

П.Д. ДЕМИНОВ¹

¹Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, г. Москва, Россия

ОЦЕНКА ВЕРОЯТНОСТИ ОБРАЗОВАНИЯ ЗАПРЕДЕЛЬНЫХ ПРОГИБОВ ПОСЛЕ ОБРАЗОВАНИЯ ТРЕЩИН В ЖЕЛЕЗОБЕТОННОЙ БАЛКЕ НА СТОХАСТИЧЕСКОМ ОСНОВАНИИ

Аннотация. Представлены результаты расчета железобетонной балки на упругом стохастически неоднородном основании после образования трещин в бетоне. Коэффициенты податливости основания рассматриваются как случайные стационарные функции, а нагрузка предполагается случайной нестационарной функцией координаты x . Прочностные параметры бетона принимаются случайными гауссовыми величинами. Приводятся параметры распределения, как начальной изгибной жесткости железобетонной балки, так и жесткости балки после образования трещин, как функции случайной кубиковой прочности бетона. Определяются параметры плотностей распределения прогибов балки до образования в ней трещин, а также после образования трещин. Для приближенного решения дифференциального уравнения изгиба железобетонной балки после образования трещин используется вариационный принцип стационарности дополнительной энергии (функционал Кастильяно). Это позволяет определить вероятностные характеристики распределения эквивалентной постоянной жесткости балки, вероятностные параметры распределения прогибов балки после образования трещин, а также суммарный дифференциальный закон распределения прогибов в балке на упругом основании в произвольном сечении балки. Определена вероятность возникновения предельного состояния в виде превышения величины предельной нормативной величины прогибов с учётом возможного образования трещин в балке.

Ключевые слова: железобетонная балка, упругое основание, вероятные значения, случайные характеристики, образование трещин, вероятность трещинообразования, вероятность предельных прогибов.

P.D. DEMINOV¹

¹National Research Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russia

EVALUATION OF THE PROBABILITY OF THE FORMATION OF ULTIMATE DEFLECTIONS IN A REINFORCED CONCRETE BEAM WITH CRACKS ON A STOCHASTIC BASE

Abstract. The results of calculating a reinforced concrete beam on an elastic statistically inhomogeneous foundation after the formation of cracks in concrete are presented. The compliance coefficients of the base are considered as random stationary functions, and the load is assumed to be a random non-stationary function of the x coordinate. Strength parameters of concrete are taken as random Gaussian values. The distribution parameters are given for both the initial bending stiffness of a reinforced concrete beam and the stiffness of the beam after cracking, as a function of the random cube strength of concrete. The parameters of the distribution densities of the deflections of the beam before the formation of cracks in it, as well as after the formation of cracks, are determined. For an approximate solution of the differential equation for the bending of a reinforced concrete beam after the formation of cracks, the variational principle of stationarity of additional energy (the Castigliano functional) is used. This makes it possible to determine the probabilistic characteristics of the distribution of the equivalent constant stiffness of the beam, the probabilistic parameters of the distribution of beam deflections after cracking, as well as the total differential law of the distribution of

deflections in a beam on an elastic foundation in an arbitrary section of the beam. The probability of occurrence of the limiting state in the form of exceeding the value of the deflections of the beam, the limiting standard value of the deflections, taking into account the possible formation of cracks in the beam, has been determined.

Keywords: reinforced concrete beam, elastic foundation, probable values, random characteristics, cracking, the probability of cracking, the probability of excessive deflections.

Введение

Вопросы, связанные с оценкой надежности конструкций в вероятностной постановке, имеют перспективу для дальнейшего изучения напряженно-деформированного состояния. В [1-3] и других работах показано влияние изменчивости контролируемых параметров, в частности жесткости сечения, на надежность железобетонных конструкций и их сопряжений.

В работе [4] были оценены вероятность разрушения и возникновения чрезмерных трещин в железобетонной балке, лежащей на упругом статистически неоднородном основании. Коэффициенты податливости основания как показано в [5] можно принять случайными стационарными функциями, а нагрузка предполагалась случайной нестационарной функцией координаты x . Прочность бетона принималась случайной гауссовой величиной. При этом предполагалось, что трещиностойкость балки обеспечена.

В работе [6] получены статистические характеристики для предельной поперечной силы в изгибаемом железобетонном элементе, а в работе [7] получена оценка вероятности разрушения по наклонному сечению от действия поперечной силы при изгибе, а также суммарной вероятности наступления предельных состояний железобетонной балки с вероятностными параметрами прочности, лежащей на упругом основании модели В.З. Власова-П.Л. Пастернака, обладающей стохастическими свойствами.

В случае если в железобетонной балке возникают трещины, и её изгибная жесткость становится переменной по длине, то уравнение изогнутой оси балки на упругом основании принимает вид [8]:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[B(x) \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \right] - C_2(x) \frac{d^2 w(x)}{dx^2} + C_1(x) w(x) = q(x). \quad (1)$$

Это уравнение не имеет замкнутого решения, поэтому уравнение (1) приходится решать приближенными методами. Например, вариационным методом Ритца [9], при нагружении балки регулярной системой случайных сосредоточенных сил P_j путем замены кусочно-постоянной жесткости на эквивалентную постоянную жесткость B_{equiv} , при которой прогиб балки в сечении под силой будет равен прогибу в этом сечении балки с кусочно-постоянной жесткостью (рисунок 1).

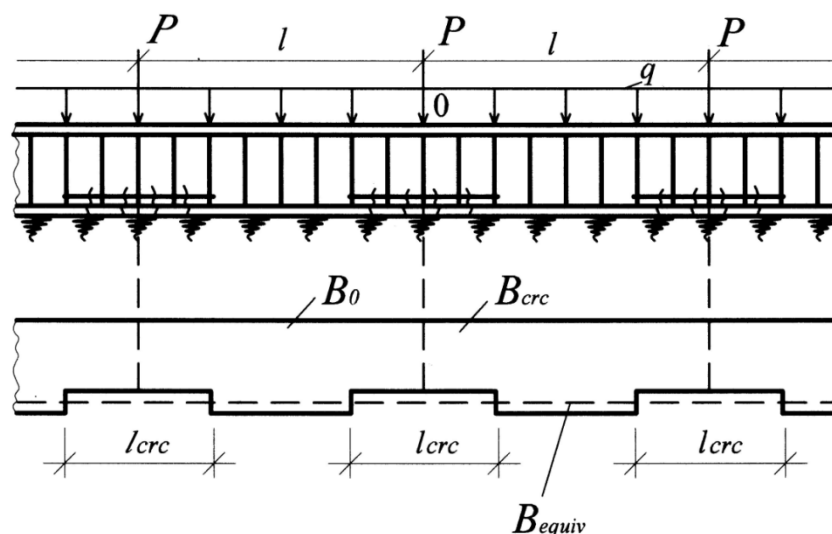


Рисунок 1 - К определению эквивалентной жесткости

Результаты и обсуждение

Математическое ожидание прогибов балки с постоянной начальной жесткостью $B_0(R)$ на упругом основании с двумя коэффициентами постели будет иметь вид аналогичный прогибам для подобной балки в детерминированной постановке [10]:

$$w[x, B_0(R)] \geq - \frac{1}{4B_0(R) \alpha \beta (\alpha^2 + \beta^2)} \cdot \sum_{j=0}^U \langle P_j \rangle e^{-\alpha(x-l_j)} [\beta \cos \beta(x-l_j) + \alpha \sin \beta(x-l_j)], \quad x \geq 0, \quad (2)$$

где $\alpha = \sqrt{\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\langle C_1 \rangle}{B_0(R)}} + \frac{\langle C_2 \rangle}{4B_0(R)}}$; $\beta = \sqrt{\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\langle C_1 \rangle}{B_0(R)}} - \frac{\langle C_2 \rangle}{4B_0(R)}}$.

А дисперсия прогибов (3) определяется выражением [11]:

$$D_w[x, B_0(R)] = 2 \langle w[x, B_0(R)] \rangle^2 \int_0^\infty \frac{S_{C_1}(\omega) d\omega}{|B_0(R)\omega^4 + \langle C_2 \rangle \omega^2 + \langle C_1 \rangle|^2} +$$

$$+ 2 \left\{ \frac{d^2 w[x, B_0(R)]}{dx^2} \right\}^2 \int_0^\infty \frac{S_{C_2}(\omega) d\omega}{|B_0(R)\omega^4 + \langle C_2 \rangle \omega^2 + \langle C_1 \rangle|^2} +$$

$$+ 2 \int_0^\infty \frac{S_q(\omega) d\omega}{|B_0(R)\omega^4 + \langle C_2 \rangle \omega^2 + \langle C_1 \rangle|^2}, \quad (3)$$

где $\langle C_1 \rangle$ и $\langle C_2 \rangle$ – математические ожидания коэффициентов постели;

$S_{C_1}(\omega)$, $S_{C_2}(\omega)$, $S_q(\omega)$ – спектральные плотности коэффициентов постели и нагрузки.

Из выражения (3) следует, что прогибы балки ещё до образования трещин являются нестационарной случайной функцией [12-14] даже в том случае, если свойства основания представлены стационарными случайными функциями.

Плотность распределения вероятности прогибов балки в произвольном сечении до образования трещин будем принимать нормальным, тогда она будет иметь вид:

$$p_w(x, w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D_w[x, B_0(R)]}} \exp \left\{ - \frac{(w - \langle w[x, B_0(x)] \rangle)^2}{2 D_w[x, B_0(R)]} \right\}. \quad (4)$$

В выражениях (2)-(4) начальная жесткость балки B_0 является функцией кубиковой прочности бетона:

$$B_0(R) = 0,85 I_{red}(R) E_b(R). \quad (5)$$

Приведенный момент инерции в (5), равный:

$$I_{red}(R) = I_b + \frac{E_s}{E_b(R)} I_s.$$

можно принять неслучайной величиной, вычисленной при $R = \langle R \rangle$.

Начальный модуль упругости бетона E_b будем полагать неслучайной функцией кубиковой прочности бетона проверенного практикой вида:

$$E_b(R) = 550\,000 R / (270 + R). \quad (6)$$

После линеаризации функции (6) в окрестности математического ожидания кубиковой прочности бетона $\langle R \rangle$ получаем вероятностные параметры распределения (математическое ожидание и дисперсию) начального модуля упругости бетона, полагая закон нормальным:

$$\langle E_b \rangle = \frac{550\,000 \langle R \rangle}{270 + \langle R \rangle}; \quad D_{E_b} = \left[\frac{550\,000 \cdot 270}{(270 + \langle R \rangle)^2} \right]^2 D_R. \quad (7)$$

Тогда вероятностные характеристики распределения начальной жесткости балки с учётом (7) равны (8):

$$\langle B_0(R) \rangle = 0,85 I_{red} \langle E_b \rangle; \quad D_{B_0} = (0,85 I_{red})^2 D_{E_b}. \quad (8)$$

Выражения для математического ожидания (2) и дисперсии (3) прогибов балки до образования трещин были получены для конкретной реализации случайной кубиковой прочности бетона R , с учётом же случайного характера прочности бетона математическое ожидание и дисперсия прогибов балки без трещин будут иметь вид:

$$\langle w_0(x) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \langle w[x, B_0(R)] \rangle p_R(R) dR; \quad (9)$$

$$D_{w_0}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} D_w[x, B_0(R)] p_R(R) dR, \quad (10)$$

где $p_R(R)$ – плотность вероятности кубиковой прочности бетона с математическим ожиданием $\langle R \rangle$ и дисперсией D_R .

Плотность распределения вероятности прогибов балки до образования трещин в произвольном сечении с учётом вероятностной природы прочности бетона и с учетом (9) и (10) будет иметь вид:

$$p_{w_0}(x, w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D_{w_0}(x)}} \exp \left\{ -\frac{(w - \langle w_0(x) \rangle)^2}{2 D_{w_0}(x)} \right\}. \quad (11)$$

После образования трещин жесткость балки на участках с трещинами при длительном действии нагрузки величина B_{crc} с достаточно высокой точностью определяется выражением (обозначения приняты по [15]):

$$B_{crc}(R) = A_s h_0^2 E_s \frac{1 - 0,5 \xi_{crc}}{0,9 + \frac{7 \mu_s n(R)}{6 \mu'_s n(R) + \xi_{crc}(R)}}. \quad (12)$$

При этом в относительную высоту сжатой зоны бетона в сечении с трещиной можно записать в виде:

$$\xi_{crc}(R) = \frac{10 \mu_s n(R)}{1,15 + 18 \mu_s n(R) + 6 \mu'_s n(R)}. \quad (13)$$

В выражениях (12) и (13) обозначено:

$$n(R) = \frac{E_s}{E_b(R)}; \quad \mu_s = \frac{A_s}{b h_0}; \quad \mu'_s = \frac{A'_s}{b h_0}.$$

Несмотря на сложный характер связи жесткости в сечении с трещиной $B_{crc}(R)$ с кубиковой прочностью бетона R в формуле (12), жесткость после образования трещин можно считать нормально распределенной случайной величиной с характеристиками, равными, которые определяются в соответствии с правилами действий с неслучайными функциями случайных величин [16]:

математическое ожидание

$$\langle B_{crc} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} B_{crc}(R) p_R(R) dR,$$

дисперсия

$$D_{B_{crc}} = \int_{-\infty}^{\infty} B_{crc}^2(R) p_R(R) dR - \langle B_{crc} \rangle^2.$$

Постоянная эквивалентная жесткость балки, полученная с использованием вариационного исчисления путём минимизации смешанного функционала второго вида Эрика Рейсснера [17] или из функционала Ху-Васицу [18], которые в нашем случае

трансформируется, как показано в [19] в функционал принципа стационарности дополнительной энергии (функционал Карло Кастильяно), является функцией начальной жесткости балки, жесткости балки на участках с трещинами, длины зон с трещинами, коэффициентов постели основания и нагрузки:

$$B_{equiv} = B_{equiv}[B_0(R), B_{crc}(R), l_{crc}(R_{bt}), C_1, C_2, P] = B_{equiv}(R, R_{bt}, C_1, C_2, P).$$

Тогда с учетом вероятностной природы входных параметров для математического ожидания эквивалентной жесткости будем иметь:

$$\begin{aligned} \langle B_{equiv} \rangle = & \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} B_{equiv}(C_1, C_2, R, R_{bt}, P) p_{C_1}(C_1) p_{C_2}(C_2) \cdot \\ & \cdot p_R(R) p_{R_{bt}}(R_{bt}) p_P(P) dC_1 dC_2 dR dR_{bt} dP, \end{aligned} \quad (14)$$

а для дисперсии эквивалентной жесткости получаем:

$$\begin{aligned} D_{B_{equiv}} = & \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} B_{equiv}^2(C_1, C_2, R, R_{bt}, P) p_{C_1}(C_1) p_{C_2}(C_2) \cdot \\ & \cdot p_R(R) p_{R_{bt}}(R_{bt}) p_P(P) dC_1 dC_2 dR dR_{bt} dP - \langle B_{equiv} \rangle^2. \end{aligned} \quad (15)$$

Распределение плотности вероятности эквивалентной жесткости фундаментной железобетонной балки с учётом (14) и (15) будет иметь нормальный вид (16):

$$p_{B_{equiv}}(B_{equiv}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D_{B_{equiv}}}} \exp \left[-\frac{(B_{equiv} - \langle B_{equiv} \rangle)^2}{2D_{B_{equiv}}} \right]. \quad (16)$$

Функция прогибов железобетонной балки на упругом основании после образования нормальных трещин при замене переменной кусочно-постоянной жесткости на постоянную эквивалентную жесткость будет иметь вид:

$$\begin{aligned} w_{crc}(x, B_{equiv}) = & -\frac{1}{4B_{equiv} \alpha \beta (\alpha^2 + \beta^2)} \cdot \\ & \cdot \sum_{j=0}^U P_j e^{-\alpha(x-l_j)} [\beta \cos \beta(x-l_j) + \alpha \sin \beta(x-l_j)], \quad x \geq 0, \\ \text{где } \alpha = & \sqrt{\frac{1}{2} \sqrt{\frac{C_1}{B_{equiv}}} + \frac{C_2}{4B_{equiv}}}; \quad \beta = \sqrt{\frac{1}{2} \sqrt{\frac{C_1}{B_{equiv}}} - \frac{C_2}{4B_{equiv}}}. \end{aligned}$$

Математическое ожидание прогибов балки с трещинами с учетом случайного характера коэффициентов постели, прочности бетона и нагрузки будет равно:

$$\begin{aligned} \langle w_{crc}(x) \rangle = & \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} w_{crc}(x, C_1, C_2, R, R_{bt}, P) p_{C_1}(C_1) p_{C_2}(C_2) \cdot \\ & \cdot p_R(R) p_{R_{bt}}(R_{bt}) p_P(P) dC_1 dC_2 dR dR_{bt} dP, \end{aligned} \quad (17)$$

а для дисперсии прогибов балки с трещинами получаем:

$$\begin{aligned} D_{w_{crc}}(x) = & \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} w_{crc}^2(x, C_1, C_2, R, R_{bt}, P) p_{C_1}(C_1) p_{C_2}(C_2) \cdot \\ & \cdot p_R(R) p_{R_{bt}}(R_{bt}) p_P(P) dC_1 dC_2 dR dR_{bt} dP - \langle w_{crc}(x) \rangle^2. \end{aligned} \quad (18)$$

Распределение плотности вероятности прогибов фундаментной железобетонной балки после образования трещин в произвольном сечении с учётом (17) и (18) будет иметь нормальный вид:

$$p_{w_{crc}}(x, w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D_{w_{crc}}(x)}} \exp \left\{ -\frac{[w - \langle w_{crc}(x) \rangle]^2}{2D_{w_{crc}}(x)} \right\}. \quad (19)$$

Вероятность образования трещин в балке на упругом основании произвольном сечении будет равна:

$$\mathbb{P}_{crc}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{R_{bt}}(R_{bt}) p_R(R) \int_{M_{crc}(R, R_{bt})}^{\infty} p_M(x, M, R) dM dR_{bt} dR, \quad (20)$$

здесь $p_M(x, M, R)$ – плотность вероятности изгибающих моментов в балке при некоторой конкретной реализации кубиковой прочности бетона в произвольном сечении;

$M_{crc}(R, R_{bt}) = R_{bt} W_{pl}(R)$ – момент образования нормальных трещин в железобетонной балке.

Суммарный дифференциальный закон распределения прогибов в балке на упругом основании в произвольном сечении с учётом (11), (19) и (20) будет иметь в соответствии с [20] вид:

$$\begin{aligned} p_w(x, w) &= p_{w_0}(x, w)[1 - \mathbb{P}_{crc}(x)] + p_{w_{crc}}(x, w)\mathbb{P}_{crc}(x) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi D_{w_0}}} \exp\left\{-\frac{[w - \langle w_0(x) \rangle]^2}{2D_{w_0}}\right\} [1 - \mathbb{P}_{crc}(x)] + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{2\pi D_{w_{crc}}}} \exp\left\{-\frac{[w - \langle w_{crc}(x) \rangle]^2}{2D_{w_{crc}}}\right\} \mathbb{P}_{crc}(x). \end{aligned}$$

Теперь можно найти в произвольном сечении балки вероятность превышения прогибами некоторого допустимого нормативного прогиба $[w]$ с учётом возможного образования трещин:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{[w]}(x) &= \int_{[w]}^{\infty} p_w(x, w) dw = \left(1 - \Phi\left\{\frac{[w] - \langle w_0(x) \rangle}{\sqrt{D_{w_0}(x)}}\right\}\right) [1 - \mathbb{P}_{crc}(x)] + \\ &+ \left(1 - \Phi\left\{\frac{[w] - \langle w_{crc}(x) \rangle}{\sqrt{D_{w_{crc}}(x)}}\right\}\right) \mathbb{P}_{crc}(x), \end{aligned}$$

где $\Phi(z)$ - интеграл вероятностей Гаусса вида $\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z \exp(-\frac{t^2}{2}) dt$.

Выводы

Получена оценка вероятности превышения прогибами железобетонной балки на упругом статистически неоднородном основании с двумя коэффициентами постели предельных нормативных прогибов. Нагрузка на балку рассматривалась как случайная нестационарная функция, а прочность бетона как случайная величина. При этом учитывалось, что в железобетонной балке с некоторой вероятностью могут возникнуть нормальные трещины, которые приведут к возникновению переменной по длине балки изгибной жесткости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тамразян А.Г., Дехтерев Д.С., Карпов А.Е., Ласковенко А.Г. Определение расчетных параметров для оценки надежности платформенных стыков панельных зданий. В сборнике: Современные проблемы расчета железобетонных конструкций, зданий и сооружений на аварийные воздействия. Под редакцией А.Г. Тамразяна, Д.Г. Копаницы. 2016. С. 413-416.
2. Тамразян А.Г., Манаенков И.К. К расчету плоских железобетонных перекрытий с учетом фактической жесткости сечения. Научное обозрение. 2015. № 8. С. 87-92.
3. Тамразян А.Г., Дудина И.В. Влияние изменчивости контролируемых параметров на надежность преднапряженных балок на стадии изготовления. Жилищное строительство. 2001. № 1. С. 16-17.

4. Деминов П.Д. К оценке статистических параметров железобетонной балки на упругом основании, имеющем стохастические характеристики // Строительство и реконструкция. 2018. № 5 (79). С. 16-24.
5. Благонадёжин В.Л., Кудрявцев Е.П. Статистическое исследование деформаций песчаных оснований и трубопроводов подземных волноводных линий связи // Доклады научно-технической конференции по итогам научно-исследовательских работ за 1964-1965 г. Секция динамики и прочности машин. М., Издательство МЭИ, 1965. С.78-86.
6. Деминов П.Д. Оценка вероятностных характеристик плотности вероятности предельной поперечной силы в изгибаемых железобетонных элементах // Строительство и реконструкция. 2019. №5 (85). С. 11-16.
7. Деминов П.Д. Оценка вероятности разрушения железобетонной балки, лежащей на стохастическом упругом основании с двумя коэффициентами постели, по наклонному сечению от поперечной силы // Строительство и реконструкция. 2021. № 1 (93). С. 16-25.
8. Леонтьев Н.Н., Леонтьев А.Н., Соболев Д.Н. Основы теории балок и плит на деформируемом основании. М.: МИСИ, 1982. 119 с.
9. Лейбензон Л.С. Курс теории упругости. М.-Л.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1947. С.440-442.
10. Киселев В.А. Расчет балок на упругом основании. М.: Издательство МАДИ, 1981. С. 39-40.
11. Деминов П.Д. Оценка вероятности возникновения недопустимых прогибов в железобетонной балке, лежащей на стохастическом основании с двумя коэффициентами постели, под действием нестационарной случайной нагрузки // Технология текстильной промышленности. 2019. № 4 (382). С. 48-53.
12. Красовский Л.А. Основы автоматики и технической кибернетики. М.-Л.: Госэнергоиздат, 1960. С.194-198.
13. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление. В 2 т. СПб.: Мифрил., Гл. ред. физ.-мат.лит., 1996. Т.1. С. 128-131.
14. Кудрявцев Л.Д. Краткий курс математического анализа. В 2 т. Т.2. Дифференциальное и интегральное исчисление функций многих переменных. Гармонический анализ. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. С. 172-173.
15. СП 52-101-2003 Бетонные и железобетонные конструкции без предварительного напряжения арматуры. М.: 2004.
16. Матвеева Т.А., Светличная В.Б., Зотова С.А. Теория вероятностей: системы случайных величин и функции случайных величин / Учеб. пособие / ВолгГТУ, Волгоград, 2006. С.36.
17. Reissner E. On some Variation Theorems in Elasticity. Problems of Continuum Mechanics. Contributions in Honor of N. I. Muskhelishvili. Philadelphia, 1961. Pp. 370-381.
18. Washizu K. Variational Method in Elasticity and Plasticity. Pergamon Press, 1982.
19. Александров А.В., Лашенков Б.Я., Шапошников Н.Н. Строительная механика. Тонкостенные пространственные системы. М.: Издательство «Стройиздат», 1983. С.152-161.
20. Вентцель Е.С. Теория вероятностей: Учеб. для вузов. 6-е изд. стер. М.: Высшая школа, 1999. С.280-285.

REFERENCES

1. Tamrazyan A.G., Dekhterev D.S., Karpov A.Ye., Laskovenko A.G. Opredeleniye raschetnykh parametrov dlya otsenki nadezhnosti platformennykh stykov panel'nykh zdaniy. V sbornike: Sovremennyye problemy rascheta zhelezobetonnykh konstruksiy, zdaniy i sooruzheniy na avariynnye vozdeystviya. Pod redaktsiyey A.G. Tamrazyana, D.G. Kopanitsy. 2016. S. 413-416.
2. Tamrazyan A.G., Manayenkov I.K. K raschetu ploskikh zhelezobetonnykh perekrytiy s uchetom fakticheskoy zhestkosti secheniya. Nauchnoye obozreniye. 2015. № 8. S. 87-92.
3. Tamrazyan A.G., Dudina I.V. Vliyaniye izmenchivosti kontroliruyemykh parametrov na nadezhnost' prednapryazhennykh balok na stadii izgotovleniya. Жилищное строительство. 2001. № 1. S. 16-17.
4. Deminov P.D. K ocenke statisticheskikh parametrov zhelezobetonnoj balki na uprugom osnovanii, imeyushchem stohasticheskie harakteristiki // Stroitel'stvo i rekonstrukciya. 2018. № 5 (79). S. 16-24.
5. Blagonadyozhin V.L., Kudryavcev E.P. Statisticheskoe issledovanie deformacij peschanykh osnovanij i truboprovodov podzemnykh volnovodnykh linij svyazi // Doklady nauchno-tehnicheskoy konferencii po itogam nauchno-issledovatel'skikh rabot za 1964-1965 g. Sekciya dinamiki i prochnosti mashin. M., Izdatel'stvo MEI, 1965. S.78-86.
6. Deminov P.D. Ocenka veroyatnostnykh harakteristik plotnosti veroyatnosti predel'noj poperechnoj sily v izgibaemykh zhelezobetonnykh elementah // Stroitel'stvo i rekonstrukciya. 2019. №5 (85). S. 11-16.
7. Deminov P.D. Ocenka veroyatnosti razrusheniya zhelezobetonnoj balki, lezhashchej na stohasticheskom uprugom osnovanii s dvumya koefficientami posteli, po naklonnomu secheniyu ot poperechnoj sily // Stroitel'stvo i rekonstrukciya. 2021. № 1 (93). S. 16-25.
8. Leont'ev N.N., Leont'ev A.N., Sobolev D.N. // Osnovy teorii balok i plit na deformiruemom osnovanii. M.: MISI, 1982. 119 s.

9. Lejbenzon L.S. Kurs teorii uprugosti. M.-L.: Gosudarstvennoe izdatel'stvo tekhniko-teoreticheskoy literatury, 1947. S.440-442.
10. Kiselev V.A. Raschet balok na uprugom osnovanii. M.: Izdatel'stvo MADI, 1981. S. 39-40.
11. Deminov P.D. Ocenka veroyatnosti vozniknoveniya nedopustimyh progibov v zhelezobetonnoj balke, lezhashchej na stohasticheskom osnovanii s dvumya koefficientami posteli, pod dejstviem nestacionarnoj sluchajnoj nagruzki // Tekhnologiya tekstil'noj promyshlennosti. 2019. № 4 (382). S. 48-53.
12. Krasovskij L.A. Osnovy avtomatiki i tekhnicheskoy kibernetiki. M.-L.: Gosenergoizdat, 1960. S.194-198.
13. Piskunov N.S. Differencial'noe i integral'noe ischislenie. V 2 t. SPb.: Mifril., Gl. red. fiz.-mat.lit., 1996. T.1. S. 128-131.
14. Kudryavcev L.D. Kratkij kurs matematicheskogo analiza. V 2 t. T.2. Differencial'noe i integral'noe ischislenie funkcij mnogih peremennyh. Garmonicheskij analiz. M.: FIZMATLIT, 2005. S. 172-173.
15. SP 52-101-2003 Betonnye i zhelezobetonnye konstrukcii bez predvaritel'nogo napryazheniya armatury. M.: 2004.
16. Matveeva T.A., Svetlichnaya V.B., Zotova S.A. Teoriya veroyatnostej: sistemy sluchajnyh velichin i funkcii sluchajnyh velichin / Ucheb. posobie / VolgGTU, Volgograd, 2006. S.36.
17. Reissner E. On some Variation Theorems in Elasticity. Problems of Continuum Mechanics. Contributions in Honor of N. I. Muskhelishvili. Philadelphia, 1961. Pp. 370-381.
18. Washizu K. Variational Method in Elasticity and Plasticity. Pergamon Press, 1982.
19. Aleksandrov A.V., Lashchenkov B.YA., SHaposhnikov N.N. Stroitel'naya mekhanika. Tonkostennye prostranstvennye sistemy. M.: Izdatel'stvo «Strojizdat», 1983. S.152-161.
20. Ventcel' E.S. Teoriya veroyatnostej: Ucheb. dlya vuzov. 6-e izd. ster. M.: Vyssh. shk., 1999. S. 280-285.

Информация об авторе:

Деминов Павел Дмитриевич

Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, г. Москва, Россия, кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры железобетонных и каменных конструкций.

E-mail: p-deminov@mail.ru

Information about the author:

Deminov Pavel D.

National Research Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russia, candidate of technical sciences, associate professor, associate professor of the department of Reinforced Concrete and Stone Structures.

E-mail: p-deminov@mail.ru