

А.В. ТУРКОВ¹, С.И. ПОЛЕШКО¹, Е.А. ФИНАДЕЕВА¹, К.В. МАРФИН¹
¹ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева», г. Орёл, Россия

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОГИБОВ И ЧАСТОТ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ КРУГЛЫХ ИЗОТРОПНЫХ ПЛАСТИН ЛИНЕЙНО ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ С УТОЛЩЕНИЕМ К КРАЮ

Аннотация. Рассматривается взаимосвязь максимальных прогибов от статической равномерно распределённой нагрузки W_0 и основной частоты собственных поперечных колебаний ω круглой изотропной пластинки линейно переменной толщины с утолщением к краю при однородных условиях опирания по внешнему контуру в зависимости от соотношения толщины пластины в центре к толщине по краю. По результатам исследования построены графики зависимости максимального прогиба и частоты собственных колебаний пластинки от соотношения t_1/t_2 . Показано, что для круглых пластинок линейно переменной толщины при $t_1/t_2 < 1,1$ коэффициент K с точностью до 5,9% совпадает с аналитическим коэффициентом для круглых пластинок постоянной толщины. Численными исследованиями установлено, что при соотношении толщин на контуре и в центре равном двум расхождение коэффициента K , устанавливающего связь между статическими и динамическими характеристиками пластин, составляет порядка 25% для шарнирного опирания по контуру и до 37% при жёстком опирании. Это свидетельствует о более значительном влиянии неравномерного распределения массы для таких граничных условий.

Ключевые слова: круглая пластина, условия опирания, частота собственных колебаний, максимальный прогиб.

A.V. TURKOV¹, S.I. POLESHKO¹, E.A. FINADEEVA¹, K.V. MARFIN¹
¹Orel state University named after I. S. Turgenev, Orel, Russia

RELATIONSHIP OF MAXIMUM DEFLECTIONS AND NATURAL FREQUENCIES VIBRATIONS OF ISOTROPIC CIRCULAR PLATES WITH INHOMOGENEOUS RESISTANCE CONDITIONS ON THE OUTER AND INNER CONTOUR

Abstract. The relationship between the maximum deflections from a static uniformly distributed load W_0 and the fundamental frequency of natural transverse vibrations of a round isotropic plate of linearly variable thickness with thickening to the edge under homogeneous conditions of support along the outer contour, depending on the ratio of the thickness of the plate in the center to the thickness along the edge, is considered. According to the results of the study, graphs of the dependence of the maximum deflection and the frequency of natural vibrations of the plate on the ratio t_1/t_2 are constructed. It is shown that for round plates of linearly variable thickness at $t_1/t_2 < 1.1$ coefficient K with an accuracy of 5.9% coincides with the analytical coefficient for round plates of constant thickness. Numerical studies shows that when the ratio of the thicknesses on the contour and in the center is equal to two, the difference in the coefficient K , which depends on the relationship between the static and dynamic characteristics of the platinum, is about 25% for hinged support along the contour and up to 37% for rigid support. This indicates a more significant effect of uneven mass distribution for such boundary conditions.

Keywords: ring plate, support conditions, natural vibration frequency, maximum deflection.

Введение

Пластины широко применяются в различных областях промышленности, в том числе в строительстве. Они работают при различных видах нагрузок (статических и динамических) и при различных закреплениях по внешнему контуру. Применение в современных зданиях несущих элементов конструкций в виде круглых пластин вызывает потребность в их диагностике и оценке качества.

В работах проф. В.И. Коробко [1] была установлена фундаментальная закономерность для изотропных пластин постоянного сечения, согласно которой независимо от вида граничных условий пластины произведение её максимального прогиба W_0 от действия равномерно распределенной нагрузки q на квадрат основной частоты колебаний в ненагруженном состоянии ω с точностью до размерного множителя q/m есть величина постоянная:

$$W_0 \cdot \omega^2 = K \frac{q}{m}, \quad (1)$$

где m – равномерно распределённая по площади масса пластины.

Исследованиями взаимосвязи максимальных прогибов и частот собственных колебаний сплошных и составных пластин занимались В.И. Коробко и О.В. Бояркина (Калашникова) [2, 3], А.В. Турков, К.А. Жупикова (Иванушкина) [2, 4, 5], К.В. Марфин [6, 7, 8, 9], Е.В. Карпова [10, 11] и др. Чтобы подтвердить закономерность (1) для пластин линейно переменной толщины с утолщением к краю, были проведены их численные исследования при различном соотношении толщины на опоре t_1 к толщине пластины по краю t_2 , при этом $t_1 < t_2$.

Результаты исследований прогибов и частот собственных колебаний круглых изотропных пластин линейно переменной толщины с утолщением к краю.

Расчетная конструкция – круглая изотропная пластина линейно переменной высоты (рисунок 1). Численные исследования пластин проводились методом конечных элементов. Расчетные схемы составных пластинок приведены на рисунке 2 и 3. При расчете пластинок исследовались две схемы опирания: жесткое защемление по контуру (рисунок 3,а) и шарнирное опирание по контуру (рисунок 3,б).

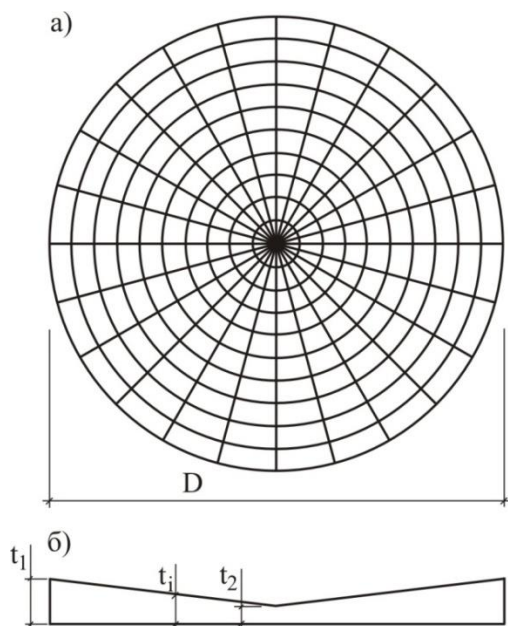


Рисунок 1 – Круглая пластинка линейно переменной толщины (а – конечно-элементная схема; б – толщина пластины)

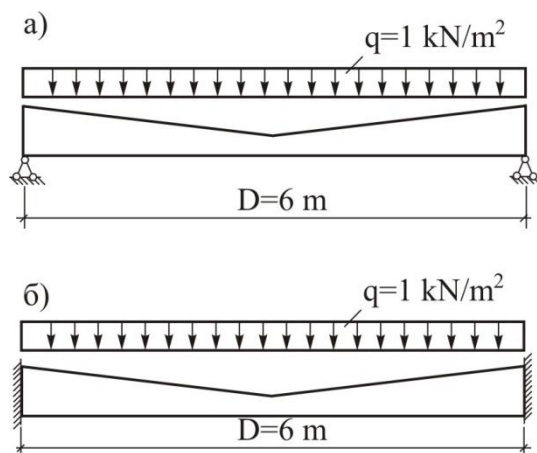


Рисунок 2 – Расчётные схемы пластин (а – с шарнирным опиранием по контуру; б – с защемлением по контуру)

Пластина диаметром 6 м разбита на 240 конечных элементов – 24 элемента в кольцевом направлении и 10 элементов в радиальном (рисунок 1). Толщина пластины в центре принималась постоянной 0,05 м, толщина на опоре являлась переменным параметром и изменялась от 0,05 м (пластина постоянной толщины) до 0,10 м с шагом 0,005 м. Пластина принята из стали обычного качества, объемный вес 78,5 кН/м³. Модуль упругости принят $E=2,06 \cdot 10^5$ МПа по нормам СП 16.13330.2017 «Стальные конструкции». Все исследования проводились в предположении упругой работы материала.

Равномерно распределенная нагрузка принималась $q = 1$ кН/м². Опираие осуществлялось по контуру в контурных узлах пластин. Предусматривались две схемы опирания – шарнирное опирание и заделка по контуру. Для определения собственных частот поперечных колебаний пластин в узлы конструкции прикладывались сосредоточенные массы от собственного веса пластины в соответствии с грузовой площадью узлов. Определение частот колебаний и прогибов осуществлялось при помощи программного комплекса «SCAD» [12]. Результаты численных исследований пластинки приведены в таблицах 1 и 2.

По данным таблиц 1 и 2 построены графики изменения частот колебаний (рисунок 3), максимальных прогибов (рисунок 4) в исследуемых пластинах и коэффициента пропорциональности K (рисунок 5). Отклонение фактического значения коэффициента K от теоретического определялось по формуле:

$$\Delta = \frac{K_{теор} - K}{K_{теор}} \cdot 100\%. \quad (2)$$

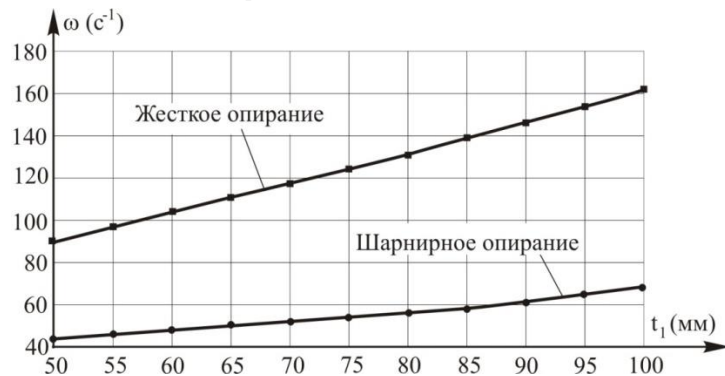


Рисунок 3 – Изменение частот собственных колебаний в зависимости от толщины пластины t_1 по краю

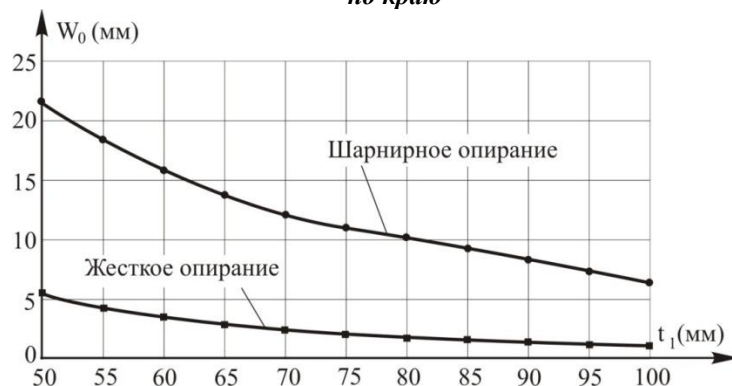


Рисунок 4 – Изменение прогибов от статической нагрузки в зависимости от толщины пластины t_1 на опоре

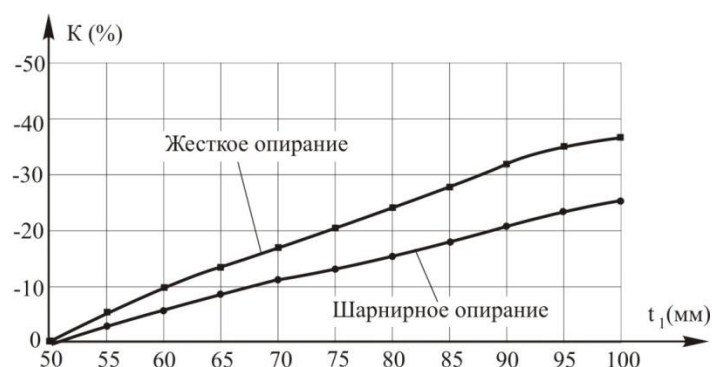


Рисунок 5 – Изменение коэффициента K в зависимости от толщины пластины t_1 на опоре

Таблица 1 – Результаты численных исследований круглой пластины с линейно увеличивающейся толщиной от центра к опоре $D=6$ м при шарнирном опирании

t_1 (мм)	t_2 (мм)	Круговая частота основного тона, ω (c^{-1})	Максимальный прогиб, W_0 (мм)	$K=W_0\omega^2/(q/m)$	$K=W_0\omega^2/(q/m)$ на основе аналитических W_0 и ω	Отклонение K от $K_{аналит}$ % по (2)
50	50	42,52237	21,8409	1,581	1,579	-0,11
55	50	44.88517	18,9567	1,630		-3,23
60	50	47.23886	16.5676	1,676		-6,17
65	50	49.59649	14.5684	1,721		-8,96
70	50	51.96007	12,8808	1,762		-11,62
75	50	54.33089	11.4452	1,802		-12,97
80	50	56.70974	10.2158	1,840		-14,14
85	50	59.09708	9.1563	1,877		-18,84
90	50	61.4931	8.2382	1,911		-21,03
95	50	63.89784	7.4386	1,944		-23,13
50	100	66.31121	6.7388	1,976		-25,14

Таблица 2 – Результаты численных исследований круглой пластины с линейно увеличивающейся толщиной от центра к опоре $D=6$ м при защемлении по контуру

t_1 (мм)	t_2 (мм)	Круговая частота основного тона, ω (c^{-1})	Максимальный прогиб, W_0 (мм)	$K=W_0\omega^2/(q/m)$	$K=W_0\omega^2/(q/m)$ на основе аналитических W_0 и ω	Отклонение K от $K_{аналит}$ % по (2)
50	50	89,80446	5,1396	1,658	1,629	-1,81
55	50	96,93686	4,3013	1,725		-5,89
60	50	104.0817	3.6425	1,789		-9,84
65	50	111.2394	3.1166	1,852		-13,67
70	50	118,410	2.6907	1,912		-17,37
75	50	125.5933	2.3417	1,970		-20,96
80	50	132.7893	2.0526	2,027		-24,45
85	50	139.9976	1.8107	2,083		-27,84
90	50	147.2179	1.6066	2,136		-31,13
95	50	154.4498	1.433	2,188		-34,34
50	100	161.6929	1.2843	2,239		-37,45

Выводы

В результате численных исследований было определены максимальные прогибы и основные частоты колебаний для круглых изотропных пластин линейно переменной толщины с утолщением в центре. Как показали исследования, коэффициент K подчиняется в пределах 5% зависимости профессора В.И. Коробко только при соотношении толщины на опоре к толщине в центре $t_1/t_2=60/50<1.2$ для обеих схем опирания. Это объясняется тем, что зависимость (1) выведена для изотропных пластин постоянной толщины и распределение массы неравномерно по всей площади пластины приводит к существенной погрешности уже на стадии небольшой разницы между толщинами на опоре и в центре. При соотношении толщин $t_1/t_2=100/50=2$ расхождение коэффициента K с аналитическим составляет порядка 25% для шарнирного опирания по контуру до 37% при жёстком опирании, что свидетельствует о более значительном влиянии неравномерного распределения массы для таких граничных условий.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Коробко В.И. Об одной "замечательной" закономерности в теории упругих пластинок // Известия вузов. Строительство и архитектура. 1989. № 11. С. 32-36.
2. Коробко В.И., Турков А.В., Калашникова О.В. Поперечные колебания, прогибы и усилия в однопролетных составных балках с различными граничными условиями слоев // Строительная механика и расчет сооружений. 2010. № 3. С. 65-68.
3. Коробко В.И., Бояркина О.В. Взаимосвязь задач поперечного изгиба и свободных колебаний треугольных пластинок // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Строительство и архитектура. 2007. № 22 (94). С. 24-26.
4. Турков А.В., Жупкина К.А. Взаимосвязь максимальных прогибов и частот собственных колебаний изотропных кольцевых пластин при шарнирном опирании по внешнему контуру // Актуальные проблемы строительства, строительной индустрии и архитектуры: сборник материалов XX международной научно-технической конференции. Тула, 28-29 июня 2019. Тульский государственный университет. С. 299-302. URL: http://dmitriy.chiginskiy.ru/publications/files/Materialy_XX_MNTK-2019_Tula.pdf (дата обращения: 21.05.2020).
5. Турков А.В., Жупкина К.А. Взаимосвязь максимальных прогибов и частот собственных колебаний изотропных кольцевых пластин при жестком закреплении по внешнему контуру // Актуальные проблемы современной когнитивной науки: сборник статей по итогам всероссийской научно-практической конференции. Волгоград. 30 июня 2019. Стерлитамак: АМИ, 2019. С. 70-72. URL: https://www.elibrary.ru/ip_restricted.asp?rpage=https%3A%2F%2Fwww%2Eelibrary%2Eru%2Fitem%2Easp%3Fid%3D38301055 (дата обращения: 21.05.2020).
6. Турков А.В., Марфин К.В., Баженова А.В. Прогибы и частоты собственных колебаний составных многослойных квадратных изотропных пластин с шарнирным опиранием по контуру при изменении жесткости связей сдвига // Строительство и реконструкция. 2019. №4. С. 65-70.
7. Турков А.В., Марфин К.В., Ветрова О.А. Прогибы и частоты собственных колебаний систем перекрестных ферм на квадратном плане с различными схемами опирания // Промышленное и гражданское строительство. 2018. №11. С. 42-45.
8. Турков А.В., Марфин К.В. Определение коэффициента жесткости шва круглой составной изотропной пластины по её основной частоте колебаний // Строительная механика и расчет сооружений. 2013. №4. С. 58-62.
9. Турков А.В., Марфин К.В. Точность результатов численных исследований круглых составных изотропных пластин на податливых связях при различном количестве конечных элементов // Строительство и реконструкция. 2012. №1. С. 40-45.
10. Турков А.В., Карпова Е.В. Исследование коэффициента жёсткости шва для треугольной составной изотропной пластины в зависимости от её основной частоты колебаний при разной жёсткости связей сдвига // Строительная механика и расчет сооружений. 2015. №2. С. 66-69.
11. Турков А.В., Абашина Н.М., Карпова Е.С. Прогибы и частоты собственных колебаний составных ромбических изотропных пластин, шарнирно опёртых по контуру при изменении жёсткости связей сдвига // Строительство и реконструкция. 2016. №5. С. 45-50.
12. Семенов А.А., Габитов А.И. Проектно-вычислительный комплекс SCAD в учебном процессе. Москва, АСВ. 2005. 152 с.

REFERENCES

1. Korobko V.I. Ob odnoy "zamechatel'noy" zakonomernosti v teorii uprugikh plastinok // Izvestiya vuzov. Stroitel'stvo i arkhitektura. 1989. № 11. S. 32-36.
2. Korobko V.I., Turkov A.V., Kalashnikova O.V. Poperechnye kolebaniya, progiby i usiliya v odnoproletnykh sostavnykh balkakh s razlichnymi granichnymi usloviyami sloev // Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzheniy. 2010. № 3. S. 65-68.
3. Korobko V.I., Boyarkina O.V. Vzaimosvyaz' zadach poperechnogo izgiba i svobodnykh kolebaniy treugol'nykh plastinok // Vestnik YUzhno-Ural'skogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Stroitel'stvo i arkhitektura. 2007. № 22 (94). S. 24-26.
4. Turkov A.V., Zhupikova K.A. Vzaimosvyaz' maksimal'nykh progibov i chastot sobstvennykh kolebaniy izotropnykh kol'tsevykh plastin pri sharnirnom opiranii po vneshnemu konturu // Aktual'nye problemy stroitel'stva, stroitel'noy industrii i arkhitektury: sbornik materialov HH mezhdunarodnoy nauchno-tekhnicheskoy konferentsii. Tula, 28-29 iyunya 2019. Tul'skiy gosudarstvennyy universitet. S. 299-302. URL: http://dmitriy.chiginskiy.ru/publications/files/Materialy_XX_MNTK-2019_Tula.pdf (data obrashcheniya: 21.05.2020).
5. Turkov A.V., Zhupikova K.A. Vzaimosvyaz' maksimal'nykh progibov i chastot sobstvennykh kolebaniy izotropnykh kol'tsevykh plastin pri zhestkom zakreplenii po vneshnemu konturu // Aktual'nye problemy sovremennoy kognitivnoy nauki: sbornik statey po itogam vserossiyskoy nauchno-prakticheskoy konferentsii. Volgograd. 30 iyunya 2019. Sterlitamak: AMI, 2019. S. 70-72. URL: https://www.elibrary.ru/ip_restricted.asp?rpage=https%3A%2F%2Fwww%2Eelibrary%2Eru%2Fitem%2Easp%3Fid%3D38301055 (data obrashcheniya: 21.05.2020).
6. Turkov A.V., Marfin K.V., Bazhenova A.V. Progiby i chastoty sobstvennykh kolebaniy sostavnykh mnogoslownykh kvadratnykh izotropnykh plastin s sharnirnym opiraniem po konturu pri izmenenii zhestkosti svyazey sdviga // Stroitel'stvo i rekonstruktsiya. 2019. №4. S. 65-70.
7. Turkov A.V., Marfin K.V., Vetrova O.A. Progiby i chastoty sobstvennykh kolebaniy sistem perekrestnykh ferm na kvadratnom plane s razlichnymi skhemami opiraniya // Promyshlennoe i grazhdanskoe stroitel'stvo. 2018. №11. S. 42-45.
8. Turkov A.V., Marfin K.V. Opredelenie koeffitsienta zhestkosti shva krugloy sostavnoy izotropnoy plastiny po eio osnovnoy chastote kolebaniy // Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzheniy. 2013. №4. S. 58-62.
9. Turkov A.V., Marfin K.V. Tochnost' rezul'tatov chislennykh issledovaniy kruglykh sostavnykh izotropnykh plastin na podatlivykh svyazyakh pri razlichnom kolichestve konechnykh elementov // Stroitel'stvo i rekonstruktsiya. 2012. №1. S. 40-45.
10. Turkov A.V., Karpova E.V. Issledovanie koeffitsienta zhiostkosti shva dlya treugol'noy sostavnoy izotropnoy plastiny v zavisimosti ot eio osnovnoy chastoty kolebaniy pri raznoy zhiostkosti svyazey sdviga // Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzheniy. 2015. №2. S. 66-69.
11. Turkov A.V., Abashina N.M., Karpova E.S. Progiby i chastoty sobstvennykh kolebaniy sostavnykh rombicheskikh izotropnykh plastin, sharnirno opirayemykh po konturu pri izmenenii zhiostkosti svyazey sdviga // Stroitel'stvo i rekonstruktsiya. 2016. №5. S. 45-50.
12. Semenov A.A., Gabitov A.I. Proektno-vychislitel'nyy kompleks SCAD v uchebnom protsesse. Moskva, ASV. 2005. 152 s.

Информация об авторах:

Турков Андрей Викторович

ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева», Орёл, Россия, доктор технических наук, профессор кафедры строительных конструкций и материалов.

E-mail: aturkov@bk.ru

Полешко Сергей Иванович

ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева», Орёл, Россия, студент магистратуры.

E-mail: sergey_poleshko@mail.ru

Финадеева Елена Анатольевна

ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева», Орёл, Россия, кандидат технических наук, доцент кафедры строительных конструкций и материалов, директор архитектурно-строительного института.

E-mail: asi.gu-unpk@mail.ru

Марфин Кирилл Васильевич

ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева», Орёл, Россия, кандидат технических наук, доцент кафедры строительных конструкций и материалов.

E-mail: marfinkirill@yandex.ru

Information about authors:

Turkov Andrey V.

Oryol state University named after I.S. Turgenev, Orel, Russia,
doctor of technical sciences, professor of the department of Building Structures and Materials.
E-mail: aturkov@bk.ru

Poleshko Sergey Iv.

Oryol state University named after I.S. Turgenev, Orel, Russia,
master's degree student.
E-mail: sergey_poleshko@mail.ru

Finadeeva Elena An.

Oryol state University named after I.S. Turgenev, Orel, Russia,
candidate of technical sciences, associate professor of the department of Building Structures and Materials, headmaster
of the Institute of Architecture and Civil Engineering.
E-mail: asi.gu-unpk@mail.ru

Marfin Kirill V.

Oryol state University named after I.S. Turgenev, Orel, Russia,
candidate of technical sciences, associate professor of the department of Building Structures and Materials.
E-mail: marfinkirill@yandex.ru