

А.П. ЛОКТИОНОВ¹

¹ФГБОУ ВО «Юго-Западный государственный университет», г. Курск, Россия

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ БАЛОК В СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЯХ

Аннотация. Предложен показатель качества коэффициентной сеточной обратной задачи Коши для балок в строительных конструкциях. Показатель построен на основе теории регуляризации обратных задач. Аналитически и натурным экспериментом смоделировано шарнирное опирание балки на колонну. Информационно-измерительной системой исследованы модели измерения и вычислений при равномерной непрерывной норме погрешности измерения прогибов и вычисления параметров идентификации балки. Модели отличаются различными сочетаниями видов внешней нагрузки.

Мера влияния погрешности средства измерений и распределения узлов сетки аппроксимации на погрешность определения коэффициентов уравнения прогибов балки с фиксированным младшим коэффициентом описана безразмерным абсолютным числом обусловленности задачи. Проанализированы значения безразмерного абсолютного числа обусловленности и показателя качества задачи в зависимости от распределения узлов сетки аппроксимации, погрешности средства измерений и типа модели измерения и вычислений.

Предложено использовать полученные аналитические зависимости для анализа строительных конструкций на стадии экспериментально-теоретических исследований.

Ключевые слова: балка, обратная задача Коши, модель измерения, прогиб, информационно-измерительная система, численное дифференцирование.

A.P. LOKTIONOV¹

¹Southwest State University, Kursk, Russia

INVERSE CAUCHY PROBLEM FOR BEAMS IN BUILDING STRUCTURES

Abstract. A quality index of the coefficient grid inverse Cauchy problem for beams in building structures is proposed. The indicator is based on the theory of regularization of inverse problems. An articulated support of a beam on a column is modeled analytically and by a full-scale experiment. Models of measurement and calculation are investigated for a uniform continuous error rate of deflection measurement and calculation of beam identification parameters. Models differ in various combinations of types of external load.

A measure of the influence of the error of the measuring instrument and the distribution of approximation grid nodes on the error in determining the coefficients of the beam deflection equation with a fixed first coefficient is proposed. The measure of influence is described by the dimensionless absolute condition number of the problem. The values of the dimensionless absolute condition number and the quality index of the problem are analyzed depending on the distribution of approximation grid nodes, the error of the measuring instrument, and the type of measurement and calculation model.

It is proposed to use the obtained analytical dependencies for the analysis of building structures at the stage of experimental and theoretical studies.

Keywords: beam, inverse Cauchy problem, measurement model, deflection, information-measuring system, numerical differentiation.

Введение

Изучению вопросов инструментального исследования элементов строительных конструкций посвящено значительное количество отечественных и зарубежных научных

© Локтионов А.П., 2022

исследований, в том числе при обследовании строительных конструкций [1-6]. В аналитическо-экспериментальной обратной задаче Коши для определения коэффициентов многочлена – уравнения прогибов балки, начальных условий и внешней нагрузки на балку выполнены исследования по восстановлению непосредственно не измеряемых коэффициентов уравнения упругой линии балки, по влиянию объема и точности обрабатываемых экспериментальных данных на точность результатов обратной задачи [1, 7-9]. Известны исследования, например [10-13], по учету влияния податливости опор, стыков на опорные моменты элементов конструкций. В последние годы в связи с развитием информационных технологий все больше инструментальных исследований стало выполняться с оценкой конструкций параметрами идентификации на моделях измерения и вычислений, реализуемых информационно-измерительной системой (ИИС) [2, 14-16]. Известны исследования по частным проблемам аналитическо-экспериментальным обратным задачам, в которых даны предложения по решению коэффициентных обратных задач, регуляризации обратных задач, по разработкам показателей качества обработки данных и алгоритмов [9, 14, 15, 17, 18-22], применения полиномиальной аппроксимации и линейной лагранжевой интерполяции [18, 20, 23-27], решения на измерительном компакте, сеточного метода решения некорректной обратной задачи численного дифференцирования, оценки погрешности интерполяции функциями и константами Лебега, [7, 20, 24, 28-32]. Опираясь на отмеченные результаты исследований последних лет необходимо продолжить исследования регуляризации обратной задачи Коши при частично заданных начальных параметрах, в частности, осадки опоры балки и (или) наклона упругой линии в опорном поперечном сечении балки. Эти коэффициентные обратные задачи с фиксированными младшими коэффициентами основного уравнения с алгебраическим многочленом n -ой степени родственны первой и второй задачам Е. И. Золотарёва, в которых исследованы многочлены с фиксированными старшими коэффициентами [33]. В связи с этим целью рассматриваемой работы явилось решение задачи определения коэффициентов уравнения прогибов балки с фиксированным младшим коэффициентом, например, при шарнирном опирании балки на колонну построение показателя качества

Модели и методы

Подходы к построению моделей измерения и вычислений. Определение значений коэффициентов уравнения прогибов балки, начальных параметров и внешней нагрузки при решении коэффициентной обратной задачи Коши рассматриваем на примере консольной балки постоянного сечения ($EI = \text{const}$) длиной l (см. рисунок 1).

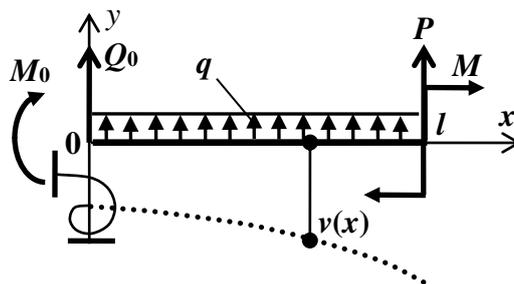


Рисунок 1 – Балка под нагрузкой

В обратной задаче Коши по теории Эйлера – Бернулли поперечного изгиба балки на отрезке $[0, l]$ восстанавливаем значения r -производных

$$d_{n,r} = v_n^{(r)}(0), \quad r \in (1, 2, \dots, n), \quad (1)$$

алгебраического многочлена с вещественными коэффициентами – уравнения прогибов балки

$$v_n(x) = d_{n,0} + d_{n,1}x + d_{n,2} \frac{x^2}{2} + \dots + d_{n,n} \frac{x^n}{n!}, \quad d_{n,n} \neq 0, \quad (2)$$

где n - порядок дифференциального уравнения (1) и степень уравнения (2);

$d_{n,r} = v_n^{(r)}(0)$ - коэффициенты многочлена, связанные с начальными параметрами упругой линии балки $v_n(0), v_n'(0), M_0, Q_0$;

$d_{n,0} = v_n(0)$ - младший фиксированный коэффициент многочлена;

$d_{n,1} = v_n'(0)$ - наклон упругой линии в опорном поперечном сечении балки;

$d_{n,2} = v_n''(0) = M_0/(EI)$;

$d_{n,3} = v_n'''(0) = Q_0/(EI)$;

$d_{n,4} = v_n^{(IV)}(0) = q/(EI)$;

M_0, Q_0 – опорные реакции.

Для определенности принимаем, что нагрузка на балку может быть единичной изгибающим моментом M при $n = 2$, или комбинированной: изгибающим моментом M и сосредоточенной нагрузкой P при $n = 3$, сосредоточенной нагрузкой P и постоянной распределенной нагрузкой интенсивностью q или изгибающим моментом M , сосредоточенной нагрузкой P и нагрузкой q при $n = 4$.

При интерполяционном приближении многочлена (2) в вычислениях помимо погрешности приближенной замены многочлена интерполяционным многочленом есть погрешность измеренных в физическом эксперименте (или заданных таблично) входных данных. Определяем измерительный участок компактом $[0, l]$ на прямой Ox (см. рисунок 1) и задаем множество узлов $\Omega_n \subset [0, l]$ – сетку узлов аппроксимации

$$0 \leq x_1 < x_2 < \dots < x_N \leq l, \quad (3)$$

где N - количество дискретных значений $v^*(x_i)$ измеренных средством измерений (СИ) значений функции $v_n(x_i)$ ($i = 1: N, N = n$); i - номер узла.

Множество измеренных в эксперименте $N = n$ значений $\{v^*(x_i)\}$ в узлах x_i сетки аппроксимации образует пространство наблюдений – конечномерное $v(x_i)$ координатное евклидово пространство отсчетов на сетке (3). Значения функций $v(x_i)$ и $v^*(x_i)$ – это входные величины в модели измерений и вычислений; значения начальных параметров балки $d_{n,0}, d_{n,1}, M_0, P_0$ и коэффициента $d_{n,n}$ – выходные величины в модели измерения и вычислений.

Каждое из входных данных $v^*(x_i)$ содержит погрешность измеренных в физическом эксперименте значений $v(x_i)$ в виде

$$R(v_i) = v^*(x_i) - v_n(x_i). \quad (4)$$

Для значений $v^*(x_i)$ используем равномерную непрерывную норму погрешности с верхней границей абсолютной погрешности СИ

$$\Delta_{\max}[v(x_i)] = \varepsilon_p v_p \geq \Delta[v(x_i)] = |R[v(x_i)]|, \quad (5)$$

где ε_p - приведенная абсолютная погрешность средства измерений (датчиков);

v_p - предел измерений СИ;

$\Delta[v(x_i)]$ - абсолютная погрешность СИ.

Задаем на отрезке $[0, l]$ аппроксимируемую функцию

$$g_n(x) = v_n(x) - d_{n,0},$$

Параметрами идентификации, характеризующими балку, используем прогибы, коэффициенты уравнения прогибов и начальные параметры, в том числе опорные смещения.

Вводим в соответствие нагрузке на балку и параметрам идентификации функции пространства состояний параметров идентификации в моделях измерения и вычислений m_s , где s – номер модели. Модели отличаются различными сочетаниями видов внешней нагрузки. Исследуем типовые модели $m_1 = d_{2,1}M$, $m_2 = d_{3,1}MP$, $m_3 = d_{4,1}MPq$ и $m_4 = d_{4,1}Pq$, в обозначениях которых последовательно указываем подлежащие определению параметр $d_{n,1}$ и действующие виды нагрузки M , P , q . Порядок дифференциального уравнения (1) n связываем с номером типовой модели s соотношением

$$n = \begin{cases} s + 1 & \text{при } s \in (1, 2, 3) \\ 4 & \text{при } s = 4 \end{cases}$$

В моделях измерения и вычислений решаем обратную задачу Коши для уравнения (2) в общем случае при ненулевых начальных условиях. Реализация моделей измерения и вычислений в ИИС аппаратно распределена по СИ и информационной вычислительной системе. Для вычисления целевых характеристик $d_{n,r}$ с учетом погрешности входных данных используем одномерное лагранжево приближение первой степени

$$d_{n,r} \approx \sum_{i=1}^n l_{n,r,i}(0) g_n^*(x_i), \quad g_n^*(x_i) = v^*(x_i) - d_{n,0}, \quad r \in (1, 2, \dots, n) \quad (6)$$

где $l_{n,r,i}(0)$ – лагранжевы коэффициенты, которые предварительно вычисляем методом неопределенных коэффициентов или численным дифференцированием функции (2). По этой методике на основе теории обратных задач в аналитическо-экспериментальной обратной задаче Коши решаем задачу определения коэффициентов уравнения прогибов балки с фиксированным младшим коэффициентом.

Вычисление лагранжевых коэффициентов методом неопределенных коэффициентов. В методе неопределенных коэффициентов решением системы уравнений

$$\sum_{i=1}^n l_{n,r,i}(0) x_i^j = \begin{cases} 0 & \text{при } j \neq r \\ r! & \text{при } j = r \end{cases}, \quad j = 1:n, \quad r \in (1, 2, \dots, n) \quad (7)$$

получаем формулы лагранжевых коэффициентов для последующего вычисления целевой характеристики $d_{n,r}$ по (6).

Вычисление лагранжевых коэффициентов дифференцированием интерполяционной формулы Лагранжа. Рассматриваем дифференцирование функции (2) с лагранжевой одномерной аппроксимацией первой степени. Вводим в рассмотрение на отрезке $[0, l]$ аппроксимируемую функцию

$$\varphi_{n-1}(x) = \frac{g_n(x)}{x}, \quad (8)$$

для аппроксимации которой с учетом погрешности входных данных применяем лагранжево приближение

$$L_{n-1}(x) = \sum_{i=1}^n l_{n-1,i}(x) \frac{g_n^*(x_i)}{x_i}, \quad (9)$$

где $l_{n-1,i}(x)$ – лагранжевы коэффициенты:

$$l_{n-1,i}(x) = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n \frac{(x - x_k)}{(x_i - x_k)}$$

Тогда с учетом выражений (8) и (9) получаем интерполяционную формулу Лагранжа в виде (10):

$$v_n(x) \approx d_{n,0} + x \sum_{i=1}^n l_{n-1,i}(x) \frac{g_n^*(x_i)}{x_i}. \quad (10)$$

Для вывода формул численного дифференцирования функции $v(x)$ полагаем на отрезке $[0, l]$

$$v'_n(x) \approx \left[d_{n,0} + x \sum_{i=1}^n l_{n-1,i}(x) \frac{g_n^*(x_i)}{x_i} \right]'$$

Аналогично поступаем при нахождении производных высших порядков, получаем формулу вычисления r -производных функции $v(x)$:

$$v_n^{(r)}(x) \approx \sum_{i=1}^n \left[\frac{r}{x_i} l_{n-1,i}^{(r-1)}(x) + \frac{x}{x_i} l_{n-1,i}^{(r)}(x) \right] g_n^*(x_i), \quad r \in (1, 2, \dots, n)$$

и формулы вычисления в выражениях (5) лагранжевых коэффициентов

$$l_{n,r,i}(0) \approx \left. \frac{r}{x_i} l_{n-1,i}^{(r-1)}(x) \right|_{x=0}, \quad r \in (1, 2, \dots, n). \quad (11)$$

Показатель качества определения коэффициентов $d_{n,r}$ многочлена (2) и начальных параметров балки. Ставим задачу оценивания погрешности результатов определения параметров идентификации балки. В силу формул (4) и (6) вычисленные значения коэффициентов $d_{n,r}$ содержат погрешность. Если при линейном преобразовании измеряемых входных данных $v(x_i)$ с равномерной непрерывной нормой абсолютной погрешности известна верхняя граница абсолютной погрешности (5), то для верхней границы абсолютной погрешности параметра $d_{n,r}$ – числа

$$\Delta_{\max} [d_{n,r}] = \max \left| \sum_{i=1}^n l_{n,r,i}(0) g_n^*(x_i) - d_{n,r} \right|$$

справедлива оценка

$$\Delta_{\max} [d_{n,r}] = \Lambda_{n,r} \Delta_{\max} [v(x_i)]$$

$$\Lambda_{n,r} = \max \sum_{i=1}^n |l_{n,r,i}(0)|$$

Здесь – константа Лебега.

Абсолютным числом обусловленности задачи $\alpha_{s,r}(0)$ связываем верхние границы абсолютной погрешности датчиков $\Delta_{\max} [v(x_i)]$ и решения вычислительной задачи $\Delta_{\max} [d_{n,r}]$ неравенством

$$\Delta_{\max} [d_{n,r}] \leq \alpha_{s,r}(0) \Delta_{\max} [v(x_i)]$$

Для реальной погрешности решения задачи (6), которая заведомо меньше, чем приведенная выше оценка константой Лебега, на отрезке $[0, l]$ справедлива оценка абсолютным числом обусловленности

$$\alpha_{s,r}(0) = \sum_{i=1}^n |l_{n,r,i}(0)|, \quad (12)$$

позволяющим оценить влияние погрешности СИ и распределения узлов сетки аппроксимации на точность вычисления целевых характеристик $d_{n,r}$.

Мерой влияния приведенной погрешности СИ и неоптимального распределения узлов сетки аппроксимации на абсолютную погрешность определения коэффициентов $d_{n,r}$ и начальных параметров балки используем безразмерное абсолютное число обусловленности задачи

$$A_{s,r} = l^r \alpha_{s,r}(0)$$

Для получения минимального числа обусловленности

$$A_{s,r,\min} = \min A_{s,r}$$

параметром регуляризации исследуемой обратной задачи используем распределение узлов сетки аппроксимации во множестве Ω_n , а показателем качества задачи показатель

$$\pi_{s,r} = 1/A_{s,r,\min} \tag{13}$$

Значение показателя (13) вычисляем по результату минимизации функции (12) нескольких аргументов – координат узлов аппроксимации во множестве $\Omega_n = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ с учетом выражения лагранжевых коэффициентов. Минимизацию получаем прямым аналитическим методом поиска безусловного экстремума (минимума) или численными методами.

Результаты исследования и их анализ

Лагранжевы коэффициенты $l_{2,2,i}(0)$ целевой характеристики $d_{2,2}$ в модели измерения и вычислений m_1 получаем методом неопределенных коэффициентов с использованием уравнения (2) порядка $n = 2$ и решением системы уравнений (7) или уравнения (11) в методе дифференцирования интерполяционной формулы при $n = 2, r = 2$; для задачи (6) по формуле (12) получаем абсолютное число обусловленности $\alpha_{1,2}(0)$. Эти же методы используем в моделях измерения и вычислений m_2 и m_3 для получения лагранжевых коэффициентов $l_{3,2,i}(0), l_{4,2,i}(0)$ и абсолютных чисел обусловленности $\alpha_{2,2}(0), \alpha_{3,2}(0)$ при $n = 3, n = 4$ (см. таблицу 1).

Таблица 1 – Лагранжевы коэффициенты $l_{n,2,i}(0)$ и абсолютные числа обусловленности $\alpha_{n,2}(0)$

s	i	Лагранжевы коэффициенты	Абсолютные числа обусловленности задачи
1	1	$\frac{2}{x_1(x_1 - x_2)}$	$\frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2 (x_2 - x_1)}$
	2	$\frac{2}{x_2(x_2 - x_1)}$	
2	1	$-2 \frac{x_2 + x_3}{x_1(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)}$	$2(x_2 + x_3) \frac{x_1(x_1 + x_3) + x_2(x_3 - x_2)}{x_1 x_2 x_3 (x_2 - x_1)(x_3 - x_2)}$
	2	$-2 \frac{x_1 + x_3}{x_2(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)}$	
	3	$-2 \frac{x_1 + x_2}{x_3(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}$	
3	1	$\frac{2(x_2 x_3 + x_2 x_4 + x_3 x_4)}{x_1(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4)}$	$\sum_{i=1}^4 l_{4,2,i}(0) $
	2	$\frac{2(x_1 x_3 + x_1 x_4 + x_3 x_4)}{x_2(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4)}$	
	3	$\frac{2(x_1 x_2 + x_1 x_4 + x_2 x_4)}{x_3(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)(x_3 - x_4)}$	
	4	$\frac{2(x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3)}{x_4(x_4 - x_1)(x_4 - x_2)(x_4 - x_3)}$	

Алгоритм получения лагранжевых коэффициентов методом неопределенных коэффициентов в сравнении с методом дифференцирования интерполяционной формулы имеет недостатки. При выводе формул лагранжевых коэффициентов нескольких целевых характеристик для каждой характеристики решается своя система уравнений (7). Громоздкость вывода формул быстро растет с увеличением степени многочлена $v_n(x)$, особенно для малых значений r , что заметно уже при $n = 4$ и $r = 3$.

В процессе получения показателя (13) минимизированием функции (12) определяем оптимальные координаты узлов сетки аппроксимации, в частности, безразмерные координаты $x_{n,i,m,l} = lx_{n,i,m}$ (см. таблицу 2).

Таблица 2 – Оптимальные координаты узлов сетки аппроксимации $x_{n,i,m,l}$ при $x_{n,n,m,l} = 1,000$

Модели	m_1		m_2		m_3			m_4	
	i	1	1	2	1	2	3	1	2
Формулы координат в радикалах		$-1 + \sqrt{2}$	$-5 + 3\sqrt{3}$	$-1 + \sqrt{3}$	-	-	-	-	-
Численные значения координат		0,4142	0,1962	0,7321	0,1127	0,4802	0,8478	0,1642	0,6745

С увеличением n и r функцию (12) все сложнее преобразовать в уравнение степени, менее пятой. По теореме Абеля о неразрешимости уравнений в радикалах для уравнений пятой и более высоких степеней явных формул для корней не существует. Решения таких уравнений можно получить с любой желаемой точностью, используя численные методы.

С учетом лагранжевых коэффициентов для $d_{4,2}$ абсолютное число обусловленности $\alpha_{4,2}(0)$ имеет вид дроби, числитель которой – функция восьмой степени, а знаменатель десятой степени. При минимизировании этой дроби в силу сложности аналитического вывода частных производных безразмерные оптимальные координаты $x_{4,i,m,l} = lx_{4,i,m}$ узлов сетки аппроксимации получаем численным способом. Отклонение координат узлов сетки аппроксимации от оптимальных координат увеличивает абсолютное число обусловленности $A_{s,r} = f(x_{nd})$, где $x_{nd} = x_i/l$, $x_i = x_{n,i,m}$ (см. рисунки 2 и 3). Из графиков рисунков 1 и 2 видно, что у моделей m_2 и m_3 отклонение каждой из координат до половины текущего шага сетки при оптимальных остальных координат в полтора раза увеличивает погрешность определения параметра d_2 .

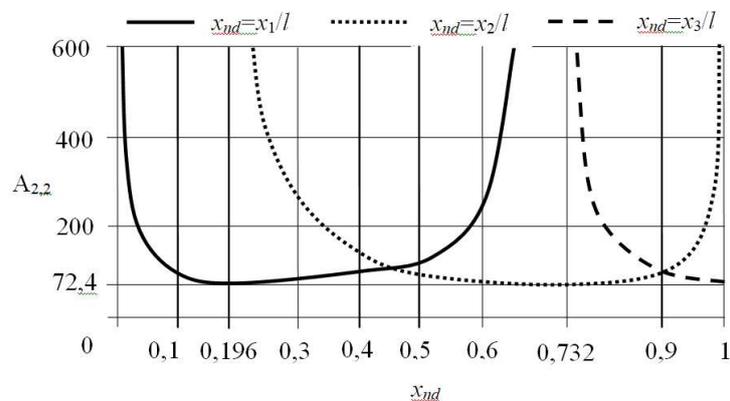


Рисунок 2 – Абсолютное число обусловленности $A_{2,2}$

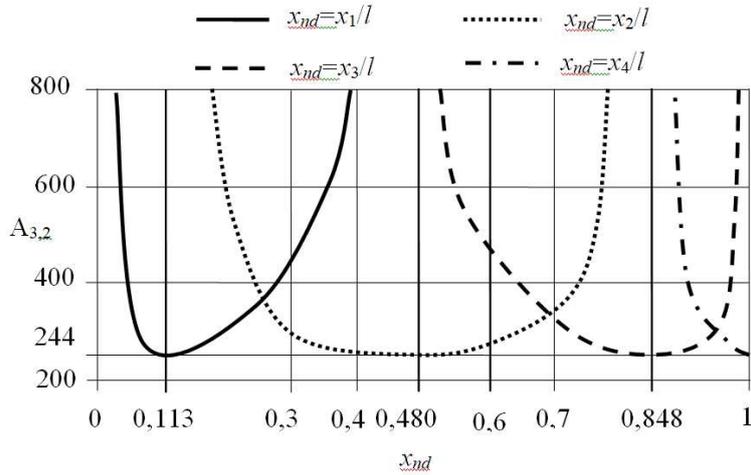


Рисунок 3 – Абсолютное число обусловленности $A_{3,2}$

При известной фиксированной осадке опоры балки в рассмотренных моделях измерения и вычислений получено уменьшение значения безразмерного абсолютного числа обусловленности задачи с $N = n$ в сравнении с исследованным в работе [24] условием $N = n + 1$ в два раза (см. рисунок 4). Соответственно, двукратное увеличение показателя качества и снижение погрешности определения выходных величин в модели измерения и вычислений с $N = n$ связано с уменьшением числа узлов аппроксимации. Численные значения числа обусловленности и показателя качества получены на примерах вариантов нагружения балки при уравнении прогибов второй, третьей и четвертой степени. На рисунке 4 показаны выборки 1 и 2 полученной генеральной совокупности множества элементов $A_{s,2,min}$. Общие признаки выборки 1 для моделей m_1, m_2, m_3 : определению подлежат все коэффициенты уравнения прогибов балки, $N = n + 1$, множество узлов сетки аппроксимации $\Omega_{n+1} \subset [0,05l, 0,95l]$ [24]. Общие признаки выборки 2 для моделей m_1, m_2, m_3 : определению подлежат коэффициенты уравнения прогибов балки кроме известного фиксированного коэффициента $d_{n,0}$, $N = n$, множество узлов сетки аппроксимации $\Omega_n \subset [0, l]$ (2). Разнообразие элементов $A_{s,2,min}$ в выборках характеризуем экстремальными крайними значениями 11,7 и 506, размахом 492. Для этих обратных задач значения показателя качества находятся в диапазоне от 2×10^{-3} до 1×10^{-1} , показатель качества снижается с ростом степени уравнения (2). Значение показателя качества выборки 1 при $N = n + 1$ находится в диапазоне от 2×10^{-3} до 5×10^{-2} , значение показателя качества выборки 2 при $N = n$ находится в диапазоне от 4×10^{-3} до 1×10^{-1} .

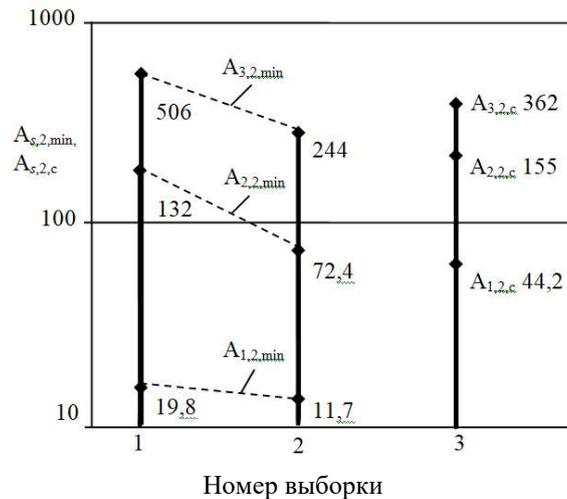


Рисунок 4 – Сопоставление абсолютных чисел обусловленности задачи

В дополнение к представленной на рисунках 2 и 3 оценке вариантов неоптимальных сеток аппроксимации получена оценка равномерной сетки (выборка 3 на рисунке 4). Выявлено преимущество оптимальной сетки, соотношение между абсолютными числами обусловленности $A_{s,2,c}$ при равномерной сетке аппроксимации (выборка 3) и числами $A_{s,2,min}$ (выборка 2) составляет полтора-четыре раза. Признаки выборки 3 совпадают с признаками выборки 2, но именно на равномерной сетке аппроксимации.

Построенные графики числа обусловленности и показателя качества позволили оценить результат решения задачи с учетом изменения количества и распределения прогибов по измерительному участку. Разработанный метод оптимизации интерполяционной сетки снижает влияние погрешности входных данных на точность определения коэффициентов уравнения прогибов балки с фиксированным младшим коэффициентом в обратной задаче Коши.

Экспериментально проверены разработанные математические модели измерения и вычислений m_3 и m_4 при определении коэффициента $d_{4,2}$ уравнения прогибов балки с фиксированным младшим коэффициентом в обратной задаче Коши. Выполнен натурный эксперимент по методике [9] на физической модели балки, нагруженной равномерной нагрузкой $q = 30,90$ Н/м от собственного веса и сосредоточенной нагрузкой $P = -26,00$ Н на свободном конце. Физическая модель балки – стальная консольная балка; длина $l = 1,20$ м; модуль упругости $E = 201,0$ ГПа; поперечное сечение в виде прямоугольника (высота 0,0400 м, ширина 0,0100 м). Фиксированная осадка опоры балки $d_{3,0} = -2 \cdot 10^{-6}$ м. В СИ использованы четыре прогибомера в модели m_3 и три в модели m_4 . Класс точности прогибомеров 0. Предел измерений прогибомеров 2 мм. Цена деления прогибомеров 0,002 мм.

Натурные эксперименты на примерах определения коэффициента $d_{4,2}$ уравнения прогибов балки с фиксированным младшим коэффициентом подтвердили уменьшение точности моделей измерения и вычислений с увеличением количества измеряемых прогибов (см. таблицы 3-5). Погрешность модели m_3 в пять раз превосходит погрешность модели m_4 .

Таблица 3 – Параметры прогибов в модели m_3

Номер узла сетки i	1	2	3	4
Координаты узлов сетки аппроксимации, м	0,136	0,576	1,018	1,200
Расчетные значения $v_4(x_i)$, м	$-2,238 \times 10^{-5}$	$-5,670 \times 10^{-4}$	$-1,5058 \times 10^{-3}$	$-1,9422 \times 10^{-3}$
Экспериментальные значения $v^*(x_i)$, м	$-2,1 \times 10^{-5}$	$-5,62 \times 10^{-4}$	$-1,510 \times 10^{-3}$	$-1,940 \times 10^{-3}$
Погрешность $R(v_i)$, м	$1,4 \times 10^{-6}$	$5,0 \times 10^{-6}$	$-4,2 \times 10^{-6}$	$2,0 \times 10^{-6}$

Таблица 4 – Параметры прогибов в модели m_4

Номер узла сетки i	1	2	3
Координаты узлов сетки аппроксимации, м	0,184	0,772	1,200
Расчетные значения $v_4(x_i)$, м	$-4,909 \cdot 10^{-5}$	$-9,473 \cdot 10^{-4}$	$-1,9422 \cdot 10^{-3}$
Экспериментальные значения $v^*(x_i)$, м	$-5,119 \cdot 10^{-5}$	$-9,520 \cdot 10^{-4}$	$-1,940 \cdot 10^{-3}$
Погрешность $R(v_i)$, м	$-2,1 \cdot 10^{-6}$	$-4,7 \cdot 10^{-6}$	$2,0 \cdot 10^{-6}$

Таблица 5 – Параметры коэффициента $d_{4,2}$ в моделях

Модели	Расчетное значение $d_{4,2}$, м ⁻¹	Экспериментальное значение $d_{4,2}$, м ⁻¹	Погрешность $R(d_{4,2})$, м ⁻¹	Погрешность $\delta(d_{4,2})$, %
m_3	$-4,986 \times 10^{-3}$	$-5,197 \times 10^{-3}$	$-21,1 \cdot 10^{-5}$	4,2
m_4	$-4,986 \times 10^{-3}$	$-5,024 \times 10^{-3}$	$-3,8 \cdot 10^{-5}$	0,8

Выводы

На основе теории обратных задач в аналитическо-экспериментальной обратной задаче Коши решена задача определения коэффициентов уравнения прогибов балки с фиксированным младшим коэффициентом. При равномерной непрерывной норме погрешности измерения прогибов балки построены безразмерное абсолютное число обусловленности и показатель качества задачи. Численные значения числа обусловленности и показателя качества получены на примерах вариантов нагружения балки при уравнении прогибов второй, третьей и четвертой степени. Построенные графики числа обусловленности и показателя качества позволили оценить результат решения задачи с учетом изменения количества и распределения прогибов по измерительному участку.

Представляемый подход к определению коэффициентов уравнения прогибов балки можно рекомендовать к использованию для анализа строительных конструкций на стадии экспериментально-теоретических исследований.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Перельмутер А.В. Обратные задачи строительной механики // Вестник Томского государственного архитектурно-строительного университета. 2020. №22(4). С. 83-101. doi: 10.31675/1607-1859-2020-22-4-83-101.
2. Кашеварова Г.Г., Тонков Ю.Л., Тонков И.Л. Интеллектуальная автоматизация инженерного обследования строительных объектов // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. 2017. Vol. 13(3). Pp. 42–57. <https://doi.org/10.22337/1524-5845-2017-13-3-42-57>.
3. Shi Z., O'Brien W. Development and implementation of automated fault detection and diagnostics for building systems: A review // Automation in Construction. 2019. № 104. P. 215-229. doi: 10.1016/j.autcon.2019.04.002
4. Meshchikhin I.A., Gavryushin S.S. The envelope method in the problem of choosing a rational composition of measuring instruments // Measurement Techniques. 2021. № 64. P. 151-155. doi: <https://doi.org/10.1007/s11018-021-01910-8>.
5. Lehmus D., Busse M. Structural health monitoring (SHM). In: Bosse S., Lehmus D., Lang W. (eds). Material Integrated Intelligent Systems Technology and Applications: Technology and Applications. John Wiley & Sons Inc.; 2018. P. 529–570. 696 p. <https://doi.org/10.1002/9783527679249>.
6. Chen H-P., Ni Yi-Q. Structural health monitoring of large civil engineering structures. 111 River Street, Hoboken, NJ 07030, USA: John Wiley & Sons Inc., 2018. 302 p. doi:10.1002/9781119166641.
7. Бойков И.В., Кривулин Н.П. Приближённый метод восстановления входных сигналов измерительных преобразователей // Измерительная техника. 2021. № 12. С. 3-7. doi: 10.32446/0368-1025it.2021-12-3-7.
8. Building structural health monitoring using dense and sparse topology wireless sensor network / M.E. Haque, M.F.M. Zain, M.A. Hannan, M.H. Rahman // Smart Structures and Systems. 2015. Vol. 16(4). P. 607-621. <https://doi.org/10.12989 / sss.2015.16.4.623>.
9. Локтионов А. П. Информационная система анализа балочных элементов под комбинированной нагрузкой // Строительная механика и расчет сооружений. 2021. № 2. С. 45-52. doi: 10.37538/0039-2383.2021.2.45.52.
10. Tushina V.M. Semi-rigid steel beam-to-column connections // Magazine of Civil Engineering. 2017. Vol. 73(5). Pp. 25-39. <https://doi.org/10.18720/MCE.73.3>.
11. Tushina O.A., Danilov A.I. The stiffness of rigid joints of beam with hollow section column // Magazine of Civil Engineering. 2016. Vol. 64(4). Pp. 40–51. <https://doi.org/10.5862/MCE.64.4>.
12. Люблинский В.А., Томина М.В. Экспериментальное исследование прочности и податливости вертикального сварного стыка // Системы. Методы. Технологии. 2018. №3 (39). С. 154-158. doi: 10.18324/2077-5415-2018-3-154-158.
13. Малахова А.Н., Маринина Д.А. Податливость вертикальных стыков крупнопанельных зданий на закладных деталях // Строительство и реконструкция. 2019. №6 (86). С.10-18. doi: 10.33979/2073-7416-2019-86-6-10-18.
14. Siraya T.N. Methods of data processing in measurements and metrological models // Measurement Techniques. 2018. №61. P. 9-16. <https://doi.org/10.1007/s11018-018-1380-y>.
15. Smirnova A., Bakushinsky A. On iteratively regularized predictor-corrector algorithm for parameter identification // [Inverse Problems](https://doi.org/10.1088/1361-6420/abc530). 2020. Vol. 36. No. 12. id.125015. P. 30. doi: [10.1088/1361-6420/abc530](https://doi.org/10.1088/1361-6420/abc530).
16. Danilov M.F., Savel'eva A.A. Analysis of basic data of unstable problems of coordinate measurements of geometrical parameters of products // Measurement Techniques. 2018. Vol. 61(6). P. 588-594. doi:10.1007/s11018-018-1469-3.

17. Балакин Д.А., Пытьев Ю.П. Редукция измерения при наличии субъективной информации // Математическое моделирование и численные методы. 2018. Т. 30. № 12. С. 84–110. doi:[10.31857/S023408790001938-5](https://doi.org/10.31857/S023408790001938-5).
18. Chekushkin V.V., Mikheev K.V. Fast search algorithms for the best approximation polynomials for reproduction of functional dependences in data-measurement systems // Measurement Techniques. 2016. Vol. 59(4). P. 351-356. <https://doi.org/10.1007/s11018-016-0970-9>.
19. Мещихин И.А., Гаврюшин С.С. Критерии качества и алгоритм выбора редуцированных моделей для мониторинга технических конструкций // Математическое моделирование и численные методы. 2016. Т. 12. № 4. С. 103-121. <https://doi.org/10.18698/2309-3684-2016-4-103121>.
20. Verbrugge M.W., Wampler C.W., Baker D.R. Smoothing methods for numerical differentiation to identify electrochemical reactions from open-circuit-potential data // Journal of The Electrochemical Society. 2018. Vol. 165 No. 16. P. A4000-A4011. <https://doi.org/10.1149/2.0951816.jes>.
21. Вагульян А.О., Плотников Д.К. Обратные коэффициентные задачи в механике // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2019. № 3. С. 37-47. doi: 10.15593/perm.mech/2019.3.0.
22. Denisov A. M. Iterative Method for Solving an Inverse Coefficient Problem for a Hyperbolic Equation // Differential Equations. 2017. Vol. 53. No. 7. Pp. 916–922. doi:[10.1134/S0012266117070084](https://doi.org/10.1134/S0012266117070084).
23. Loktionov A.P. A measuring system for determination of a cantilever beam support moment // Smart Structures Systems. 2017. No. 4. Pp. 431-439. doi: 10.12989 / sss.2017.19.4.431.
24. Loktionov A.P. Numerical differentiation in the measurement model // Measurement Techniques. 2019. No. 62. Pp. 673-680. <https://doi.org/10.1007/s11018-019-01677-z>.
25. Кудрявцев К.Я. Алгоритм построения полинома наилучшего равномерного приближения по экспериментальным данным // Вестник национального исследовательского ядерного университета МИФИ. 2019. Т. 8(5). С. 480-486. <https://doi.org/10.1134/S2304487X1905002X>.
26. Kalenchuk-Porkhanova A. Best Chebyshev approximation for compression of big information arrays // Proceedings of the 10th International Scientific and Practical Conference named after A. I. Kitov "Information Technologies and Mathematical Methods in Economics and Management (IT&MM-2020)". October 15-16, 2020. Moscow, Russia. P. 1-13. URL: <http://sunsite.informatik.rwth-aachen.de/ftp/pub/publications/CEUR-WS/Vol-2830.zip.paper25.pdf>. (дата обращения 20.03.2022).
27. Калиткин Н.Н., Колганов С.А. Построение аппроксимаций, удовлетворяющих чебышевскому альтернансу. Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша, 2020. № 91. 33 с. <https://doi.org/10.20948/prepr-2020-91>.
28. Локтионов А.П. О численном дифференцировании при полиномиальном приближении Курск. Гос. техн. ун-т. Курск, 1999. 28 с. Деп. в ВИНТИ 28.06.99, № 2080-B99. <https://elibrary.ru/item.asp?id=24302755>.
29. Локтионов А.П., Максимов Ю.А., Титов В.С. О численном дифференцировании в обратной задаче Коши // Сварка и родственные технологии в машиностроении и Информатика, вычислительная техника и электронике: сборник научных тр. Вып. 4. Курск., 2002. С. 263-268. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=21788616>. (дата обращения: 20.03.2022).
30. Korytov M.S., Shcherbakov V.S., Shershneva E.O., Breus I.V. Approximation methods for the actual trajectory of load carried by overhead crane to the required one – a comparative analysis // Journal of the Serbian Society for Computational Mechanics. 2016. Vol. 10. No. 2. P. 45-56. URL: http://www.sscm.kg.ac.rs/jsscm/downloads/Vol10No2/Vol10No2_05.pdf. (дата обращения: 20.03.2022).
31. Ibrahimoglu B.A. Lebesgue functions and Lebesgue constants in polynomial interpolation // Journal of Inequalities and Applications. 2016. No. 93. P. 1-15. <https://doi.org/10.1186/s13660-016-1030-3>.
32. Yang C. Sensor placement for structural health monitoring using hybrid optimization algorithm based on sensor distribution index and FE grids // Structural Control and Health Monitoring. 2018. Vol. 5(6). <https://doi.org/10.1002/stc.2160>.
33. Золотарёв Е.И. Приложение эллиптических функций к вопросам о функциях, наименее и наиболее отклоняющихся от нуля // В кн.: Золотарёв Е.И. Полное собрание сочинений. Выпуск второй. Л.: Изд-во АН СССР, 1932. С. 1–59. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2020.101>.

REFERENCES

1. Perelmuter A.V. Obratnye zadachi stroitel'noi mekhaniki [Inverse problems of structural mechanics]. Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo arhitekturno-stroitel'nogo universiteta. 2020. Vol. 22. No. 4. Pp. 83-101. (rus). doi: [10.31675/1607-1859-2020-22-4-83-101](https://doi.org/10.31675/1607-1859-2020-22-4-83-101) (rus).
2. Kashevarova G.G., Tonkov, Y.L., Tonkov I.L. Intellektual'naya avtomatizatsiya inzhernogo obsledovaniya stroitel'nykh ob"ektov [Intellectual automation of engineering survey of building objects]. International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, 2017. Vol. 13. No. 3. Pp. 42-57. (rus). <https://doi.org/10.22337/1524-5845-2017-13-3-42-57> (rus).

3. Shi Z., O'Brien W. Development and implementation of automated fault detection and diagnostics for building systems: A review. *Automation in Construction*. 2019. No. 104. Pp. 215-229. doi: 10.1016/j.autcon.2019.04.002.
4. Meshchikhin I.A., Gavryushin S.S. The envelope method in the problem of choosing a rational composition of measuring instruments. *Measurement Techniques*. 2021, No. 64. Pp. 151-155. doi: <https://doi.org/10.1007/s11018-021-01910-8>.
5. Lehmhus D., Busse M., Structural Health Monitoring (SHM). In: Bosse S., Lehmhus D., Lang W. (eds). *Material Integrated Intelligent Systems Technology and Applications: Technology and Applications*. John Wiley & Sons Inc.; 2018. Pp. 529–570. 696 p. <https://doi.org/10.1002/9783527679249>.
6. Chen H-P., Ni Yi-Q. *Structural health monitoring of large civil engineering structures*. 111 River Street, Hoboken, NJ 07030, USA: John Wiley & Sons Inc., 2018. 302 p. doi:10.1002/9781119166641.
7. Boikov I.V., Krivulin N.P. Priblizhyonny`j metod vosstanovleniya vxođny`x signalov izmeritel`ny`x preobrazovatelej [On an approximate method for reconstructing input signals of measuring transformers]. *Izmeritel'naya tekhnika*. 2021. No. 12. Pp. 3-7. doi: 10.32446/0368-1025it.2021-12-3-7 (rus).
8. Haque M.E., Zain M.F.M., Hannan M.A., Rahman M.H. Building structural health monitoring using dense and sparse topology wireless sensor network. *Smart Structures and Systems*. 2015. Vol. 16. No. 4. Pp. 607-621. <https://doi.org/10.12989 / sss.2015.16.4.623>.
9. Loktionov A.P. Informacionnaya sistema analiza balochny`x e`lementov pod kombinirovannoju nagruzkou [Information system for analysis of beam elements under combined load]. *Structural Mechanics and Analysis of Constructions*. 2021. No. 2. Pp. 45-52. doi: 10.37538/0039-2383.2021.2.45.52 (rus).
10. Tushina V.M. Semi-rigid steel beam-to-column connections. *Magazine of Civil Engineering*. 2017. Vol. 73. No. 5. Pp. 25-39. <https://doi.org/10.18720/MCE.73.3>.
11. Tushina O.A., Danilov A.I. The stiffness of rigid joints of beam with hollow section column. *Magazine of Civil Engineering*. 2016. Vol. 64. No. 4. Pp. 40-51. <https://doi.org/10.5862/MCE.64.4>.
12. Lyublinskiy V.A., Tomina M.V. Eksperimental'noe issledovanie prochnosti i podatlivosti vertikal'nogo svarnogo styka [Experimental study of the strength and suppleness of a vertical welded joint]. *Sistemy. Metody. Tekhnologii*. 2018. Vol. 3. No. 39. Pp. 154-158. doi: 10.18324/2077-5415-2018-3-154-158 (rus).
13. Malakhova A.N., Marinina D.A. Podatlivost` vertikal'ny`x sty'kov krupnopanel'ny`x zdaniy na zakladny`x detal'nykh [The compliance of vertical joints of large-panel buildings made on embedded parts]. *Building and Reconstruction*. 2019. Vol. 86. No. 6. Pp. 10-18. doi: 10.33979/2073-7416-2019-86-6-10-18 (rus).
14. Siraya T. N. Methods of data processing in measurements and metrological models. *Measurement Techniques*. 2018. No. 61. Pp. 9-16. <https://doi.org/10.1007/s11018-018-1380-y>.
15. Smirnova A., Bakushinsky A. On iteratively regularized predictor-corrector algorithm for parameter identification. *Inverse Problems*. 2020. Vol. 36. No. 12. id.125015. P. 30. doi: [10.1088/1361-6420/abc530](https://doi.org/10.1088/1361-6420/abc530).
16. Danilov M.F., Savel'eva A.A. Analysis of basic data of unstable problems of coordinate measurements of geometrical parameters of products. *Measurement Techniques*. 2018. Vol. 61. No. 6. Pp. 588-594. doi:10.1007/s11018-018-1469-3.
17. Balakin D. A., Pyt'ev Yu. P. Redukciya izmereniya pri nalichii sub`ektivnoj informacii [Measurement reduction in the presence of subjective information]. *Matematicheskoe modelirovanie i chislenny`e metody`*. 2018. Vol. 30. No. 12. C. 84–110. doi: [10.31857/S023408790001938-52016](https://doi.org/10.31857/S023408790001938-52016).
18. Chekushkin V.V., Mikheev K.V. Fast search algorithms for the best approximation polynomials for reproduction of functional dependences in data-measurement systems. *Measurement Techniques*. 2016. Vol. 59. No. 4. Pp. 351-356. <https://doi.org/10.1007/s11018-016-0970-9>.
19. Meshchikhin I.A., Gavryushin S.S. Kriterii kachestva i algoritm vy`bora reducirovanny`x modelej dlya monitoringa tekhnicheskix konstrukcij [Quality criteria and algorithm for selecting reduced finite element models for technical design monitoring]. *Matematicheskoe modelirovanie i chislenny`e metody`*. 2016. Vol. 12. No. 4. Pp. 103-121. <https://doi.org/10.18698/2309-3684-2016-4-103121> (rus).
20. Verbrugge M.W., Wampler C.W., Baker D.R. Smoothing methods for numerical differentiation to identify electrochemical reactions from open-circuit-potential data. *Journal of The Electrochemical Society*. 2018. Vol. 165. No. 16. Pp. A4000-A4011. <https://doi.org/10.1149/2.0951816jes>.
21. Vatulyan A.O., Plotnikov D.K. Obratny`e koefficientny`e zadachi v mexanike [Inverse coefficient problems in mechanics]. *Vestnik Permskogo nacional'nogo issledovatel'skogo politexnicheskogo universiteta. Mexanika*. 2019. No. 3. Pp. 37-47. doi: 10.15593/perm.mech/2019.3.04.
22. Denisov A.M. Iterative Method for Solving an Inverse Coefficient Problem for a Hyperbolic Equation. *Differential Equations*. 2017. Vol. 53. No. 7. Pp. 916–922. doi: [10.1134/S0012266117070084](https://doi.org/10.1134/S0012266117070084).
23. Loktionov A.P. A measuring system for determination of a cantilever beam support moment. *Smart Structures Systems*. 2017. Vol. 19. No. 4. Pp. 431-439. <https://doi.org/10.12989 / sss.2017.19.4.431>.
24. Loktionov A.P. Numerical differentiation in the measurement model. *Measurement Techniques*. 2019. No. 62. Pp. 673-680. <https://doi.org/10.1007/s11018-019-01677-z>.
25. Kudryavcev K.Ya. Algoritm postroeniya polinoma nailuchshego ravnomernogo priblizheniya po eksperimental'nym dannym [Algorithm for constructing a polynomial of the best uniform approximation from

experimental data]. Vestnik nacional'nogo issledovatel'skogo yadernogo universiteta MIFI. 2019. Vol. 8. No. 5. Pp. 480-486. <https://doi.org/10.1134/S2304487X1905002X>.

26. Kalenchuk-Porkhanova A. Best Chebyshev approximation for compression of big information arrays. Proceedings of the 10th International Scientific and Practical Conference named after A. I. Kitov "Information Technologies and Mathematical Methods in Economics and Management (IT&MM-2020)". October 15-16. 2020. Moscow, Russia. Pp. 1-13. URL: <http://sunsite.informatik.rwth-aachen.de/ftp/pub/publications/CEUR-WS/Vol-2830.zip.paper25.pdf>. (accessed 20.03.2022).

27. Kalitkin N.N., Kolganov S.A. Postroenie approksimatsii, udovletvoryayushchikh chebyshevskomu al'ternansu, The construction of approximations satisfying the Chebyshev alternance Preprinty IPM im. M.V. Keldysha, 2020. № 91. 33 s. <https://doi.org/10.20948/prepr-2020-91> (rus).

28. Loktionov A.P. O chislennom differencirovanii pri polinomial'nom priblizhenii [On numerical differentiation under polynomial approximation]. Kursk. Gos. texn. un-t. Kursk., 1999. P. 28. Dep. v VINITI 28.06.99. № 2080-B99. <https://elibrary.ru/item.asp?id=24302755>. (rus)

29. Loktionov A. P., Maksimov Yu.A., Titov V.S. O chislennom differencirovanii v obratnoj zadache Koshi [Numerical differentiation in the inverse Cauchy problem]. Svarka i rodstvennyye tekhnologii v mashinostroyenii i elektronike. Sbornik nauchnykh tr. Is. 4. Kursk., 2002. Pp. 263-268. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=21788616>. (accessed 20.04.2021) (rus).

30. Korytov M.S., Shcherbakov V.S., Shershneva E.O., Breus I.V. Approximation methods for the actual trajectory of load carried by overhead crane to the required one – a comparative analysis. Journal of the Serbian Society for Computational Mechanics. 2016. Vol. 10. No. 2. Pp. 45-56. URL: http://www.sscm.kg.ac.rs/jsscm/downloads/Vol10No2/Vol10No2_05.pdf. (accessed 20.03.2022).

31. Ibrahimoglu B.A. Lebesgue functions and Lebesgue constants in polynomial interpolation. Journal of Inequalities and Applications. 2016. No. 93. Pp. 1-15. <https://doi.org/10.1186/s13660-016-1030-3>.

32. Yang C. Sensor placement for structural health monitoring using hybrid optimization algorithm based on sensor distribution index and FE grids. Structural Control and Health Monitoring. 2018. Vol. 5. No. 6. P. 2160. <https://doi.org/10.1002/stc.2160>.

33. Zolotarev E.I. Application of elliptic functions to questions of functions deviating least and most from zero, In: Collected works 2. 1–59 (Izdat. Akad. Nauk SSSR, Moscow, 1932). (rus). <https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2020.101>.

Информация об авторе:

Локтионов Аскольд Петрович

ФГБОУ ВО «Юго-Западный государственный университет», г. Курск, Россия,
доктор технических наук, доцент.

E-mail: loapa@mail.ru

Information about author:

Loktionov Askold P.

Southwest State University, Kursk, Russia,
doctor of Engineering, Associate Professor.

E-mail: loapa@mail.ru