

А.А. ТРЕЩЕВ<sup>1</sup>, Ю.А. ЗАВЬЯЛОВА<sup>1</sup><sup>1</sup>Тульский государственный университет, г. Тула, Россия

## ДЕФОРМИРОВАНИЕ КОЛЬЦЕВЫХ ОРТОТРОПНЫХ ПЛАСТИН СРЕДНЕЙ ТОЛЩИНЫ ИЗ МАТЕРИАЛОВ, ЧУВСТВИТЕЛЬНЫХ К ВИДУ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ

**Аннотация.** Рассматривается модель трехслойной кольцевой пластины средней толщины. Предполагается, что нагрузка на пластину принята равномерно – распределенной. В качестве определяющих соотношений берутся универсальные, построенные в нормированном тензорном пространстве напряжений, связанном с главными осями анизотропии материала. Нагрузка была принята таким образом, чтобы прогибы срединной поверхности пластины считались малыми по сравнению с ее толщиной. Закрепление пластины жесткое по внешнему и внутреннему контурам.

Поскольку некоторые ортотропные разнсопротивляющиеся материалы проявляют нелинейную зависимость деформаций от напряжений, материальные характеристики приняты в виде функций от интенсивности напряжений. В результате постановки краевой задачи была разработана математическая модель для анализируемого класса задач, реализованная в виде численного алгоритма интегрированного в пакет прикладных программ среды Mathcad.

Для решения системы разрешающих дифференциальных уравнений изгиба кольцевых ортотропных пластин использовался метод переменных параметров упругости с конечно-разностной аппроксимацией второго порядка точности.

**Ключевые слова:** пластина, ортотропные материалы, напряженно - деформированное состояние, разнсопротивляемость.

А.А. TRESHCHEV<sup>1</sup>, YU.A. ZAVYALOVA<sup>1</sup><sup>1</sup>Tula State University, Tula, Russia

## DEFORMATION OF ANNULAR ORTHOTROPIC PLATES OF MEDIUM THICKNESS MADE OF MATERIALS SENSITIVE TO THE TYPE OF STRESS STATE

**Abstract.** Discusses a model of a three-layer annular plate of medium thickness. It is assumed that the load on the plate is assumed to be uniformly distributed. The universal relations constructed in the normalized tensor stress space associated with the main axes of the anisotropy of the material are taken as the determining relations. The load was taken in such a way that the deflections of the middle surface of the plate were considered small in comparison with its thickness. The fixing of the plate is rigid along the external and internal contours.

Since some orthotropic materials with different resistance exhibit a nonlinear dependence of deformations on stresses, the material characteristics are taken as functions of stress intensity. As a result of the formulation of the boundary value problem, a mathematical model was developed for the analyzed class of problems, implemented as a numerical algorithm integrated into the Mathcad software package.

To solve the system of resolving differential equations of bending of annular orthotropic plates, the method of variable elasticity parameters with a finite-difference approximation of the second order of accuracy was used.

**Keywords:** plate, orthotropic materials, stress-strain state, different resistance.

## Введение

Современные сооружения, здания и уникальные элементы конструкций проектируемые, возводимые и изготавливаемые по технологиям зачастую серьезно отличающимся от традиционных. Новые технологии привели к тому, что в современной технике и строительстве стали широко использоваться более совершенные конструкционные материалы, обладающие повышенной жесткостными и прочностными характеристиками, а также имеющие меньшую удельную массу. Кроме того, подобные материалы могут обладать особыми физико-механическими свойствами, противоречащими общепринятым представлениям [1 – 20]. При этом среди наиболее используемых материалов можно выделить хаотически армированные наноструктурными «трубками» или фибрами композитные материалы, волокнистые структуры типа пластиков (углепластики, стеклопластики, боропластики и др.), плёночные элементы.

Среди особых свойств как новых, так и многих традиционных материалов, каковым является железобетон [21 – 24], следует выделить зависимость их механических характеристик от вида напряженного состояния при одновременной структурной анизотропии [1 – 11, 13, 18, 20, 25, 26]. Такие материалы принято классифицировать как обладающие анизотропией двух видов – структурной и деформационной [21, 25 – 31]. Интерес к изучению свойств подобных материалов возник у материаловедов и механиков лет 55 назад [1 – 11, 13, 18, 20, 25, 26] и за этот период были сформулированы отдельные модели определяющих соотношений, обладающие различной степенью точности. Не смотря на многообразие этих моделей и выдвинутых базовых гипотез, построенные уравнения состояния, как продемонстрировано в работе [21], в большинстве своем обильно страдают серьезными недостатками, а во многом ошибочны. Следует отметить, что наиболее универсальными и свободными от модельных ограничений являются энергетически непротиворечивые модели уравнений состояния, предложенные и проанализированные в работах [21, 27 – 31] и представленные в нормированном тензорном пространстве напряжений, связанном с главными осями анизотропии.

Для простейших балочно-стержневых конструкций наличие у материалов анизотропии двух видов (структурной и деформационной) практически не вносят серьезных изменений в методики деформационно-прочностного расчета, тем более, что структурная анизотропия, которой обладают указанные материалы в подавляющем большинстве относится к классу ортотропии. Однако в большинстве случаев структурно ортотропные разносопротивляющиеся материалы эффективны и стали применяться в пространственных конструкциях, каковыми являются поперечно нагруженные пластины и оболочки, в которых реализуются сложные напряженные состояния. Изгибаемые пластины и оболочки обычно классифицируют как тонкие, конструкции средней толщины и толстостенные. Для каждого класса пластин и оболочек установлены условные границы соотношений их характерных геометрических параметров [32]. К сожалению, при определении класса пластин или оболочек, подобными границами можно пользоваться с определенной степенью надежности только для конструкций из изотропных материалов, не отягощенных усложненными свойствами механического характера. Совершенно по-иному складывается картина для пространственных конструкций, материалы которых имеют анизотропию разного характера. Для подобных пластин и оболочек априори нельзя установить границы соотношений геометрических параметров и сразу же их отнести к тонким или средней толщины [33 – 36]. Известно, что для тонких пластин подходит модель Кирхгоф – Лява [32], а для пластин средней толщины могут использоваться несколько вариантов упрощающих гипотез [35 – 37]. При этом наиболее часто используемый из них является вариант теории Тимошенко, основная геометрическая гипотеза которой заключается в учете поперечных сдвигов путем их интерпретации углами поворота плоских сечений вокруг соответствующих осей  $x_k$  на углы  $\psi_k$ , при сохранении прямолинейности этих сечений. Однако при деформировании

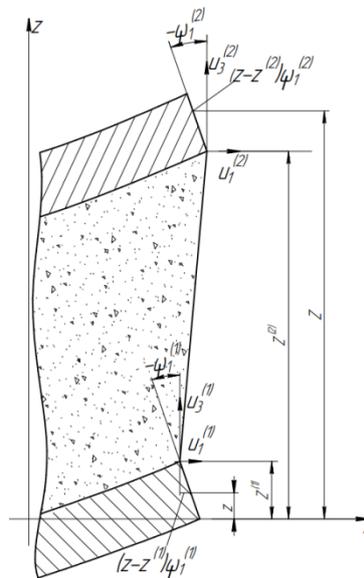
пластин средней толщины прямолинейность поперечных сечений не сохраняется, а считается гипотетическим приближением. Особо это проявляется при поперечном изгибе слоистых конструкций, в частности трехслойных пластин и оболочек [38]. Поэтому модель поперечного изгиба трехслойной кольцевой структурно цилиндрически ортотропной пластины средней толщины, выполненной из материалов, обладающих зависимостью механических характеристик от вида напряженного состояния, сформулируем в рамках модифицированных гипотез ломаной линии [38].

**Модели и методы**

В настоящее время известно достаточно большое число работ, в которых предлагаются разные методы построения определяющих соотношений анизотропных разнородных сред. Эти методы вытекают из тех или иных гипотез и зачастую не связаны друг с другом, но все их можно объединить в две группы.

В тех случаях, когда можно пренебречь поперечным сжатием заполнителя, но необходимо учесть податливость заполнителя на поперечный сдвиг, расчет трехслойных пластин осуществляется с использованием гипотезы ломаной линии [38].

Рассмотрим упругое равновесие трехслойной кольцевой пластины толщиной  $h$  и радиусом  $R$ , составленной из двух различных ортотропных разнородных материалов, под действием поперечной равномерно распределенной нагрузки  $q$  (см. рисунок 1). Внешние слои пластины одинаковы по своим свойствам.



**Рисунок 1 – Трехслойная пластина**

Рассматривается пластина из материалов, которые обладают цилиндрической ортотропией. По причине осевой симметрии задачи, для ее решения удобно воспользоваться цилиндрической системой координат  $r, \theta, z$ , в это время функции, которые характеризуют напряженно – деформированное состояние пластины, будут зависеть только от радиальной координаты  $r$  (см. рисунок 2).

Для среднего слоя принимаем гипотезы Тимошенко:

- 1) нормальные к срединной плоскости перемещения  $w$  не зависят от координаты  $z$  ( $e_z = 0$ );
- 2) нормаль к срединной плоскости после деформации поворачивается на угол  $\psi_r$  относительно оси  $r$  и  $\psi_\theta$  относительно оси  $\theta$ .

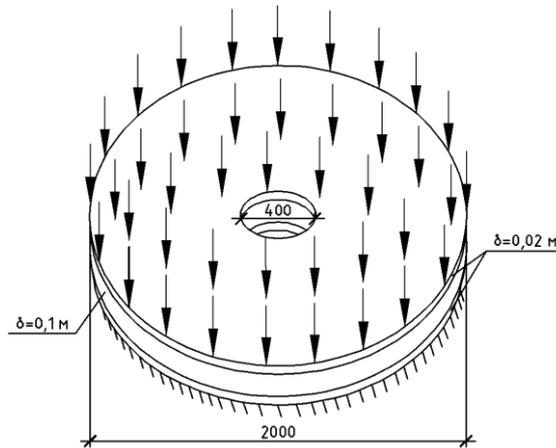


Рисунок 2 – Исследуемая пластина

Для описания деформирования внешних слоев используем гипотезу Кирхгофа – Лява. Согласно этим гипотезам распределение перемещений в пределах обшивки записываются следующим образом:

$$u_1^{(i)} = u_r^{(i)} + \beta^{(i)} \psi_{\theta}^{(i)}; \quad u_3^{(i)} = u_z^{(i)} = w_z; \quad (1)$$

где  $i$  – номер слоя ( $i=1, 2, 3$ );  $\beta^{(i)} = z - z^{(i)}$ ;  $z$  – текущая координата,  $z^{(i)}$  – координата поверхности раздела слоев;  $u_1^{(i)}, u_3^{(i)}$  – перемещения поверхностей обшивок, примыкающих к заполнителю и самому заполнителю; углы поворота нормалей к поверхностям обшивок  $\psi_1^{(i)}, \psi_2^{(i)}$ .

В соответствии с представленными перемещениями (1) деформации определяются следующим образом:

$$e_r^{(i)} = u_{,r}^{(i)} + \beta \cdot \psi_{\theta,r}^{(i)}; \quad \gamma_{rz}^{(i)} = w_{,r}^{(i)} + \psi_{\theta}^{(i)};$$

Общая гипотеза для всего пакета слоев принята в следующей трактовке: при определении параметров напряженного состояния влиянием нормальных напряжений  $\sigma_z$  пренебрегаем ввиду их малости.

#### Результаты исследования и их анализ

Матричная форма зависимости тензоров деформаций и напряжений имеет традиционный вид:

$$\{e\} = [C] \cdot \{\sigma\}, \quad (2)$$

где

$$\{e\} = \begin{Bmatrix} e_r \\ e_{\theta} \\ \gamma_{rz} \end{Bmatrix}; \quad [C] = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & 0 \\ C_{1122} & C_{2222} & 0 \\ 0 & 0 & C_{1313} \end{bmatrix}; \quad \{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_{\theta} \\ \tau_{rz} \end{Bmatrix}.$$

При этом элементы матрицы податливостей определяются с учетом их зависимости от вида реализуемого напряженного состояния, определяемого нормированными напряжениями, как представлено в работах [27, 29]:

$$C_{1111} = \{(F_{1111} + H_{1111} \alpha_r) + 0,5H_{1111} \alpha_r [\alpha_{\theta}^2 + 2\alpha_{rz}^2] - 0,5H_{2222} \alpha_{\theta}^3 + (1 - \alpha_r)[H_{1122} \alpha_{\theta} (\alpha_{\theta}^2 + 2\alpha_{rz}^2)]\};$$

$$C_{1122} = [F_{1122} + H_{1122} (\alpha_r + \alpha_{\theta})]; \quad (3)$$

$$C_{2222} = \{(F_{2222} + H_{2222} \alpha_{22}) + 0,5H_{2222} \alpha_{22} [\alpha_r^2 + 2\alpha_{rz}^2] - 0,5H_{1111} \alpha_r^3 + (1 - \alpha_{22})[H_{1122} \alpha_{11} (\alpha_{11}^2 + 2\alpha_{rz}^2)]\}$$

$$C_{1313} = [P_{1313} - (H_{1111} \alpha_r^3 + H_{2222} \alpha_{\theta}^3) - 2H_{1122} \alpha_r \alpha_{\theta} (\alpha_r + \alpha_{\theta})],$$

где

$$F_{kkkk} = \left( \frac{1}{E_k^+} + \frac{1}{E_k^-} \right) / 2; \quad H_{kkkk} = \left( \frac{1}{E_k^+} - \frac{1}{E_k^-} \right) / 2;$$

$$F_{ijij} = - \left( \frac{v_{ij}^+}{E_j^+} + \frac{v_{ij}^-}{E_j^-} \right) / 2; \quad H_{ijij} = - \left( \frac{v_{ij}^+}{E_j^+} - \frac{v_{ij}^-}{E_j^-} \right) / 2;$$

$$P_{ijij} = \frac{1}{G_{ij}}; \quad \frac{v_{ij}^+}{F_j^+} = \frac{v_{ji}^+}{E_i^+}; \quad \frac{v_{ij}^-}{E_j^-} = \frac{v_{ji}^-}{E_i^-}; \quad i, j, k = 1, 2, 3.$$

Обращая уравнения (2) относительно напряжений и рассматривая последние совместно с геометрическими соотношениями, вытекающими из принятых гипотез, для каждого слоя получим:

$$\sigma_r^{(1)} = D_{11}^{(1)}(u_{,r} + \beta_1 \cdot w_{,r}) + D_{12}^{(1)} \cdot \frac{u + \beta_1 \cdot w_{,r}}{r};$$

$$\sigma_\theta^{(1)} = D_{12}^{(1)}(u_{,r} + \beta_1 \cdot w_{,r}) + D_{22}^{(1)} \cdot \frac{u + \beta_1 \cdot w_{,r}}{r}; \quad \tau_{rz}^{(1)} = D_{44}^{(1)} w_{,r};$$

$$\sigma_r^{(2)} = D_{11}^{(2)}(u_{,r} + \beta_2 \cdot w_{,r}) + D_{12}^{(2)} \cdot \frac{u + \beta_2 \cdot w_{,r}}{r};$$

$$\sigma_\theta^{(2)} = D_{12}^{(2)}(u_{,r} + \beta_2 \cdot w_{,r}) + D_{22}^{(2)} \cdot \frac{u + \beta_2 \cdot w_{,r}}{r}; \quad \tau_{rz}^{(2)} = D_{44}^{(2)} w_{,r};$$

$$\sigma_r^{(3)} = D_{11}^{(3)}(u_{,r} + \beta_3 \cdot \psi_{\theta,r}) + D_{12}^{(3)} \cdot \frac{u + \beta_3 \cdot \psi_\theta}{r};$$

$$\sigma_\theta^{(3)} = D_{12}^{(3)}(u_{,r} + \beta_3 \cdot \psi_{\theta,r}) + D_{22}^{(3)} \cdot \frac{u + \beta_3 \cdot \psi_\theta}{r}; \quad \tau_{rz}^{(3)} = D_{44}^{(3)}(w_{,r} + \psi_\theta),$$

где  $D_{ij}^{(s)}$  – компоненты матрицы жесткостей для каждого слоя, зависящие от физико-механических свойств материала (4):

$$D_{11}^{(s)} = \frac{C_{2222}^{(s)}}{C_{1111}^{(s)} C_{2222}^{(s)} - (C_{1122}^{(s)})^2}; \quad D_{22}^{(s)} = \frac{C_{1111}^{(s)}}{C_{1111}^{(s)} C_{2222}^{(s)} - (C_{1122}^{(s)})^2};$$

$$D_{12}^{(s)} = - \frac{C_{1122}^{(s)}}{C_{1111}^{(s)} C_{2222}^{(s)} - (C_{1122}^{(s)})^2}; \quad D_{44}^{(s)} = \frac{1}{C_{1313}^{(s)}}. \quad (4)$$

Приняв за основу новые физические соотношения, мы не вносим изменений в уравнения статико-геометрической природы. Таким образом, остаются справедливыми главные положения и зависимости классической строительной механики. Поэтому уравнения равновесия пластины запишем в виде:

$$N_{,rr} + \frac{N_r - N_\theta}{r} = 0; \quad Q_{,rr} + \frac{Q_r}{r} = -q; \quad M_{,rr} + \frac{M_r - M_\theta}{r} - Q_r = 0. \quad (5)$$

Поскольку переход от напряжений к их интегральным характеристикам, усилиям и моментам, не зависит от физической природы материала, они определяются традиционным образом:

$$N_r = \int_{-\frac{h}{2}}^{-\frac{h}{2}+\delta_1} \sigma_r^{(1)} dz + \int_{\frac{h}{2}-\delta_2}^{\frac{h}{2}} \sigma_r^{(2)} dz + \int_{-\frac{h}{2}+\delta_1}^{\frac{h}{2}-\delta_2} \sigma_r^{(3)} dz; \quad N_\theta = \int_{-\frac{h}{2}}^{-\frac{h}{2}+\delta_1} \sigma_\theta^{(1)} dz + \int_{\frac{h}{2}-\delta_2}^{\frac{h}{2}} \sigma_\theta^{(2)} dz + \int_{-\frac{h}{2}+\delta_1}^{\frac{h}{2}-\delta_2} \sigma_\theta^{(3)} dz;$$

$$Q_r = \int_{-\frac{h}{2}}^{-\frac{h}{2}+\delta_1} \tau_{rz}^{(1)} dz + \int_{\frac{h}{2}-\delta_2}^{\frac{h}{2}} \tau_{rz}^{(2)} dz + \int_{-\frac{h}{2}+\delta_1}^{\frac{h}{2}-\delta_2} \tau_{rz}^{(3)} dz; \quad M_r = \int_{-\frac{h}{2}}^{-\frac{h}{2}+\delta_1} \sigma_r^{(1)} \beta_1 dz + \int_{\frac{h}{2}-\delta_2}^{\frac{h}{2}} \sigma_r^{(2)} \beta_2 dz + \int_{-\frac{h}{2}+\delta_1}^{\frac{h}{2}-\delta_2} \sigma_r^{(3)} \beta_3 dz;$$

$$M_{\theta} = \int_{-\frac{h}{2}}^{-\frac{h}{2}+\delta_1} \sigma_{\theta}^{(1)} \beta_1 dz + \int_{\frac{h}{2}-\delta_2}^{\frac{h}{2}} \sigma_{\theta}^{(2)} \beta_2 dz + \int_{-\frac{h}{2}+\delta_1}^{\frac{h}{2}-\delta_2} \sigma_{\theta}^{(3)} \beta_3 dz. \quad (6)$$

Проинтегрировав уравнения для напряжений (3) согласно правилам (6), получим:

$$\begin{aligned} N_r = & [u_{,r} A_{11} + w_{,r} B_{11} + \frac{u}{r} A_{12} + w_{,r} B_{12}] + [u_{,r} Y_{11} + w_{,r} E_{11} + \frac{u}{r} Y_{12} + w_{,r} E_{12}] + \\ & + [u_{,r} F_{11} + \psi_{\theta,r} J_{11} + \frac{u}{r} F_{12} + \psi_{\theta,r} J_{12}]; \\ N_{\theta} = & [u_{,r} A_{12} + w_{,r} B_{12} + \frac{u}{r} A_{22} + w_{,r} B_{22}] + [u_{,r} Y_{12} + w_{,r} E_{12} + \frac{u}{r} Y_{22} + w_{,r} E_{22}] + \\ & + [u_{,r} F_{12} + \psi_{\theta,r} J_{12} + \frac{u}{r} F_{22} + \psi_{\theta,r} J_{22}]; \\ M_r = & [u_{,r} R_{11} + w_{,r} T_{11} + \frac{u}{r} R_{12} + w_{,r} T_{12}] + [u_{,r} K_{11} + \omega_{,r} S_{11} + \frac{u}{r} K_{12} + \omega_{,r} S_{12}] + \\ & + [u_{,r} L_{11} + \psi_{\theta,r} H_{11} + \frac{u}{r} L_{12} + \psi_{\theta,r} H_{12}]; \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} M_{\theta} = & [u_{,r} R_{12} + w_{,r} T_{12} + \frac{u}{r} R_{22} + w_{,r} T_{22}] + [u_{,r} K_{12} + w_{,r} S_{12} + \frac{u}{r} K_{22} + w_{,r} S_{22}] + \\ & + [u_{,r} L_{12} + \psi_{\theta,r} H_{12} + \frac{u}{r} L_{22} + \psi_{\theta,r} H_{22}]; \\ Q_r = & w_{,r} P_{44}^{(1)} + w_{,r} P_{44}^{(2)} + w_{,r} P_{44}^{(3)} + \psi_{\theta} P_{44}^{(3)}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} A_{11} = & \int_{-\frac{h}{2}}^{-\frac{h}{2}+\delta_1} D_{11}^{(1)} dz; & A_{12} = & \int_{-\frac{h}{2}}^{-\frac{h}{2}+\delta_1} D_{12}^{(1)} dz; & A_{22} = & \int_{-\frac{h}{2}}^{-\frac{h}{2}+\delta_1} D_{22}^{(1)} dz; \\ B_{11} = & \int_{-\frac{h}{2}}^{-\frac{h}{2}+\delta_1} D_{11}^{(1)} \beta_1 dz; & B_{12} = & \int_{-\frac{h}{2}}^{-\frac{h}{2}+\delta_1} D_{12}^{(1)} \beta_1 dz; & B_{22} = & \int_{-\frac{h}{2}}^{-\frac{h}{2}+\delta_1} D_{22}^{(1)} \beta_1 dz; \\ Y_{11} = & \int_{\frac{h}{2}-\delta_2}^{\frac{h}{2}} D_{11}^{(2)} dz; & Y_{12} = & \int_{\frac{h}{2}-\delta_2}^{\frac{h}{2}} D_{12}^{(2)} dz; & Y_{22} = & \int_{\frac{h}{2}-\delta_2}^{\frac{h}{2}} D_{22}^{(2)} dz; \\ E_{11} = & \int_{\frac{h}{2}-\delta_2}^{\frac{h}{2}} D_{11}^{(2)} \beta_2 dz; & E_{12} = & \int_{\frac{h}{2}-\delta_2}^{\frac{h}{2}} D_{12}^{(2)} \beta_2 dz; & E_{22} = & \int_{\frac{h}{2}-\delta_2}^{\frac{h}{2}} D_{22}^{(2)} \beta_2 dz; \\ F_{11} = & \int_{-\frac{h}{2}+\delta_1}^{\frac{h}{2}-\delta_2} D_{11}^{(3)} dz; & F_{12} = & \int_{-\frac{h}{2}+\delta_1}^{\frac{h}{2}-\delta_2} D_{12}^{(3)} dz; & F_{22} = & \int_{-\frac{h}{2}+\delta_1}^{\frac{h}{2}-\delta_2} D_{22}^{(3)} dz; \\ J_{11} = & \int_{-\frac{h}{2}+\delta_1}^{\frac{h}{2}-\delta_2} D_{11}^{(3)} \beta_3 dz; & J_{12} = & \int_{-\frac{h}{2}+\delta_1}^{\frac{h}{2}-\delta_2} D_{12}^{(3)} \beta_3 dz; & J_{22} = & \int_{-\frac{h}{2}+\delta_1}^{\frac{h}{2}-\delta_2} D_{22}^{(3)} \beta_3 dz; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 R_{11} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{-\frac{h}{2}+\delta_1} D_{11}^{(1)} \beta_1 dz; & R_{12} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{-\frac{h}{2}+\delta_1} D_{12}^{(1)} \beta_1 dz; & R_{22} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{-\frac{h}{2}+\delta_1} D_{22}^{(1)} \beta_1 dz; \\
 T_{11} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{-\frac{h}{2}+\delta_1} D_{11}^{(1)} (\beta_1)^2 dz; & T_{12} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{-\frac{h}{2}+\delta_1} D_{12}^{(1)} (\beta_1)^2 dz; & T_{22} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{-\frac{h}{2}+\delta_1} D_{22}^{(1)} (\beta_1)^2 dz; \\
 K_{11} &= \int_{\frac{h}{2}-\delta_2}^{\frac{h}{2}} D_{11}^{(2)} \beta_2 dz; & K_{12} &= \int_{\frac{h}{2}-\delta_2}^{\frac{h}{2}} D_{12}^{(2)} \beta_2 dz; & K_{22} &= \int_{\frac{h}{2}-\delta_2}^{\frac{h}{2}} D_{22}^{(2)} \beta_2 dz; \\
 S_{11} &= \int_{\frac{h}{2}-\delta_2}^{\frac{h}{2}} D_{11}^{(2)} (\beta_2)^2 dz; & S_{12} &= \int_{\frac{h}{2}-\delta_2}^{\frac{h}{2}} D_{12}^{(2)} (\beta_2)^2 dz; & S_{22} &= \int_{\frac{h}{2}-\delta_2}^{\frac{h}{2}} D_{22}^{(2)} (\beta_2)^2 dz; \\
 L_{11} &= \int_{-\frac{h}{2}+\delta_1}^{\frac{h}{2}-\delta_2} D_{11}^{(3)} \beta_2 dz; & L_{12} &= \int_{-\frac{h}{2}+\delta_1}^{\frac{h}{2}-\delta_2} D_{12}^{(3)} \beta_2 dz; & L_{22} &= \int_{-\frac{h}{2}+\delta_1}^{\frac{h}{2}-\delta_2} D_{22}^{(3)} \beta_2 dz; \\
 H_{11} &= \int_{-\frac{h}{2}+\delta_1}^{\frac{h}{2}-\delta_2} D_{11}^{(3)} (\beta_2)^2 dz; & H_{12} &= \int_{-\frac{h}{2}+\delta_1}^{\frac{h}{2}-\delta_2} D_{12}^{(3)} (\beta_2)^2 dz; & H_{22} &= \int_{-\frac{h}{2}+\delta_1}^{\frac{h}{2}-\delta_2} D_{22}^{(3)} (\beta_2)^2 dz; \\
 P_{44}^1 &= \int_{-\frac{h}{2}}^{-\frac{h}{2}+\delta_1} D_{44}^{(1)} \beta_2 dz; & P_{44}^2 &= \int_{\frac{h}{2}-\delta_2}^{\frac{h}{2}} D_{44}^{(2)} \beta_2 dz; & P_{44}^3 &= \int_{-\frac{h}{2}+\delta_1}^{\frac{h}{2}-\delta_2} D_{44}^{(3)} \beta_2 dz.
 \end{aligned}$$

Рассматривая выражения (7) совместно со статическими условиями (5) приходим к системе трех дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}
 & [u_{,rr} (A_{11} + C_{11} + F_{11}) + w_{,rr} (B_{11} + B_{12} + E_{11} + E_{12}) - \frac{u}{r^2} (A_{12} + C_{12} + F_{12}) + \psi_{\theta,rr} (J_{11} + J_{12})] + \\
 & + [u_{,r} (A_{11} + C_{11} + F_{11}) + w_{,r} (B_{11} + B_{12} + E_{11} + E_{12}) + \frac{u}{r} (A_{12} + C_{12} + F_{12}) + \psi_{\theta,r} (J_{11} + J_{12}) - \\
 & - u_{,r} (A_{12} + C_{12} + F_{12}) + w_{,r} (B_{12} + B_{22} + E_{12} + E_{22}) + \frac{u}{r} (A_{22} + C_{22} + F_{22}) + \psi_{\theta,r} (J_{12} + J_{22})] / r = 0; \\
 & w_{,rr} (P_{44}^{(1)} + P_{44}^{(2)} + P_{44}^{(3)}) + \frac{w_{,r} (P_{44}^{(1)} + P_{44}^{(2)} + P_{44}^{(3)}) + \psi_{\theta} P_{44}^{(3)}}{r} = -q; \tag{8}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & u_{,rr} (R_{11} + K_{11} + L_{11}) + w_{,rr} (T_{11} + T_{12} + S_{11} + S_{12}) - \frac{u}{r^2} (R_{12} + K_{12} + L_{12}) + \\
 & + \psi_{\theta,rr} (H_{11} + H_{12}) + \{ [u_{,r} (R_{11} + K_{11} + L_{11}) + w_{,r} (T_{11} + T_{12} + S_{11} + S_{12}) + \\
 & + \frac{u}{r} (R_{12} + K_{12} + L_{12}) + \psi_{\theta,r} (H_{11} + H_{12})] - [u_{,r} (R_{12} + K_{12} + L_{12}) + w_{,r} (T_{12} + T_{22} + S_{12} + S_{22}) + \\
 & + \frac{u}{r} (R_{22} + K_{22} + L_{22}) + \psi_{\theta,r} (H_{12} + H_{22})] \} / r - [w_{,r} (P_{44}^{(1)} + P_{44}^{(2)} + P_{44}^{(3)}) + \psi_{\theta} P_{44}^{(3)}] = 0.
 \end{aligned}$$

Для решения тестовой задачи была принята пластина с жестким защемлением внешнего и внутреннего контуров, для которой имеем следующие граничные условия:

$$\text{при } r = a: u = 0; \psi_{\theta} = 0; w = 0; w_{,r} = 0; \text{ при } r = R: u = 0; \psi_{\theta} = 0; w = 0; w_{,r} = 0.$$

Таким образом, сформулирована замкнутая система дифференциальных уравнений в перемещениях относительно срединной плоскости, описывающая исследуемую задачу. Для решения полученных уравнений (8) используем конечно-разностный метод с аппроксимацией второго порядка точности [39, 40].

Для решения данного класса задач разработана программа в среде Mathcad. Для конкретного расчета была принята пластина внешним радиусом  $R_1 = 1,0$  м и радиусом отверстия  $R_2 = 0,2$  м. Толщины внешних слоев приняты одинаковыми  $\delta = 0,02$  м, толщина среднего слоя –  $\delta = 0,1$  м. Для расчета выбрана нагрузка равномерно распределенная, равная 1,0 МПа. Форма и размеры пластины приведены на рисунке 2.

Механические характеристики материала внешних слоев были приняты следующие:

$$E_1^+ = 11,85 \text{ ГПа}, E_1^- = 1,65 \text{ ГПа}, E_2^+ = 7,85 \text{ ГПа}, E_2^- = 1,12 \text{ ГПа}, G_{12} = 1,42 \text{ ГПа}, \nu_{12}^+ = 0,1, \nu_{12}^- = 0,09.$$

Внутренний слой изготовлен из стеклопластика, имеющего следующие технические константы:  $E_1^+ = 60,0 \text{ ГПа}, E_1^- = 20,0 \text{ ГПа}, E_2^+ = 30,0 \text{ ГПа}, E_2^- = 15,0 \text{ ГПа}, G_{12} = 4,0 \text{ ГПа}, G_{13} = 6,0 \text{ ГПа}, \nu_{12}^+ = 0,25, \nu_{12}^- = 0,15,$

Для визуального представления результатов решения задачи были построены графики распределения напряжений, прогибов и перемещений в срединной плоскости: вдоль радиуса; по толщине пластины с координатой  $\frac{1}{2}$  радиуса,  $\frac{1}{4}$  радиуса и  $\frac{3}{4}$  радиуса (рисунки 3 – 9). Данные графики построены с учетом двух вариантов: согласно разработанной модели (сплошная линия) и без учета разнотолщинности (прерывистая).

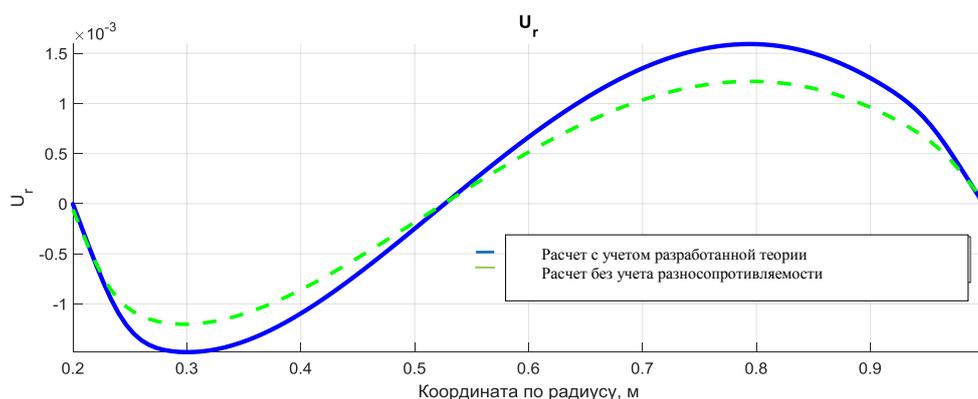


Рисунок 3 – Горизонтальные перемещения вдоль радиуса, м

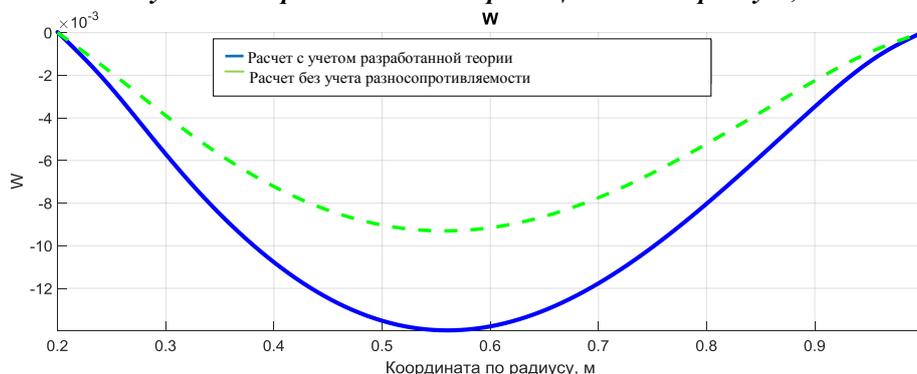


Рисунок 4 – Вертикальные перемещения вдоль радиуса, м

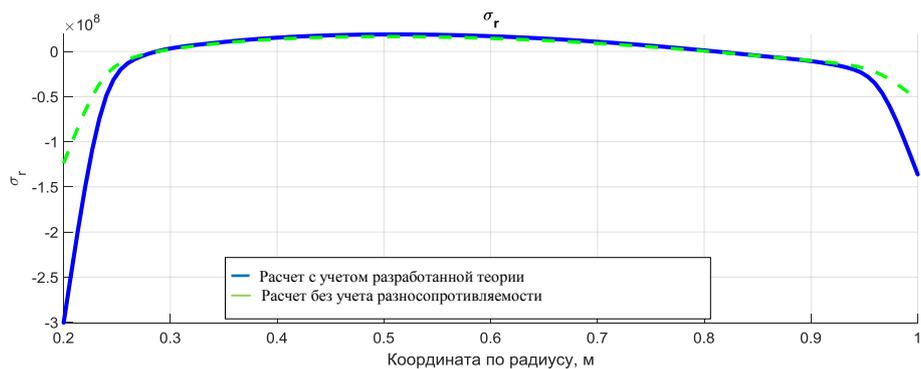


Рисунок 5 – Напряжения  $\sigma_r$  вдоль радиуса (снизу), Па

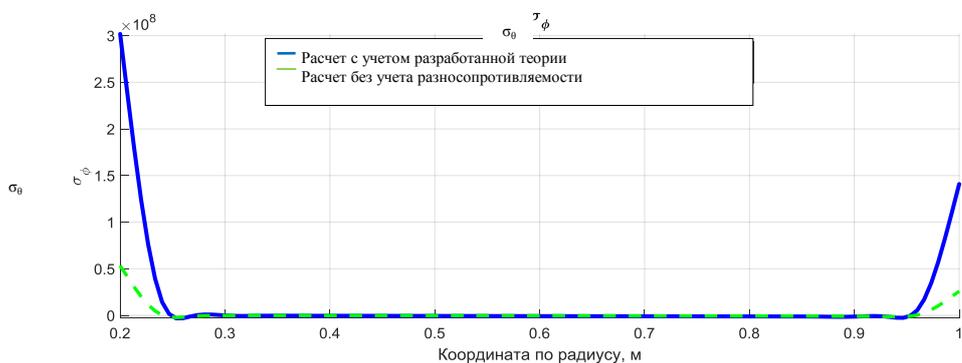


Рисунок 6 – Напряжения  $\sigma_\theta$  вдоль радиуса (сверху), Па

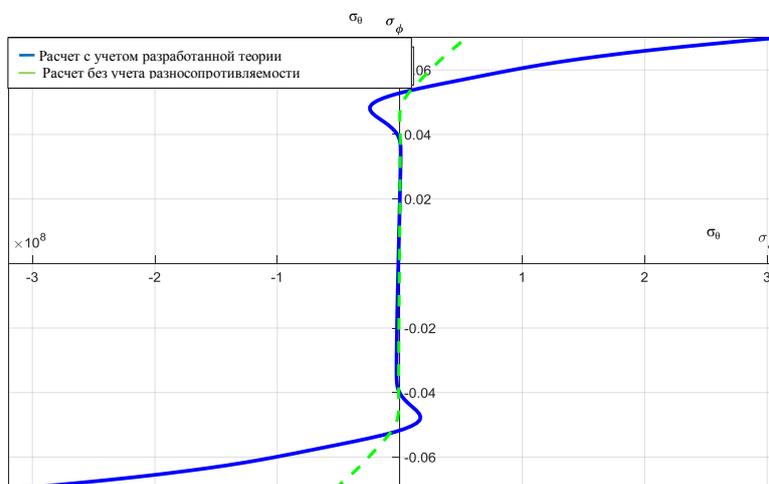


Рисунок 7 – Напряжения  $\sigma_\theta$  по толщине пластины в точке  $\frac{1}{2}$  радиуса, Па

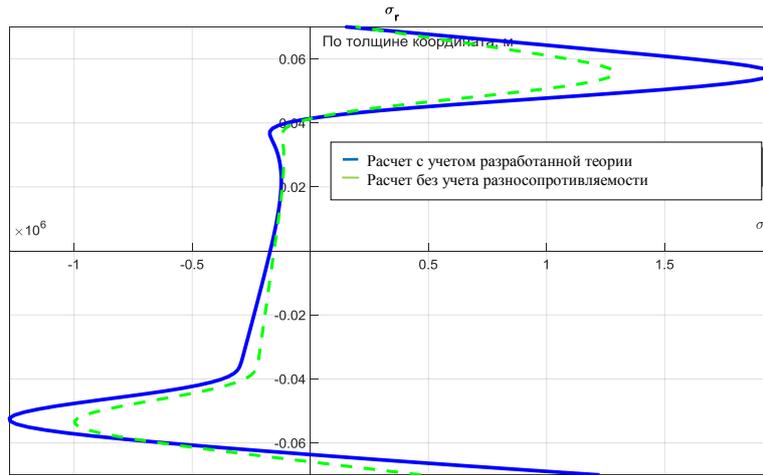


Рисунок 8 – Напряжения  $\sigma_r$  по толщине пластины в точке  $\frac{1}{4}$  радиуса, Па

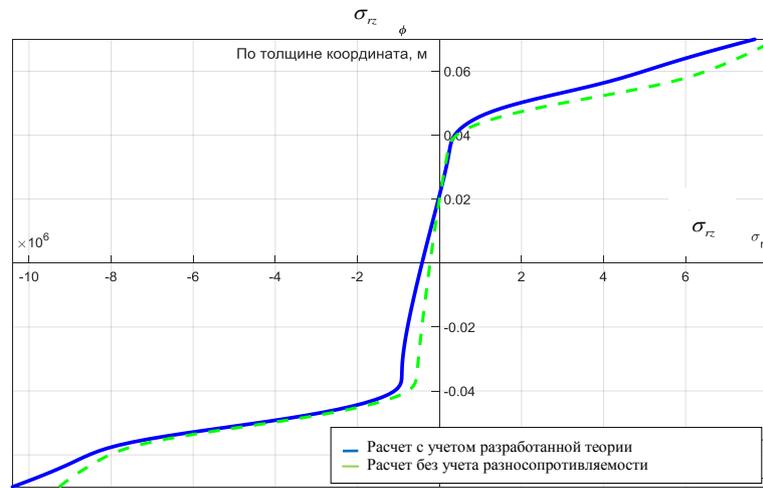


Рисунок 9 – Напряжения  $\sigma_{rz}$  по толщине пластины в точке  $\frac{1}{4}$  радиуса, Па

Для наглядности полученных результатов и оценки погрешности по двум вариантам моделей расчетные характеристики деформирования пластины были сведены в таблице 1.

Таблица 1 – Расхождение результатов по двум теориям

№ п/п	Результаты	Погрешность классической теории, %
1	2	3
Вдоль радиуса пластины		
1	Горизонтальные перемещения $u$ вдоль радиуса	20
2	Вертикальные перемещения $w$ вдоль радиуса	34
3	Напряжения $\sigma_r$ вдоль радиуса (снизу)	58
4	Напряжения $\sigma_\theta$ вдоль радиуса (снизу)	83
5	Напряжения $\sigma_{rz}$ вдоль радиуса (снизу)	10
6	Напряжения $\sigma_r$ вдоль радиуса (сверху)	58
7	Напряжения $\sigma_\theta$ вдоль радиуса (сверху)	83
8	Напряжения $\sigma_{rz}$ вдоль радиуса (сверху)	8
По толщине пластины в точке $\frac{1}{2}$ радиуса		
9	Напряжения $\sigma_r$ по толщине пластины в точке $\frac{1}{2}$ радиуса	61

Окончание таблицы 1.

1	2	3
10	Напряжения $\sigma_\theta$ по толщине пластины в точке $\frac{1}{2}$ радиуса	85
11	Напряжения $\sigma_{rz}$ по толщине пластины в точке $\frac{1}{2}$ радиуса	10
По толщине пластины в точке $\frac{1}{4}$ радиуса		
12	Напряжения $\sigma_r$ по толщине пластины в точке $\frac{1}{4}$ радиуса	38
13	Напряжения $\sigma_\theta$ по толщине пластины в точке $\frac{1}{4}$ радиуса	19
14	Напряжения $\sigma_{rz}$ по толщине пластины в точке $\frac{1}{4}$ радиуса	12
По толщине пластины в точке $\frac{3}{4}$ радиуса		
15	Напряжения $\sigma_r$ по толщине пластины в точке $\frac{3}{4}$ радиуса	60
16	Напряжения $\sigma_\theta$ по толщине пластины в точке $\frac{3}{4}$ радиуса	83
17	Напряжения $\sigma_{rz}$ по толщине пластины в точке $\frac{3}{4}$ радиуса	14

В результате сравнения решений рассмотренной задачи по представленной модели с данными традиционной теории без учёта свойств разносопротивляемости, отмечены следующие особенности: горизонтальные перемещения имеют расхождение в 20%, разница по прогибам достигает 34%, для напряжений расхождения имеют более расплывчатый диапазон в интервале от 8% до 85%.

#### Выводы

В результате проделанной работы была конкретизирована и применена модель деформирования разносопротивляющихся ортотропных материалов, которая наиболее точно и адекватно описывает большинство в настоящее время нелинейных ортотропных материалов. В основу рассматриваемой модели были положены обработанные результаты экспериментов по деформированию разносопротивляющихся материалов.

Для решения задачи деформирования трехслойной кольцевой пластины изготовленной из ортотропного разносопротивляющегося материала согласно разработанной модели был использован метод конечно-разностной аппроксимацией второго порядка точности. Практическое использование алгоритма и анализ итерационных методов решения реализовывалось с помощью пакета прикладных программ «Mathcad».

В результате проделанной работы был решён ряд тестовых задач по теме деформирования кольцевых пластин средней толщины из ортотропных материалов, определены характеристики их состояния на разных стадиях загрузки поперечной равномерно-распределённой нагрузкой, приведены итоги сопоставления двух вариантов решения этой задачи.

#### Благодарности

Работа выполнена при поддержке гранта Правительства Тульской области для выполнения работ в сфере науки и техники, договор №ДС/284.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Schmueser D.W. Nonlinear Stress-Strain and Strength Response of Axisymmetric Bimodulus Composite Material Shells // AIAA Journal. 1983. Vol. 21. No.12. pp. 1742 – 1747.
2. Reddy L.N., Bert C.W. On the Behavior of Plates Laminated of Bimodulus Composite Materials // ZAMM. 1982. Vol. 62. No.6. Pp. 213 – 219.
3. Jones R.M. A Nonsymmetric Compliance Matrix Approach to Nonlinear MultimodulusOrtotropic Materials // AIAA Journal. 1977. Vol. 15. No.10. Pp. 1436 – 1443.
4. Jones R.M. Modeling Nonlinear Deformation of Carbon-Carbon Composite Material // AIAA Journal. 1980. Vol. 18. No.8. Pp. 995 – 1001.
5. Jones R.M. Bucling of Stiffened Multilayered Circular Shells with Different Ortotropic Moduli in Tension and Compression // AIAA Journal. 1971. Vol. 9. No.5. Pp. 917 – 923.
6. Крегерс А.Ф., Максимов Р.Д., Турциныш Р.П. Нелинейная ползучесть тканевого стеклопластика при некоторых видах сложного напряженного состояния // Механика полимеров. 1973. №2. С. 212 – 218.

7. Амелина Е.В. О нелинейном деформировании углепластиков: эксперимент, модель, расчет / Е.В.Амелина [и др.] // ИВТ СО РАН: Вычислительные технологии. 2015. Т. 20. №5. С. 27–52.
8. Каюмов Р.А., Луканкин С.А., Паймушин В.Н., Холмогоров С.А. Идентификация механических характеристик армированных волокнами композитов // Ученые записки Казанского университета. Физико-математическая наука. 2015. Т. 157. кн. 4. С. 112–132.
9. Shafigullin L.N., Bobrishev A.A., Erofeev V.T., Treshchev A.A., Shafigullina A.N. Development of the recommendations on selection of glass-fiber reinforced polyurethanes for vehicle parts // International Journal of Applied Engineering Research. 2015. Vol. 10. No.23. pp. 43758-43762.
10. Розе А.В. Жигун И.Г., Душин М.Н. Трехармированные тканые материалы // Механика полимеров. 1970. №3. С. 471–476.
11. Jones R.M., Nelson D.A.R. Theoretical-experimental correlation of material models for non-linear deformation of graphite // AIAA Journal. 1976. Vol. 14. No.10. pp. 1427–1435.
12. Jones R.M. Stress-Strain Relations for Materials with Different Moduli in Tension and Compression // AIAA Journal. 1977. Vol. 15. No.1. pp. 16–25.
13. Золочевский А.А., Кузнецов В.Н. Расчет анизотропных оболочек из разномодульных материалов при неосесимметричном нагружении // Динамика и прочность тяжелых машин. Днепропетровск: ДГУ, 1989. С.84–92.
14. Елсуфьев С.А. Исследование деформирования фторопласта-4 при линейном и плоском напряженном состояниях // Механика полимеров. 1968. №4. С. 742–746.
15. Елсуфьев С.А., В.М.Чебанов Изучение деформирования фторопласта в условиях плоского напряженного состояния // Исслед. по упругости и пластичности. Л.: Изд-во ЛГУ, 1971. Вып. 8. С. 209–213.
16. Айнбиндер С.Б., Лака М.Г., Майорс И.Ю. Влияние гидростатического давления на механические свойства полимерных материалов // Механика полимеров. 1965. № 1. С. 65 – 75.
17. Айнбиндер С.Б., Алксне К.И., Тюпина Э.Л., Лака М.Г. Свойства полимеров при высоких давлениях. М.: Наука, 1973. 118 с.
18. Деревянко Н.И. Свойства армированного полистирола при кратковременном растяжении, сжатии и изгибе // Механика полимеров. 1968. №6. С. 1059–1064.
19. Божанов П.В., Трещев А.А. Определение прочностных критериев при возникновении пластических деформаций в поликарбонате // Инновации и инвестиции. 2018. №12. С. 323-326.
20. Bert C.W. Models for Fibrous Composite with Different Properties in Tension and Compression // Transaction of the ASME. 1977. Vol. 99 N. Ser. D. No. 4. pp. 344–349.
21. Трещев А.А. Теория деформирования и прочности разнородных материалов. Тула: ТулГУ, 2020. 359 с.
22. Bazant Z.P., Bhat P.D. Endochronic Theory of Inelasticity and Failure of Concrete // Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE. 1976. Vol. 102. No. EM4. pp. 701–722.
23. Kupfer H.B. Das nicht-linear Verhalten des Betons bei Zweiachsiger Beanspruchung // Beton und Stahlbetonbau. 1973. No.11. pp. 269–274.
24. Tasuji M.E., Slate F.O., Nilson A.H. Stress-Strain Response and Fracture of Concrete in Biaxial Loading // ACI Journal. 1979. No.7. pp. 806–812.
25. Амбарцумян С.А. Основные уравнения и соотношения разномодульной теории упругости анизотропного тела // Изв. АН СССР. МТТ. 1969. № 3. С. 51 – 61.
26. Ломакин Е.В. Соотношения теории упругости для анизотропного тела, деформационные характеристики которых зависят от вида напряженного состояния // Изв. АН СССР. МТТ. 1983. №3. С. 63 – 69.
27. Трещев А.А., Завьялова Ю.А., Лапшина М.А. Вариант модели деформирования ортотропных композитных материалов // Эксперт: Теория и практика (Научно-практический журнал). Тольятти: АНО «Институт судебной строительно-технической экспертизы». 2020. №3(6). С. 62 – 68.
28. Трещев А.А., Завьялова Ю.А., Лапшина М.А. Изгиб ортотропных пластин средней толщины с учетом зависимости материальных параметров от вида напряженного состояния // Строительная механика и конструкции. Воронеж: ВГТУ. 2022. Вып. 1. №32. С. 7–28.
29. Трещев А.А., Монастырев Ю.А., Чибрикина В.Д., Завьялова Ю.А., Лапшина М.А. Описание деформирования ортотропных разнородных материалов // Строительная механика и конструкции. Воронеж: ВГТУ. 2019. №1(20). С. 7–13.
30. Трещев А.А. Потенциальная зависимость между деформациями и напряжениями для ортотропных физически нелинейных материалов // Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии. Орел: ОГУ. 2017. № 4-1 (324). С. 71 – 74.
31. Treshchev A.A., Zavyalova Yu.A., Lapshina M.A., Gvozdev A.E., Kuzovleva O.V., Krupitsyn E.S. Defining equations of deformation of materials with double anisotropy // Chebyshevskii sbornik. 2021. Vol. 22. No. 4. pp. 369 – 383.
32. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. М.: Наука, 1966. 636 с.

33. Батов П.А., Батырев К.Г., Матченко Н.М. Применение модифицированного пространства для расчета ортотропных пластин с использованием ANSYS и аналитических методов // Сборник материалов 2-го Российско-Украинского симпозиума. Пенза: ПГУАС. 2002. С. 165–167.
34. Батырев К.Г. Осесимметричная задача изгиба трансверсально изотропной пластины под действием поперечной нагрузки // Известия Тульского государственного университета. Серия: Технология, механика и долговечность строительных материалов, конструкций и сооружений. Тула: ТулГУ. 2001. Вып. 2. С. 10 – 18.
35. Пикуль В.В. Механика оболочек. Владивосток: Дальнаука, 2009. 536 с.
36. Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек. М.: Наука, 1974. 446 с.
37. Трещев А.А. Анизотропные пластины и оболочки из разносопротивляющихся материалов. М.: Тула: РААСН; ТулГУ, 2007. 160 с.
38. Алфутов Н.А., Зиновьев П.А., Попов Б.Г. Расчет многослойных пластин и оболочек из композиционных материалов. М.: Машиностроение, 1984. 263 с.
39. Биргер И.А., Мавлютов Р.Р. Сопротивление материалов. М.: Наука. Гл. ред. физ. – мат. лит, 1986. 560 с.
40. Писаренко Г.С., Можаровский Н.С. Уравнения и краевые задачи теории пластичности и ползучести. Справочное пособие. Киев: Наук. думка, 1981. 496 с.

## REFERENCES

1. Schmueser D.W. Nonlinear Stress-Strain and Strength Response of Axisymmetric Bimodulus Composite Material Shells / D.W.Schmueser // AIAA Journal. 1983. Vol. 21. No.12. pp. 1742 - 1747.
2. Reddy L.N. On the Behavior of Plates Laminated of Bimodulus Composite Materials / L.N.Reddy, C.W.Bert // ZAMM. 1982. Vol. 62. No.6. Pp. 213 – 219.
3. Jones R.M. A Nonsymmetric Compliance Matrix Approach to Nonlinear Multimodulus Ortotropic Materials / R.M.Jones // AIAA Journal. 1977. Vol. 15. No.10. Pp. 1436 – 1443.
4. Jones R.M. Modeling Nonlinear Deformation of Carbon-Carbon Composite Material / R.M.Jones // AIAA Journal. 1980. Vol. 18. No.8. Pp. 995 – 1001.
5. Jones R.M. Bucling of Stiffened Multilayered Circular Shells with Different Ortotropic Moduli in Tension and Compression / R.M.Jones // AIAA Journal. 1971. Vol. 9. No.5. Pp. 917 – 923.
6. Kregers A.F. Nelineynaya polzuchest' tkanevogo stekloplastika pri nekotoryh vidah slojnogo napryajonnogo sostoyaniya [Nonlinear creep of fiberglass fabric in some types of complex stress state] / A.F.Kregers, R.D.Maksimov, R.P.Turcinysh // Mechanics of polymers. 1973. No. 2. Pp. 212 – 218. (rus)
7. Amelina E.V. O nelineynom deformirovanii ugleplastikov: eksperiment, model', raschot [On nonlinear deformation of carbon fiber plastics: experiment, model, calculation] / E.V.Amelina [et al.] // ICT SB RAS: Computational Technologies. 2015. Vol. 20. No. 5. Pp. 27–52. (rus)
8. Kayumov R.A. Identifikaciya mehanicheskikh karakteristik armirovannih voloknami kompozitov [Identification of mechanical characteristics of fiber-reinforced composites] / R.A.Kayumov, S.A.Lukanin, V.N.Paimushin, S.A.Kholmogorov // Scientific notes of the Kazan University. Physical and mathematical sciences. – 2015. Vol. 157. book 4. Pp. 112–132. (rus)
9. Shafigullin L.N. Development of the recommendations on selection of glass-fiber reinforced polyurethanes for vehicle parts / L.N.Shafigullin, A.A.Bobrishev, V.T.Erofeev, A.A.Treshchev, A.N.Shafigullina // International Journal of Applied Engineering Research. 2015. Vol. 10. No.23. Pp. 43758–43762.
10. Rose A.V. Treharmirovannnie tkanie materialy [Three-reinforced woven materials] / A.V.Rose, I.G.Zhigun, M.N.Dushin // Mechanics of polymers. 1970. No. 3. Pp. 471–476. (rus)
11. Jones R.M., Theoretical-experimental correlation of material models for non-linear deformation of graphite / R.M.Jones, D.A.R.Nelson // AIAA Journal. 1976. Vol. 14. No.10. Pp. 1427–1435.
12. Jones R.M. Stress-Strain Relations for Materials with Different Moduli in Tension and Compression / R.M.Jones // AIAA Journal. 1977. Vol. 15. No.1. Pp. 16–25.
13. Zolochovsky A.A. Raschot anizotropnih obolochek iz raznomodul'nih materialov pri neosesimmetrichnom nagrujenii [Calculation of anisotropic shells from multi-modular materials under non-axisymmetric loading] / A.A.Zolochovsky, V.N.Kuznetsov // Dynamics and strength of heavy machines. – Dnepropetrovsk: DSU, 1989. Pp. 84–92. (rus)
14. Elsufyev S.A. Issledovanie deformirovaniya ftoroplasta-4 pri lineynom I ploskom napryajennom sostoyaniyah [Investigation of deformation of fluoroplast-4 under linear and plane stress states] / S.A.Elsufyev // Mechanics of polymers. 1968. No. 4. Pp. 742–746. (rus)
15. Elsufyev S.A. Izuchenie deformirovaniya ftoroplasta v usloviyah ploskogo napryajonnogo sostoyaniya [The study of fluoroplast deformation in a plane stress state] / S.A.Elsufyev, V.M.Chebanov // Research. on elasticity and plasticity. L.: LSU Publishing House, 1971. Issue 8. Pp. 209–213. (rus)

16. Ainbinder S.B. Vliyanie gidrostaticheskogo davleniya na mehanicheskie svoystva polimernih materialov [The influence of hydrostatic pressure on the mechanical properties of polymer materials] / S.B.Ainbinder, M.G.Laka, I.Y.Majors // *Mechanics of polymers*. 1965. No. 1. Pp. 65–75. (rus)
17. Ainbinder S.B. Svoystva polymerov pri vysokih davleniyah [Properties of polymers at high pressures] / S.B.Ainbinder, K.I.Aiksne, E.L.Tyurina, M.G.Laka. M.: Nauka, 1973. 118 p. (rus)
18. Derevyanko N.I. Svoystva armirovannogo polistirola pri kratkovremennom rastyajenii, sjatii i izgibe [Properties of reinforced polystyrene under short-term stretching, compression and bending] / N.I.Derevyanko // *Mechanics of polymers*. 1968. No.6. Pp. 1059–1064. (rus)
19. Bazhanov P.V. Opredelenie prochnostnih kriteriev pri vozniknovenii plasticheskikh deformatsiy [Determination of strength criteria in the occurrence of plastic deformations in polycarbonate] / P.V.Bozhanov, A.A.Treshchev // *Innovations and investments*. 2018. No. 12. Pp. 323–326. (rus)
20. Bert C.W. Models for Fibrous Composite with Different Properties in Tension and Compression / C.W.Bert // *Transaction of the ASME*. 1977. Vol. 99 H. Ser. D. No. 4. Pp. 344–349.
21. Treshchev A.A. Teoriya deformirovaniya i prochnosti raznosoprotivlyayushchihsya materialov [Theory of deformation and strength of different resistant materials] / A.A. Treshchev // Tula: TulSU, 2020. 359 p. (rus)
22. Bazant Z.P. Endochronic Theory of Inelasticity and Failure of Concrete / Z.P.Bazant, P.D.Bhat // *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE*. 1976. Vol. 102. No. EM4. Pp. 701–722.
23. Kupfer H.B. Das nicht-linear Verhalten des Betons bei Zweiachsiger Beanspruchung / H.B.Kupfer // *Beton und Stahlbetonbau*. 1973. No.11. Pp. 269–274.
24. Tasuji M.E. Stress-Strain Response and Fracture of Concrete in Biaxial Loading / M.E.Tasuji, F.O.Slate, A.H.Nilson // *ACI Journal*. 1979. No.7. Pp. 806–812.
25. Ambartsumyan S.A. Osnovnie uravneniya i sootnosheniya raznomodul'noy teorii uprugosti anizotropnogo tela [Basic equations and relations of the multi-modulus theory of elasticity of an anisotropic body] / S.A. Ambartsumyan // *Izv. of the USSR Academy of Sciences. MSB*. 1969. No. 3. Pp. 51–61. (rus)
26. Lomakin E.V. Sootnosheniya teorii uprugosti anizotropnogo tela, deformacionnie karakteristiki kotorih zavisyat ot vida napryajonnogo sostoyaniya [Relations of the theory of elasticity for an anisotropic body, the deformation characteristics of which depend on the type of stress state] / E.A. Lomakin // *Izv. of the USSR Academy of Sciences. MSB*. 1983. No.3. Pp. 63–69. (rus)
27. Treshchev A.A. Variant modeli deformirovaniya ortotropnih kompozitnih materialov [Variant of the deformation model of orthotropic composite materials] / A.A. Treshchev, Yu.A. Zavyalova, M.A. Lapshina // *Expert: Theory and Practice (Scientific and Practical journal)*. – Togliatti: ANO "Institute of Forensic Construction and Technical Expertise" 2020. No.3(6). Pp. 62–68. (rus)
28. Treshchev A.A. Izgib ortotropnih plastin sredney tolschchiny s uchetom zavisimosti material'nykh parametrov ot vida napryajonnogo sostoyaniya [Bending of orthotropic plates of medium thickness taking into account the dependence of material parameters on the type of stress state] / A.A. Treshchev, Yu.A. Zavyalova, M.A. Lapshina // *Structural mechanics and constructions. Voronezh: VSTU*. 2022. Issue 1. No. 32. Pp. 7–28. (rus)
29. Treshchev A.A. Opisanie deformirovaniya ortotropnih raznosoprotivlyayushchihsya materialov [Description of deformation of orthotropic materials with different resistance] / A.A. Treshchev, Yu.A.Monastyrev, V.D.Chibrikina, Yu.A.Zavyalova, M.A.Lapshina // *Construction mechanics and structures. Voronezh: VSTU*. 2019. No. 1(20). Pp. 7–13. (rus)
30. Treshchev A.A. Potentsial'naya zavisimost' mezhdu deformatsiyami i napryajeniyami dlya ortotropnih fizicheskikh nelineynykh materialov [Potential dependence between deformations and stresses for orthotropic physically nonlinear materials] / A.A.Treshchev // *Fundamental and applied problems of engineering and technology. Eagle: OGU*. 2017. № 4-1 (324). Pp. 71–74. (rus)
31. Treshchev A.A. Defining equations of deformation of materials with double anisotropy / A.A.Treshchev, Yu.A.Zavyalova, M.A.Lapshina, A.E.Gvozdev, O.V.Kuzovleva, E.S.Krupitsyn // *Chebyshevskii sbornik*. 2021. Vol. 22. No. 4. Pp. 369 – 383.
32. Timoshenko S.P. Plastinki i obolochki [Plates and shells] / S.P. Timoshenko, S. Voynvsky-Krieger. M.: Nauka, 1966. 636 p. (rus)
33. Batov P.A. Primeneniye modifitsirovannogo prostranstva dlya rascheta ortotropnih plastin s ispol'zovaniyem ANSYS i analiticheskikh metodov [Application of modified space for calculation of orthotropic plates using ANSYS and analytical methods] / P.A.Batov, K.G.Batyrev, N.M.Matchenko // *Collection of materials of the 2nd Russian-Ukrainian Symposium. Penza: PGUAS*. 2002. Pp. 165–167. (rus)
34. Batyrev K.G. Osesimmetrichnaya zadacha izgiba transversal'no izotropnoy plastini pod deystviem poperechnoy nagruzki [Axisymmetric problem of bending a transversally isotropic plate under the action of a transverse load] / K.G.Batyrev // *Izvestiya Tula State University. Series: Technology, mechanics and durability of building materials, structures and structures. Tula: TulSU*. 2001. Issue 2. Pp. 10–18. (rus)
35. Pikul V.V. Mehanika obolochek [Mechanics of shells] / V.V.Pikul. Vladivostok: Dalnauka, 2009. 536 p. (rus)
36. Ambartsumyan S.A. Obshchaya teoriya anizotropnih obolochek [General theory of anisotropic shells] / S.A.Ambartsumyan. M.: Nauka, 1974. 446 p. (rus)

37. Treshchev A.A. Anizotropnitye plastiny i obolochki iz raznosopronivlyayushchihsya materialov [Anisotropic plates and shells made of highly resistant materials] / A.A. Treshchev. M.: Tula: RAASN; TulSU, 2007. 160 p. (rus)
38. Alfutov N.A. Raschet mnogosloynnih plastin i obolochek iz kompozicionnih materialov [Calculation of multilayer plates and shells made of composite materials] / N.A.Alfutov, P.A.Zinoviev, B.G.Popov. M.: Mashinostroenie, 1984. 263 p. (rus)
39. Birger I.A. Soprotivleniye materialov [Resistance of materials] / I.A.Birger, R.R.Mavlyutov. M.: Nauka. Gl. ed. phys. - mate. lit, 1986. 560 p. (rus)
40. Pisarenko G.S. Uravneniya i kraevye zadachi teorii plastichnosti i polzuchesti [Equations and boundary value problems of the theory of plasticity and creep] / G.S.Pisarenko, N.S.Mozharovsky // Reference manual. Kiev: Nauk. dumka, 1981. 496 p. (rus)

### Информация об авторах:

#### **Трещев Александр Анатольевич**

Тульский государственный университет, г. Тула, Россия,  
Чл.-корр. РААСН, доктор технических наук, профессор, зав. кафедрой «Строительство, строительные материалы и конструкции».  
E-mail: [taa58@yandex.ru](mailto:taa58@yandex.ru).

#### **Завьялова Юлия Андреевна**

Тульский государственный университет, г. Тула, Россия,  
аспирант кафедры «Строительство, строительные материалы и конструкции».  
E-mail: [zavyalova\\_yuliya95@mail.ru](mailto:zavyalova_yuliya95@mail.ru).

### Information about authors:

#### **Treshchev Alexandr An.**

Tula State University, Tula, Russia,  
corresponding member of RAASN, doctor of technical sciences, professor, head of the department of Construction, Building Materials and Structures.  
E-mail: [taa58@yandex.ru](mailto:taa58@yandex.ru).

#### **Zavyalova Yuliya An.**

Tula State University, Tula, Russia,  
graduate student of the department of Construction, Building Materials and Structures.  
E-mail: [zavyalova\\_yuliya95@mail.ru](mailto:zavyalova_yuliya95@mail.ru).