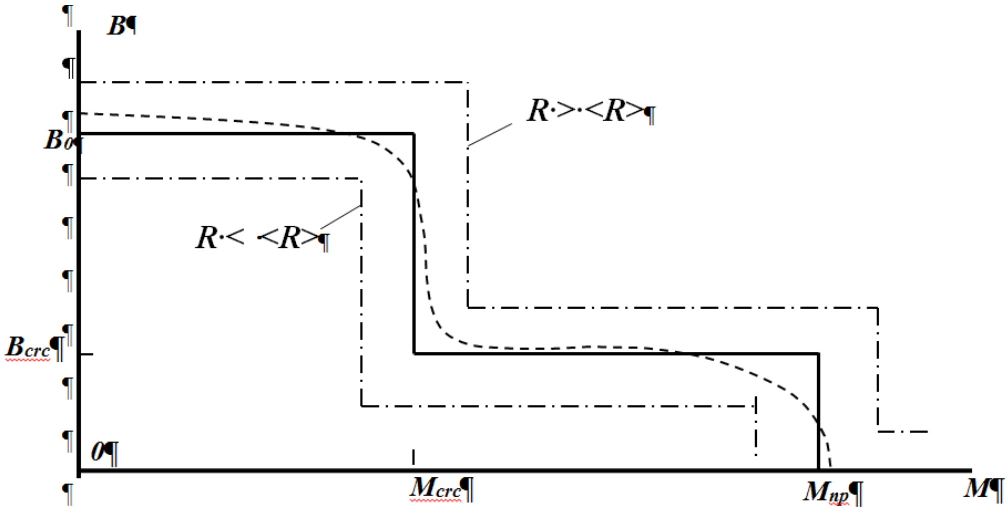

Рисунок 1 - Зависимость изгибной жесткости железобетонной балки от изгибающего момента:
- наиболее вероятный вид зависимости B(M);
- аппроксимация наиболее вероятного вида зависимости B(M);
- возможные реализации зависимости B(M).

Условная плотность распределения изгибающих моментов в железобетонной балке на упругом основании с двумя стохастически неоднородными коэффициентами постели под действием произвольной нагрузки для конкретной реализации кубиковой прочности бетона и соответствующей ей изгибной жесткости балки до образования трещин $B_0(R)$ будет иметь вид нормального распределения в каждом сечении балки

$$p_M(M,x,R) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D_M(x,R)}}\, exp\left\{-\frac{[M-<M(x,R)>]^2}{2D_M(x,R)}\right\}.$$

Математическое ожидание и дисперсия изгибающих моментов этого распределения при действии на балку N случайных распределенных нагрузок $q_i(x_i)$ и U случайных сосредоточенных сил P_j будут иметь вид [19]

$$<M(x,R)>= -\frac{1}{4\alpha\,\beta}\cdot$$

$$\cdot\left\{\sum_{i=0}^{N}\int_{a_i}^{b_i} <q_i(x_i)> e^{-\alpha(x-x_i)}[\beta\cos\beta(x-x_i)-\alpha\sin\beta(x-x_i)]dx_i + \right.$$

$$\left. + \sum_{j=0}^{U} <P_j> e^{-\alpha(x-d_j)}\left[\beta\cos\beta\left(x-d_j\right)-\alpha\sin\beta\left(x-d_j\right)\right]\right\}, x\geq 0, \qquad (5)$$

где $\alpha(R) = \left(\sqrt{\frac{<C_1>}{4B_0(R)}}+\frac{<C_2>}{4B_0(R)}\right)^{1/2};\qquad \beta(R) = \left(\sqrt{\frac{<C_1>}{4B_0(R)}}-\frac{<C_2>}{4B_0(R)}\right)^{1/2}.$

$$D_M(x,R) = 2{B_0}^2(R) <w(x,R)>^2\cdot$$

$$\cdot D_{C_1}\frac{\upsilon_1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\omega^4(\omega^2+{\upsilon_1}^2+{\varphi_1}^2)d\omega}{[\omega^2-({\upsilon_1}^2+{\varphi_1}^2)]^2\cdot|B_0\,(R)\omega^4+<C_2>\omega^2+<C_1>|^2} +$$

$$+2<M(x,R)>^2 D_{C_2}\frac{\upsilon_2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\omega^4(\omega^2+{\upsilon_2}^2+{\varphi_2}^2)d\omega}{[\omega^2-({\upsilon_2}^2+{\varphi_2}^2)]^2\cdot|B_0\,(R)\omega^4+<C_2>\omega^2+<C_1>|^2} +$$

$$+4{B_0}^2(R)D_q\frac{\upsilon_q}{\pi}\int_0^\infty \frac{\omega^4 d\omega}{\left(\omega^2+\upsilon_q^2\right)\cdot|B_0\,(R)\omega^4+<C_2>\omega^2+<C_1>|^2} +$$

$$+4{B_0}^2(R)D_P\frac{\upsilon_P}{\pi}\int_0^\infty \frac{\omega^4 d\omega}{(\omega^2+\upsilon_P^2)\cdot|B_0\,(R)\omega^4+<C_2>\omega^2+<C_1>|^2},$$

здесь $<C_2>, <C_1>, D_{C_1}, D_{C_2}, <q_i(x_i)>, <P_j>, D_q,\ D_P,$ - математические ожидания и дисперсии коэффициентов постели и распределенных и сосредоточенных нагрузок, соответственно;

$\upsilon_1, \varphi_1, \upsilon_2, \varphi_2, \upsilon_q, \upsilon_P,$ – параметры корреляционных функций коэффициентов постели и нагрузки, соответственно;

ω – волновое число;

$<w(x,R)>$ - математическое ожидание прогибов бесконечно длинной балки на упругом основании с двумя параметрами податливости, имеющее вид

$$<w(x,R)>= -\frac{1}{4B_0(R)\,\alpha\beta(\alpha^2+\beta^2)}\cdot$$

$$\cdot\left\{\sum_{i=0}^{N}\int_{a_i}^{b_i} <q_i(x_i)> e^{-\alpha(x-x_i)}\,[\beta\cos\beta(x-x_i)+\alpha sin\beta(x-x_i)]dx_i + \right.$$

$$\left. + \sum_{j=0}^{U} <P_j> e^{-\alpha(x-d_j)}\,[\beta\cos\beta\left(x-d_j\right)+\alpha sin\beta\left(x-d_j\right)]\right\},\ \ x\geq 0.$$

В работе [10] было показано, что случайная жесткость железобетонной балки $B_{crc}(R)$ в зонах с трещинами является функцией случайной кубиковой прочности бетон и имеет параметры нормального распределения, равные

$$< B_{crc} > = \int_{-\infty}^{\infty} p_R\,(R)\,B_{crc}\,(R)dR;\quad D_{B_{crc}} = \int_{-\infty}^{\infty} B_{crc}^2(R)\,p_R\,(R)dR - < B_{crc} >^2.$$

Жёсткость балки после образования трещин становится переменной: в зонах длиной l, где трещин нет, жёсткость равна $B_0(R)$, а в зонах длиной l_{crc}, где трещины есть, жёсткость равна $B_{crc}(R)$, т.е. жесткость балки становится функцией координаты x (рисунок 2).

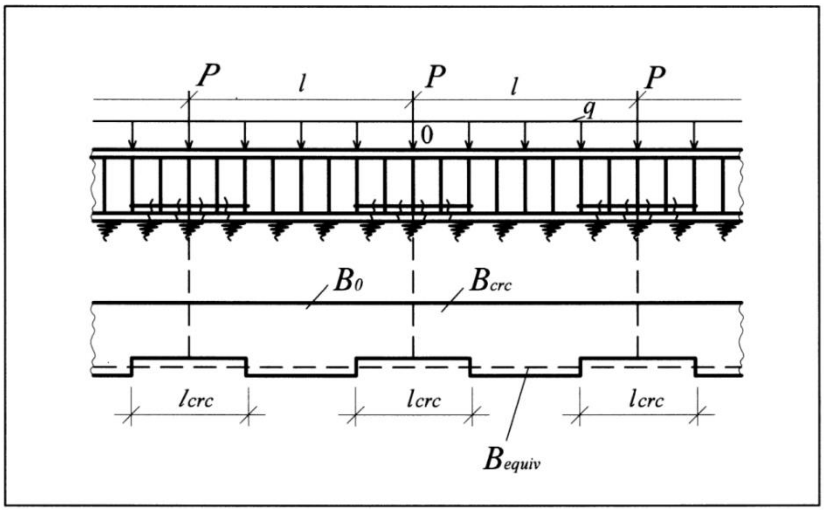

Рисунок 2 - Жесткость балки после образования трещин

Таким образом, после образования трещин уравнение изгиба балки на упругом основании модели В.З. Власова-П.Л. Пастернака приобретает вид

$$B(x)\frac{d^4w(x)}{dx^4} + 2\frac{dB(x)}{dx}\frac{d^3w(x)}{dx^3} + \frac{d^2B(x)}{dx^2}\frac{d^2w(x)}{dx^2} - C_2(x)\frac{d^2w(x)}{dx^2} + C_1(x)w(x) = q(x)$$

или более компактно

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[B(x)\frac{d^2w(x)}{dx^2}\right] - C_2(x)\frac{d^2w(x)}{dx^2} + C_1(x)w(x) = q(x). \qquad (6)$$

Интегрирование линейного неоднородного дифференциального уравнения четвертого порядка вида (6) в конечном виде или в квадратурах для нашего случая кусочно-постоянной функции жёсткости невозможно. Можно применить численное интегрирование этого уравнения, в том числе каким-либо конечно-разностным методом, например методом Дж.Адамса-К.Стёрмера [20], но это не всегда удобно для практических расчётов. Поэтому целесообразно перейти от балки на упругом основании с кусочно-постоянной жесткостью к балке с постоянной эквивалентной жесткостью, что позволяет получить решение уравнения (6) в замкнутом виде. Для определения эквивалентной жесткости необходимо знать длину зон с трещинами.

Длина участка с трещинами в балке находится из уравнений

$$M(x,R) = M_{crc}(R)\ \text{или}\ M(x,R) = M_{crc}(R_{bt})\ . \qquad (7)$$

Так как решение данного трансцендентного уравнения возможно только численно, то для решения в конечном виде будем аппроксимировать функцию изгибающих моментов вида (5) при действии регулярной системы сосредоточенных сил квадратной параболой вида:

$$M_{app}(x) = k_1 + k_2x + k_3x^2,$$

где коэффициенты $k_1, k_2,\ k_3$ находятся исходя из следующих условий:

$$M_{app}(0) = < M(0,R) >; \quad M_{app}\left(\frac{l}{2}\right) = < M\left(\frac{l}{2},R\right) >; \quad \frac{dM_{app}\left(\frac{l}{2}\right)}{dx} = 0.$$

Тогда коэффициенты аппроксимирующей параболы будут равны

$$k_1 = < M(0,R) >;$$

$$k_2 = \frac{4}{l}\left[< M\left(\frac{l}{2},R\right) > - < M(0,R) >\right]; \qquad k_3 = -\frac{4}{l^2}\left[< M\left(\frac{l}{2},R\right) > - < M(0,R) >\right].$$

Решая уравнения (7), подставив в него аппроксимирующую функция изгибающих моментов, находим длину зоны с трещинами при контроле кубиковой прочности бетона

$$l_{crc}(R) = l\left\{1 - \left(1 - \frac{[M_{crc}(R) - < M(0,R) >]}{\left[< M\left(\frac{l}{2},R\right) > - < M(0,R) >\right]}\right)^{1/2}\right\}. \tag{8}$$

Выражение (8) справедливо для любой реализации кубиковой прочности бетона R, а с учётом её случайной природы, характеристики распределения длины зоны с трещинами будут иметь вид

$$< l_{crc} > = \int_{-\infty}^{\infty} l_{crc}(R)\, p_R\,(R)\, dR; \qquad D_{l_{crc}} = \int_{-\infty}^{\infty} l_{crc}^2(R)\, p_R\,(R)\, dR - < l_{crc} >^2.$$

Если контролируется прочность бетона на растяжение, то учитывая, что в этом случае $M_{crc} = f(R_{bt})$, для параметров распределения длины зоны с трещинами будем иметь

$$< l_{crc} > = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} l_{crc}(R, R_{bt})\, p_R\,(R) p_{R_{bt}}(R_{bt}) dR dR_{bt};$$

$$D_{l_{crc}} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} l_{crc}^2(R, R_{bt})\, p_R\,(R) p_{R_{bt}}(R_{bt}) dR dR_{bt} - < l_{crc} >^2.$$

Плотность распределения длины зоны с трещинами с достаточной для практических целей точностью можно считать подчиняющейся нормальному закону

$$p_{l_{crc}}(l_{crc}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D_{l_{crc}}}}\, exp\left[-\frac{(l_{crc} - < l_{crc} >)^2}{2D_{l_{crc}}}\right].$$

Вывод

Получены статистические характеристики распределений случайных параметров железобетонных балок на упругом основании, в том числе жесткости балки до и после образования нормальных трещин, момента трещиностойкости, длины зоны с трещинами, а также вероятность образования нормальных трещин, что позволяет производить расчет конструкций на упругом основании в вероятностной постановке.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Колчунов В.И., Дегтярь А.Н., Осовских Е.В. К оптимизации надежности внезапно поврежденных конструктивно нелинейных железобетонных конструкций // Доклады пятого всероссийского семинара «Проблемы оптимального проектирования сооружений». Новосибирск: 2005. С. 181-189.
2. Горбунов И.А., Капустин Д.Е. Расчетное сопротивление бетона и сталефибробетона в вероятностной трактовке // Вестник БГТУ им. В.Г. Шухова. 2019. № 1. С. 58–64.
3. Благонадёжин В.Л., Кудрявцев Е.П. Статистическое исследование деформаций песчаных оснований и трубопроводов подземных волноводных линий связи // Доклады научно-технической конференции по итогам научно-исследовательских работ за 1964-1965 г. Секция динамики и прочности машин. М., МЭИ, 1965. С.78-86.
4. Болотин В.В. Об упругих деформациях подземных трубопроводов, прокладываемых в статистически неоднородном грунте // Строительная механика и расчет сооружений. 1965. № 1. С. 4-8.
5. Гасратова Н.А., Неверова Е.Г. Расчет надежности железобетонных элементов конструкций // Молодой ученый. 2016. № 9 (113). С. 1-10.

6. Раскатов С.Н. Расчёт балочных и плитных свайных ростверков на упругом стохастическом основании: дис. ... канд. техн. наук. М.: МИСИ, 1976. 135 с.

7. Тамразян А.Г., Орлова М.А. Экспериментальные исследования напряженно-деформированного состояния железобетонных изгибаемых элементов с трещинами // Вестник Томского государственного архитектурно-строительного университета. 2015. № 6 (53). С. 98-105.

8. Тамразян А.Г., Дудина И.В. Влияние изменчивости контролируемых параметров на надежность преднапряженных балок на стадии изготовления // Жилищное строительство. 2001. № 1. С. 16-17.

9. Колчунов В.И., Колчунов В.И., Федорова Н.В. Деформационные модели железобетона при особых воздействиях [Deformation models of reinforced concrete under special effects] // Промышленное и гражданское строительство. 2018. № 8. С. 54-60.

10. Деминов П.Д. К оценке статистических параметров железобетонной балки на упругом основании, имеющем стохастические характеристики // Строительство и реконструкция. 2018. № 5 (79). С. 5-12.

11. Деминов П.Д. Оценка вероятностных характеристик плотности вероятности предельной поперечной силы в изгибаемых железобетонных элементах // Строительство и реконструкция. 2019. №5 (85). С. 11-16.

12. Деминов П.Д. Оценка вероятности разрушения железобетонной балки, лежащей на стохастическом упругом основании с двумя коэффициентами постели по наклонному сечению от поперечной силы // Строительство и реконструкция. 2021 № 1 (93). С. 16-25.

13. Деминов П.Д. Оценка вероятности образования чрезмерных прогибов после образования трещин в железобетонной балке на стохастическом основании // Строительство и реконструкция. 2022 № 1 (99). С. 1-7.

14. Сморчков А.А., Кереб С.А., Орлов Д.А., Барановская К.О. Влияние коэффициента вариации на надёжность строительных конструкций // Известия Юго-Западного государственного университета. 2013. № 5 (50). С. 164-167.

15. Рекомендации по оценке и обеспечению надежности транспортных сооружений. ЦНИИС Минтрансстроя СССР, М., 1989. С. 8.

16. Кобзарь А.И. Прикладная математическая статистика. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. 816 с.

17. Deminov P.D., Danilkiv F.J. Evaluation of the reliability of reinforced concrete beams on a stochastically inhomogeneous elastic foundation under the action of a non-stationary random load / XXII International Scientific Conference Civil Engineering, Tashkent, april 18-21, 2019. E3S Web Conf, Volum 97, 04052 (2019). URL:https://doi.org/10.1051/e3sconf/20199704052 (дата обращения 15.10.2019).

18. Kanwal R.P. Generalized functions: Theory and Technique // Mathematics in Science and Engineering, 1983. Vol. 171. Pp. 1-4.

19. Киселев В.А. Расчет балок на упругом основании. М., Издательство МАДИ, 1981. С. 39-40.

20. Вержбицкий В.М. Численные методы. Математический анализ и обыкновенные дифференциальные уравнения. Высшая школа. М., 2001. С. 255-259.

21. СП 63.13330.2018 Бетонные и железобетонные конструкции. Основные положения. М., 2019.

REFERENCES

1. Kolchunov V.I., Degtyar' A.H., Osovskih E.B. K optimizacii nadezhnosti vnezapno povrezhdennyh konstruktivno nelinejnyh zhelezobetonnyh konstrukcij [To optimization of reliability of suddenly damaged structurally non-linear reinforced concrete structures] // Doklady pyatogo vserossijskogo seminara «Problemy optimal'nogo proektirovaniya sooruzhenij». Novosibirsk: 2005. Pp. 181-189. (in rus)

2. Gorbunov I.A., Kapustin D.E. Raschetnoe soprotivlenie betona i stalefibrobetona v veroyat-nostnoj traktovke [Calculated resistance of concrete and steel fiber concrete in a probabilistic interpretation] // Vestnik BGTU im. V.G. Shuhova. Belgorod: 2019. No. 1. Pp. 58–64. (in rus)

3. Blagonadyozhin V.L., Kudryavcev E.P. Statisticheskoe issledovanie deformacij peschanyh osno-vanij i truboprovodov podzemnyh volnovodnyh linij svyazi [Statistical study of deformations of sandy foundations and pipelines of underground waveguide communication lines] // Doklady nauchno-tekhnicheskoj konferencii po itogam nauchno-issledovatel'skih rabot za 1964-1965 g. Sekciya dinamiki i prochnosti mashin. Moscow., MEI, 1965. Pp.78-86. (in rus)

4. Bolotin V.V. Ob uprugih deformaciyah podzemnyh truboprovodov, prokladyvaemyh v statisti-cheski neodnorodnom grunte [On elastic deformations of underground pipelines laid in statistically heterogeneous soil] // Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzhenij. 1965. No. 1. Pp. 4-8. (in rus)

5. Gasratova N.A., Neverova E.G. Raschet nadezhnosti zhelezobetonnyh elementov konstrukcij [Calculation of the reliability of reinforced concrete structural elements] // Molodoj uchenyj. 2016. No. 9 (113). Pp. 1-10. (in rus)

6. Raskatov S.N. Raschyot balochnyh i plitnyh svajnyh rostverkov na uprugom stohasticheskom osnovanii [Calculation of beam and slab pile grillages on an elastic stochastic foundation] : dis. ... kand. tekhn. nauk. Moscow: MISI, 1976. 135 p.

7. Tamrazyan A.G., Orlova M.A. Eksperimental'nye issledovaniya napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya zhelezobetonnyh izgibaemyh elementov s treshchinami [Experimental studies of the stress-strain state of

reinforced concrete bending elements with cracks] // Vestnik Tomskogo gosudar-stvennogo arhitekturno-stroitel'nogo universiteta. 2015. No. 6 (53). Pp. 98-105. (in rus)

8. Tamrazyan A.G., Dudina I.V. Vliyanie izmenchivosti kontroliruemyh parametrov na nadezhnost' prednapryazhennyh balok na stadii izgotovleniya [Influence of Variability of Controlled Parameters on the Reliability of Prestressed Beams at the Manufacturing Stage] // Zhilishchnoe stroitel'stvo. 2001. No. 1. Pp. 16-17. (in rus)

9. Kolchunov V.I., Kolchunov V.I., Fedorova N.V. Deformacionnye modeli zhelezobetona pri oso-byh vozdejstviyah [Deformation models of reinforced concrete under special effects] // Promyshlennoe i grazhdanskoe stroitel'stvo. 2018. No. 8. Pp. 54-60. (in rus)

10. Deminov P.D. K ocenke statisticheskih parametrov zhelezobetonnoj balki na uprugom osnova-nii, imeyushchem stohasticheskie harakteristiki [On the evaluation of the statistical parameters of a reinforced concrete beam on an elastic foundation with stochastic characteristics] // Stroitel'stvo i rekonstrukciya. 2018. No. 5 (79). Pp. 5-12. (in rus)

11. Deminov P.D. Ocenka veroyatnostnyh harakteristik plotnosti veroyatnosti predel'noj pope-rechnoj sily v izgibaemyh zhelezobetonnyh elementah [Estimation of probabilistic characteristics of the probability density of the limiting transverse force in bending reinforced concrete elements] // Stroitel'stvo i rekonstruktsiya. 2019. No. 5 (85). Pp. 11-16. (in rus)

12. Deminov P.D. Ocenka veroyatnosti razrusheniya zhelezobetonnoj balki, lezhashchej na stohastiche-skom uprugom osnovanii s dvumya koefficientami posteli, s po naklonnomu secheniyu ot pope-rechnoj sily [Estimation of the probability of destruction of a reinforced concrete beam lying on a stochastic elastic foundation with two bed coefficients, along an oblique section from a shear force] // Stroitel'stvo i rekonstruktsiya. 2021. No. 1 (93). Pp. 16-25. (in rus)

13. Deminov P.D. Ocenka veroyatnosti obrazovaniya chrezmernyh progibov posle obrazovaniya tre-shchin v zhelezobetonnoj balke na stohasticheskom osnovanii [Estimation of the probability of excessive deflection formation after the formation of cracks in a reinforced concrete beam on a stochastic foundation] // Stroitel'stvo i rekonstruktsiya. 2022. No. 1 (99). Pp. 1-7. (in rus)

14. Smorchkov A.A., Kereb S.A., Orlov D.A., Baranovskaya K.O. Vliyanie koefficienta variacii na nadyozhnost' stroitel'nyh konstrukcij [Influence of the coefficient of variation on the reliability of building structures] // Izvestiya Yugo-Zapadnogo gosudarstvennogo universi-teta. 2013. No. 5 (50). Pp. 164–167. (in rus)

15. Rekomendacii po ocenke i obespecheniyu nadezhnosti transportnyh sooruzhenij [Recommendations for assessing and ensuring the reliability of transport facilities]. CNIIS Min-transstroya SSSR, M., 1989. S. 8.

16. Kobzar' A.I. Prikladnaya matematicheskaya statistika [Applied mathematical statistics]. Moscow: FIZMATLIT, 2006. 816 p.

17. Deminov P.D., Danilkiv F.J. Evaluation of the reliability of reinforced concrete beams on a stochastically inhomogeneous elastic foundation under the action of a non-stationary random load / XXII International Scientific Conference Civil Engineering, Tashkent, april 18-21, 2019. E3S Web Conf, Volum 97, 04052 (2019). URL:https://doi.org/10.1051/e3sconf/20199704052 (дата обращения 15.10.2019).

18. Kanwal R.P. Generalized functions: Theory and Technique // Mathematics in Science and Engineering. 1983. Vol. 171. Pp. 1-4.

19. Kiselev V.A. Raschet balok na uprugom osnovanii [Calculation of beams on an elastic foundation]. Moscow: Izdatel'stvo MADI, 1981. Pp. 39-40. (in rus)

20. Verzhbickij V.M. Chislennye metody. Matematicheskij analiz i obyknovennye differenci-al'nye uravneniya [Numerical methods. Mathematical analysis and ordinary differential equations]. Moscow: Vysshaya shkola, 2001. Pp. 255-259. (in rus)

21. SP 63.13330.2018 Betonnye i zhelezobetonnye konstrukcii. Osnovnye polozheniya [Concrete and reinforced concrete structures. Key points]. Moscow, 2019. (in rus)

Информация об авторе:

Дёминов Павел Дмитриевич
Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, г. Москва, Россия,
кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры железобетонных и каменных конструкций.
E-mail: p-deminov@mail.ru

Information about author:

Deminov Pavel D.
National Research Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russia,
candidate of technical sciences, associate professor of the department of Reinforced Concrete and Stone Structures.
E-mail: p-deminov@mail.ru