

А.В. КОРОБКО¹, Н.Г. КАЛАШНИКОВА¹, Е.Г. АБАШИН²¹Орловский государственный университет им. И.С. Тургенева, г. Орел, Россия²Орловский государственный аграрный университет им. Н.В. Парахина, г. Орел, Россия

ПОПЕРЕЧНЫЙ ИЗГИБ И СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ УПРУГИХ ИЗОТРОПНЫХ ПЛАСТИНОК В ВИДЕ РАВНОБЕДРЕННЫХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

Аннотация. В статье рассматриваются упругие изотропные пластинки в виде равнобедренных треугольников с комбинированными граничными условиями (комбинация условий шарнирного опирания и жесткого защемления по сторонам контура). Выполнены расчеты с использованием МКЭ для определения интегральных физических характеристик в рассматриваемых задачах F (максимального прогиба равномерно нагруженных пластинок w_0 и основной частоты колебаний в ненагруженном состоянии ω). На основе полученных численных результатов построены аппроксимирующие функции: «максимальный прогиб – коэффициент формы пластинок», «основная частота колебаний – коэффициент формы пластинок», структура которых соответствует структуре аналогичных формул, полученных при представлении известных точных решений в соответствующих задачах технической теории пластинок в изопериметрическом виде. На основании свойств коэффициента формы пластинок эти аппроксимирующие функции ограничивают все множество рассматриваемых интегральных физических величин и поэтому могут использоваться в качестве опорных решений при расчете треугольных пластинок произвольного вида методом интерполяции по коэффициенту формы (МИКФ). Рассмотрен пример расчета пластинки в виде прямоугольного треугольника с шарнирным опиранием сторон.

Ключевые слова: упругие изотропные пластинки в виде равнобедренных треугольников, максимальный прогиб, основная частота колебаний, метод интерполяции по коэффициенту формы.

A.V. KOROBKO¹, N.G. KALASHNIKOVA¹, E.G. ABASHIN²¹Orel State University named after I.S. Turgenev, Orel, Russia²Orel State Agricultural University named N.V. Parahin, Orel, Russia

TRANSVERSE BENDING AND FREE VIBRATIONS OF ELASTIC ISOTROPIC PLATES IN THE FORM OF ISOSCELES TRIANGLES

Abstract. This paper considers elastic isotropic plates in the form of isosceles triangles with combined boundary conditions (a combination of hinged support and rigid restraint conditions along the sides of the contour). Calculations were performed using FEM to determine the integral physical characteristics in the considered problems F (the maximum deflection of uniformly loaded plates w_0 and the fundamental frequency of oscillations in the unloaded state ω). On the basis of the obtained numerical results, approximating functions have been constructed: "maximum deflection - form factor of plates", "basic frequency of oscillations - form factor of plates", the structure of which corresponds to the structure of similar formulas obtained when presenting known exact solutions in the corresponding problems of technical theory of plates in isoperimetric form. Based on the properties of the form factor of plates, these approximating functions limit the whole set of considered integral physical quantities and therefore can be used as reference solutions for the calculation of triangular plates of arbitrary form applying the method of interpolation by form factor (MIFF). We consider an example of calculation of a plate in the form of a rectangular triangle with hinged support of the sides.

Keywords: elastic isotropic plates in the form of isosceles triangles, maximum deflection, fundamental frequency of vibration, method of interpolation by form factor.

Введение

Треугольные пластинки различной формы и с различными граничными условиями часто используется в виде элементов строительных и машиностроительных конструкций, деталей машин и механизмов. В теории упругости [1, 2, 3] известно лишь несколько точных решений для треугольных пластинок с однородными граничными условиями (либо шарнирное опирание по всему контуру, либо жесткое защемление). В остальных случаях используют приближенные методы: вариационные [4, 5], на основе МКР [6], или численные методы на основе МКЭ [7]. Различные методы решения задач динамики для треугольных пластинок представлены в справочном пособии [8]. В работах [9, 10] рассмотрен способ решения треугольных пластинок в одинарных тригонометрических рядах.

В монографии [11] изложены теоретические основы нового инженерного метода решения задач технической теории пластинок – метод интерполяции по коэффициенту формы. В основу этого метода положены изопериметрические свойства и закономерности изменения коэффициента формы области при геометрических преобразованиях. Методика расчета треугольных пластинок с использованием аффинного преобразования изложена в статье [12]. В работе [13] приводится развитие и применение МИКФ к решению рассматриваемых задач, связанных с треугольной областью. В статьях [14, 15] рассматривается возможность применения МИКФ к расчету треугольных ортотропных пластинок.

1. Метод интерполяции по коэффициенту формы

Представим интегральные физические характеристики упругих изотропных пластинок в виде равнобедренного треугольника (максимальный прогиб w_0 и основная частоту колебаний ω) в зависимости от интегральной геометрической характеристики формы треугольника (коэффициента формы K_f). Коэффициент формы пластинки для областей с односвязным выпуклым контуром численно характеризует её симметричность и определяется с помощью контурного интеграла

$$K_f = \min \oint_L \frac{ds}{h}, \quad (1)$$

где ds – длина элементарного участка на границе выпуклого контура пластинки; h – длина перпендикуляра, опущенного из полюса, взятого внутри области, на касательную к переменной точке контура; L – длина контура пластинки (рисунок 1). Для треугольных пластинок из выражения (1) можно найти:

$$K_f = 2 \operatorname{tg}(\alpha/2) \operatorname{tg}(\beta/2) \operatorname{tg}(\gamma/2), \quad (2)$$

где α, β, γ – углы треугольника. Подробные исследования свойств и закономерностей изменения коэффициента формы при различных геометрических преобразованиях плоских фигур приведены в монографии [11].

Значения коэффициента формы для равнобедренных треугольников, полученные по формуле (2), помещены в таблице 1 (столбец 3). В этой же таблице 1 в столбцах 4 и 5 приведены значения w_0 и ω , полученные для пластинок в виде равнобедренных треугольников с помощью программного комплекса *Лира* на основе МКЭ. По этим данным для каждого вида граничных условий с помощью программного комплекса *Table curve* построены аппроксимирующие функции $w_0 - K_f$ и $\omega - K_f$, структура которых представлена формулами (3):

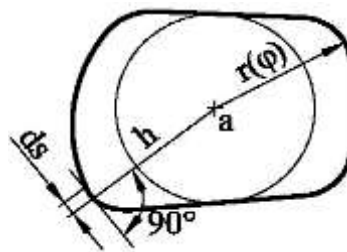


Рисунок 1 - Односвязная плоская область

$$w_0 = \frac{1}{a_1 + b_1 K_f^2} \frac{qA^2}{D}, \quad \omega = (a_2 + b_2 K_f) \sqrt{\frac{D}{m}} \frac{1}{A}, \quad (3)$$

где q – интенсивность равномерно распределенной нагрузки, A – площадь пластинки, D – цилиндрическая жесткость, m – масса единицы площади, a_i и b_i – неопределенные коэффициенты. Вид формул (3) соответствует структуре аналогичных формул, полученных при представлении известных точных решений в соответствующих задач технической теории пластинок в изопериметрическом виде [11].

Для пластинок с однородными граничными условиями зависимости $w_0 - K_f$ и $\omega - K_f$ описываются указанными функциями с высокой степенью точности, причем одной кривой. Это говорит о том, что для пластинок в виде равнобедренного треугольника (тупоугольного или остроугольного) значения интегральных характеристик при одинаковом коэффициенте формы совпадают. Более того, для пластинок в виде произвольного треугольника с однородными граничными условиями при одном и том же значении коэффициента формы значения интегральных физических характеристик пластинок будут равными.

Для пластинок с комбинированными граничными условиями указанная закономерность несколько нарушается, и поэтому функциональные зависимости $w_0 - K_f$ и $\omega - K_f$ записаны двумя функциями (формулы (5) - (8)). Для пластинок с жестко защемленным основанием и шарнирно опертыми боковыми сторонами одна из функций соответствует равнобедренным треугольникам с углом при вершине $\gamma \leq 50^\circ$, а другая – при $\gamma \geq 50^\circ$; для пластинок с шарнирно опертым основанием и жестким защемлением боковых сторон одна из функций соответствует равнобедренным треугольникам с углом при вершине $\gamma \leq 68^\circ$, а другая – при $\gamma \geq 68^\circ$. Ниже следуют описанные зависимости:

– для пластинок с полностью шарнирно опертым контуром

$$w_0 = \frac{10^{-3}}{0,1118 + 1,966 \cdot 10^{-3} \cdot K_f^2} \cdot \frac{qA^2}{D}; \quad \omega = (7,186 + 1,502 \cdot K_f) \cdot \sqrt{\frac{D}{m}} \frac{1}{A}; \quad (4)$$

– для пластинок с шарнирно опертыми боковыми сторонами и жестко защемленным основанием

$$w_0 = \frac{10^{-3}}{0,3924 + 8,694 \cdot 10^{-3} K_f^3} \frac{qA^2}{D}, \quad w_0 = \frac{10^{-3}}{-0,888 + 0,1344 K_f} \frac{qA^2}{D}; \quad (5)$$

$$\omega = \sqrt{632,06 + 0,1378 K_f^3} \cdot \sqrt{\frac{D}{m}} \frac{1}{A}, \quad \omega = \sqrt{-472,36 + 38,443 K_f^{1,5}} \sqrt{\frac{D}{m}} \frac{1}{A}; \quad (6)$$

– для пластинок с жестко защемленными боковыми сторонами и шарнирно опертым основанием

$$w_0 = \frac{10^{-3}}{0,3364 + 3,856 \cdot 10^{-3} K_f^2} \frac{qA^2}{D}, \quad w_0 = \frac{10^{-3}}{-1,341 + 0,2033 K_f} \frac{qA^2}{D}; \quad (7)$$

$$\omega = (13,174 + 2,064 K_f) \sqrt{\frac{D}{m}} \frac{1}{A}, \quad \omega = \sqrt{-2112,28 + 321,65 K_f} \sqrt{\frac{D}{m}} \frac{1}{A}; \quad (8)$$

– для пластинок с полностью защемленным контуром

$$w_0 = \frac{10^{-3}}{0,2226 + 8,464 \cdot 10^{-3} \cdot K_f^2} \cdot \frac{qA^2}{D}; \quad \omega = (7,544 + 3,365 \cdot K_f) \cdot \sqrt{\frac{D}{m}} \frac{1}{A}. \quad (9)$$

Результаты расчета по приближенным формулам (4) - (9) представлены в таблице 1 в столбцах 6 и 8, а в столбцах 7 и 9 приведены отклонения от решений, полученных с помощью МКЭ. Как видно погрешность при использовании МИКФ не превышает 2%

Таблица 1 – Значения максимального прогиба и основной частоты колебаний пластинок в виде равнобедренного треугольника в зависимости от коэффициента формы

Вид опирания	γ/ϕ , град	K_f	$10^3 w_0$	ω	$10^3 w_0$ по МИКФ	Δ , %	ω по МИКФ	Δ , %
1	2	3	4	5	6	7	8	9
Шарнирное опирание по всем сторонам пластинки	20/80	16,110	1,625	31,31	1,608	1,05	31,38	0,22
	30/75	12,677	2,335	26,17	2,338	0,13	26,23	0,23
	40/70	11,208	2,741	24,22	2,787	1,68	24,02	0,83
	50/65	10,568	3,013	23,05	3,018	0,17	23,06	0,04
	60/60	10,392	3,086	22,79	3,085	0,03	22,79	0,00
	70/55	10,540	3,026	23,06	3,028	0,07	23,02	0,17
	80/50	10,961	2,845	23,74	2,874	1,02	23,65	0,38
	90/45	11,657	2,630	24,75	2,639	0,34	24,69	0,24
	100/40	12,668	2,313	26,31	2,340	1,17	26,21	0,38
	110/35	14,087	1,982	28,43	1,992	0,50	28,34	0,32
	120/30	16,083	1,607	31,56	1,612	0,31	31,34	1,37
	130/25	18,975	1,262	35,51	1,220	3,33	35,69	0,51
Боковые стороны пластинки шарнирно оперты, а основание жестко заделано	20/80	16,110	1,321	34,79	1,323	0,15	34,75	0,11
	30/75	12,677	1,754	30,17	1,756	0,11	30,21	0,13
	40/70	11,208	1,960	28,54	1,942	0,92	28,74	0,70
	49,56/65,22	10,585	2,018	28,206	2,018	0,00	28,204	0,07
	50/65	10,568	2,019	28,21	2,017	0,10	28,21	0,00
	60/60	10,392	1,967	28,54	1,966	0,05	28,56	0,07
	70/55	10,540	1,843	29,55	1,892	2,65	29,04	1,73
	80/50	10,961	1,667	31,02	1,709	2,45	30,38	2,06
	90/45	11,657	1,456	33,07	1,473	1,17	32,52	1,66
	100/40	12,668	1,241	35,88	1,228	1,05	35,51	1,03
	110/35	14,087	1,007	39,83	0,995	1,19	39,50	0,83
	120/30	16,083	0,806	44,39	0,785	2,61	44,80	0,92
	130/25	18,975	0,590	51,84	0,601	1,86	52,01	0,21
Боковые стороны пластинки жестко заделаны, а основание шарнирно оперто	20/80	16,110	0,515	55,46	0,517	0,39	55,40	0,11
	30/75	12,677	0,820	44,06	0,809	1,34	44,33	0,61
	40/70	11,208	1,058	38,92	1,067	0,85	38,64	0,72
	50/65	10,568	1,213	36,34	1,238	1,65	35,87	1,29
	60/60	10,392	1,296	35,07	1,296	0,00	35,07	0,00
	67,80/56,10	10,483	1,315	34,83	1,315	0,00	34,81	0,06
	70/55	10,540	1,311	34,92	1,308	0,23	34,93	0,03
	80/50	10,961	1,275	35,32	1,251	1,88	35,79	1,33
	90/45	11,657	1,183	36,62	1,162	0,93	37,23	1,67
	100/40	12,668	1,054	38,77	1,046	0,66	39,32	1,16
	110/35	14,087	0,898	42,14	0,908	1,11	42,25	0,26
	120/30	16,083	0,748	46,16	0,750	0,27	46,37	0,45
	130/25	18,975	0,570	52,79	0,580	1,75	52,34	0,85
Жесткое защемление по всем сторонам пластинки	20/80	16,110	0,430	60,52	0,413	3,95	61,75	2,03
	30/75	12,677	0,643	49,56	0,632	1,71	50,20	1,33
	40/70	11,208	0,787	44,95	0,778	1,14	45,26	0,69
	50/65	10,568	0,856	43,07	0,856	0,00	43,11	0,09
	60/60	10,392	0,880	42,51	0,880	0,00	42,51	0,00
	70/55	10,540	0,858	43,07	0,860	0,23	43,01	0,14
	80/50	10,961	0,803	44,50	0,807	0,50	44,43	0,16
	90/45	11,657	0,723	46,96	0,728	0,69	46,77	0,40
	100/40	12,668	0,623	50,53	0,633	1,61	50,17	0,71
	110/35	14,087	0,516	55,41	0,526	1,94	54,95	0,83
	120/30	16,083	0,402	62,65	0,415	3,23	61,66	1,58
	130/25	18,975						

Примечания: 1. γ – угол при вершине треугольника, ϕ – угол при основании треугольника.

2. Жирным шрифтом выделены экстремальные значения w_0 и ω .

Анализ формул (4) - (9) позволяет сделать вывод о том, что интегральные физические характеристики w_0 и ω с точностью до размерного множителя являются функцией только коэффициента формы. Поэтому изопериметрическим свойствам коэффициента формы будут соответствовать аналогичные свойства интегральных физических величин. Например, *из всех равновеликих треугольных пластинок с равным углом при одной из сторон и одинаковыми граничными условиями пластинки в виде равнобедренных треугольников имеют наибольшие значения максимального прогиба и наименьшие значения основной частоты колебаний; экстремальные значения указанных величин имеет пластинка в виде равностороннего треугольника*. Таким образом, функции (4) - (9) являются граничными для всего множества треугольных пластинок и их можно эффективно использовать при выборе опорных пластинок.

2. Определение интегральных характеристик треугольных пластинок произвольного вида с помощью МИКФ

Теоретические основы метода интерполяции по коэффициенту формы разработаны одним из авторов этой статьи [11]. Суть этого метода заключается в следующем. Для определения интегральной характеристики пластинки заданной формы необходимо выбрать какое-либо непрерывное и монотонное геометрическое преобразование, при котором получается некоторое подмножество форм пластинок, включающее в себя заданную пластинку и хотя бы две другие (опорные) пластинки с известными (опорными) решениями. Эту кривую задают функциями (3) либо степенной функцией вида

$$F = KQ(K_f)^n, \quad (10)$$

где F – обобщенная интегральная характеристика пластинки; K и n – неизвестные параметры, подлежащие определению; Q – обобщенная физическая константа, соответствующая той или иной задаче теории пластинок.

Для расчета треугольных пластинок произвольного вида с однородными и комбинированными граничными условиями с помощью МИКФ в качестве опорных пластинок целесообразно использовать пластинки в виде равнобедренных треугольников и аналитические зависимости (4) - (9). Используя полученные опорные решения, находят неизвестные параметры и записывают приближенные аналитические зависимости по формулам (3) или (10), с помощью которых можно определять искомые интегральные физические характеристики не только для заданной пластинки, но и для всех пластинок, объединенных выбранным геометрическим преобразованием. При расчете треугольных пластинок наиболее удобными являются аффинные преобразования сдвига.

Рассмотрим пример реализации МИКФ. Требуется найти основную частоту колебаний и максимальный прогиб для шарнирно опертой пластинки в виде прямоугольного треугольника с углом $\varphi = 60^\circ$ ($K_f = 12,928$), представленного на рисунке 2,б. Предварительно эта задача была решена с помощью МКЭ, при этом получили:

$$w_0 = 2,249 \cdot 10^{-3} \frac{qA^2}{D}; \quad \omega = 26,59 \sqrt{\frac{D}{m}} \frac{1}{A}.$$

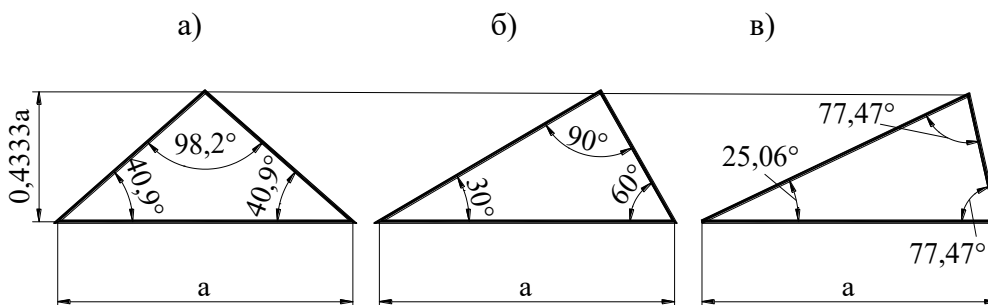


Рисунок 2 – К нахождению опорных фигур с помощью аффинного сдвига

Применим аффинное преобразование, сдвигая вершину заданного прямоугольного треугольника параллельно гипотенузе влево и вправо. С помощью этого преобразования получим опорные фигуры (рисунок 2,а и 2,в) в виде равнобедренных треугольников с углами при основании $\alpha_1 = 40,9^\circ$ ($\gamma_1 = 98,2^\circ$, $K_f = 12,461$) и $\alpha_2 = 77,47^\circ$ ($\gamma_2 = 25,06^\circ$, $K_f = 13,795$).

Используя формулы (3), найдем значения максимального прогиба и основной частоты колебаний для полученных треугольных пластинок (опорных пластинок) в виде равнобедренных треугольников:

– для пластинки в виде равнобедренного тупоугольного треугольника –

$$w_0 = 2,398 \cdot 10^{-3} \frac{qA^2}{D}, \quad \omega = 25,902 \frac{1}{A} \sqrt{\frac{D}{m}};$$

– для пластинки в виде равнобедренного остроугольного треугольника –

$$w_0 = 2,071 \cdot 10^{-3} \frac{qA^2}{D}, \quad \omega = 27,906 \frac{1}{A} \sqrt{\frac{D}{m}}.$$

С учетом этих результатов для заданной пластинки в соответствии с теорией изопериметрических неравенств [11] будем иметь двусторонние неравенства:

$$w_0 = 2,071 \cdot 10^{-3} \leq w_0 \leq 2,398 \frac{qA^2}{D}; \quad \omega = 25,902 \frac{1}{A} \sqrt{\frac{D}{m}} \geq \omega \geq 27,906 \frac{1}{A} \sqrt{\frac{D}{m}}.$$

Как видно, решение, полученное с помощью МКЭ, для пластинки в виде прямоугольного треугольника, удовлетворяет этим неравенствам. Среднее значение двух оценок в первом случае отличается от известного решения на 1,18%, а во втором – на 0,67%.

Используя опорные решения для пластинок в виде равнобедренных треугольников, построим с помощью МИКФ аппроксимирующие функции вида (10) для множества пластинок, объединенных выбранным геометрическим преобразованием. Эти функции будут иметь следующий вид:

$$w_0 = 8,534 \cdot 10^{-2} K_f^{-1,417} \frac{qA^2}{D}; \quad \omega = 4,077 \cdot K_f^{0,733} \frac{1}{A} \sqrt{\frac{D}{m}}.$$

С их помощью опорные решения удовлетворяются автоматически, а для заданной пластинки в виде прямоугольного треугольника получаются результаты:

$$w_0 = 2,270 \cdot 10^{-3} \frac{qA^2}{D}, \quad \omega = 26,613 \frac{1}{A} \sqrt{\frac{D}{m}},$$

которые отличаются от известных решений соответственно на 0,93% и 0,09%. Этот способ определения интегральных характеристик в задачах технической теории пластинок является весьма перспективным в особенности для пластинок с комбинированными граничными условиями.

Основные результаты и выводы

1. С помощью программного комплекса *Лира* произведен расчет пластинок в виде равнобедренных треугольников с однородными и комбинированными граничными условиями и найдены значения максимального прогиба для большого числа пластинок, находящихся под действием равномерно распределенной нагрузки, и основной частоты их колебаний в ненагруженном состоянии. Эти данные имеют самостоятельное прикладное значение и могут использоваться в процессе непосредственного проектирования таких пластинок.

2. Построены аналитические зависимости $F - K_f$, которые могут использоваться для расчета рассматриваемых треугольных пластинок с помощью метода интерполяции по коэффициенту формы. Эти зависимости являются граничными для треугольных пластинок и чаще всего используется для нахождения опорных решений.

3. Из анализа формул (4) - (9) следует: интегральные физические характеристики w_0 и ω с точностью до размерного множителя являются функцией только коэффициента формы.

Поэтому изопериметрическим свойствам коэффициента формы будут соответствовать аналогичные свойства интегральных физических величин. Например, *из всех равновеликих треугольных пластинок с равным углом при одной из сторон и одинаковыми граничными условиями пластинки в виде равнобедренных треугольников имеют наибольшие значения максимального прогиба и наименьшие значения основной частоты колебаний; экстремальное значение указанных величин имеет пластинка в виде равностороннего треугольника.*

4. Показано, что для пластинок в виде равнобедренного треугольника с однородными граничными условиями (либо шарнирное опирание по всему контуру, либо жесткое защемление) зависимости $F - K_f$ описываются лишь одной кривой. Этот факт говорит о том, что для треугольных пластинок произвольного вида значения интегральных физических характеристик при $K_f = \text{const}$ совпадают.

5. Рассмотрен пример, иллюстрирующий возможности метода интерполяции по коэффициенту формы при расчете треугольных пластинок произвольного вида.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. М.: 1963. 635 с.
2. Справочник по теории упругости. – Киев: Изд-во БудІвельник: 1971. 419 с.
3. Кончковский З. Плиты. Статические расчеты: перевод с польского. М.: Стройиздат, 1984. 480 с.
4. Лейбензон Л.С. Вариационные методы решения задач по теории упругости – Москва; Ленинград: 1943. 287 с.
5. Пратусевич Я.А. Вариационные методы в строительной механике – Москва; Ленинград: Госиздат технико-теоретической литературы. 1948. 399 с.
6. Вайнберг Д.В., Вайнберг Е.Д. Пластины, диски, балки. Киев: Госстройиздат УССР, 1959. 1049 с.
7. Масленников А.М. Расчет строительных конструкций численными методами. Л: Изд-во Ленинградского университета, 1987. 224 с.
8. Гонткевич В.С. Собственные колебания пластинок и оболочек: Справочное пособие. Киев: Наукова думка, 1964. 288 с.
9. Босаков С.В., Скачок П.Д. Статический расчет треугольных пластинок с шарнирно опертыми гранями // Механика. Исследования и инновации. Вып.10, Гомель. 2017. С. 24-28.
10. Босаков С.В. Метод Ритца в примерах и задачах по строительной механике и теории упругости: учебное пособие для студентов строительных специальностей вузов. Минск: изд-во БГПА, 2000. 142 с.
11. Коробко А.В. Геометрическое моделирование формой области в двумерных задачах теории упругости. М.: Изд-во АСВ, 1999. 302 с.
12. Коробко А.В. Расчет треугольных. пластинок методом интерполяции по коэффициенту формы с использованием аффинных преобразований // Известия высших учебных заведений. Авиационная техника. 2003. № 2. С. 13-16.
13. Gefel V.B., Korobko A.V. Взаимосвязь поперечного изгиба и свободных колебаний треугольных пластинок // Известия ОрелГТУ. Серия Строительство. 2006. № 1-2. С. 24-27.
14. Коробко В.И., Савин С.Ю. Свободные колебания треугольных ортотропных пластинок с однородными и комбинированными граничными условиями // Строительство и реконструкция. 2013. № 2. С. 33-40.
15. Коробко В.И., Савин С.Ю., Бояркина С.В. Изгиб треугольных ортотропных пластинок с однородными и комбинированными граничными условиями // Строительство и реконструкция. Орел: ГУ-УНПК. 2012. №1. С. 7-13.

REFERENCES

1. Timoshenko S.P., Voinovsky-Kriger S. Plates and shells. M.: 1963. 635 p.
2. Reference Book on the Theory of Elasticity. Kiev: Publishing House Budivelnik: 1971. 419 p.
3. Konczkowski Z. Slabs. Static calculations: translation from Polish. - Moscow: Stroyizdat, 1984. 480 p.
4. Leibenzon L.S. Variation methods for solving problems in the theory of elasticity - Moscow; Leningrad: 1943. 287 p.
5. Pratusovich Y.A. Variation methods in structural mechanics - Moscow; Leningrad: Gosizdat tekhniko-theoreticheskoy literatury. 1948. 399 p.

6. Weinberg D.V., Weinberg E.D. Plates, disks, beams. Kyiv: Gosstroyizdat of the Ukrainian SSR, 1959. 1049 p.
7. Maslennikov A.M. Calculation of Building Structures by Numerical Methods - L: Publishing House of Leningrad University, 1987. 224 p.
8. Gontkevich V.S. Natural vibrations of plates and shells: Reference book. Kiev: Naukova Dumka, 1964. 288 p.
9. Bosakov S.V., Skachok P.D. Static calculation of triangular plates with hinged faces. // Mechanics. Research and Innovations. Issue 10, Gomel. 2017. Pp. 24-28.
10. Bosakov S.V. Ritz Method in Examples and Problems in Structural Mechanics and Theory of Elasticity: Textbook for Students of Building Specialties of Higher Education Institutions. Minsk: publishing house of Belarusian State Pedagogical University, 2000. 142 p.
11. Korobko A.V. Geometrical modeling of area shape in two-dimensional problems of the theory of elasticity. Moscow: Publishing house ASV, 1999. 302 p.
12. Korobko A.V. Calculation of triangular plates by interpolation by form factor using affine transformations // Izvestia of Higher Educational Institutions. Aeronautical Engineering. 2003. № 2. P. 13-16.
13. Gefel V.V., Korobko A.V. Interrelation of transverse bending and free vibrations of triangular plates // Izvestiya Orel State Technical University. Series Construction. 2006. № 1-2. P. 24-27.
14. Kobko V.I., Savin S.Y. Free vibrations of triangular orthotropic plates with uniform and combined boundary conditions // Building and Reconstruction. 2013. № 2. P. 33-40.
15. Korobko V.I., Savin S.Y., Boyarkina S.V. Bending of triangular orthotropic plates with uniform and combined boundary conditions // Construction and reconstruction. Orel: GU-UNPK. 2012. №1. P. 7-13.

Информация об авторах:

Коробко Андрей Викторович

ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева», г. Орел, Россия,
доктор технических наук, профессор, профессор кафедры мехатроники, механики и робототехники.
E-mail: ankor.66@mail.ru

Калашникова Наталья Григорьевна

ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева», г. Орел, Россия,
кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры мехатроники, механики и робототехники.
E-mail: naka.61@mail.ru

Абашин Евгений Геннадьевич

ФГБОУ ВО «Орловский государственный аграрный университет имени Н.В. Парахина», г. Орел, Россия,
кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры агропромышленного и гражданского строительства.
E-mail: evabashin@yandex.ru

Information about authors:

Korobko Andrey V.

Orel State University named after I.S. Turgenev, Orel, Russia,
doctor of technical sciences, professor, professor of the department of Mechatronics, Mechanics and Robotics.
E-mail: ankor.66@mail.ru

Kalashnikova Nataley G.

Orel State University named I.S. Turgenev, Orel, Russia,
candidate in technical sciences, docent, docent of the department of Mechatronics, Mechanics and Robotics.
E-mail: naka.61@mail.ru

Abashin Evgeniy G.

Orel State Agricultural University named N.V. Parahin, Orel, Russia,
candidate in technical sciences, docent, docent of the department of Agro-Industrial and Civil Engineering.
E-mail: ankor.66@mail.ru