

И.Н. СЕРПИК¹, Р.О. ШКОЛЯРЕНКО¹¹ФГБОУ ВО «Брянский государственный инженерно-технологический университет», г. Брянск, Россия

ВЛИЯНИЕ НАКЛОННЫХ РЕБЕР ЖЕСТКОСТИ В УЗЛАХ СОЕДИНЕНИЯ ДВУТАВРОВ НА ПЕРЕДАЧУ БИМОМЕНТОВ

Аннотация. Бессдвиговая теория В.З. Власова остается одним из наиболее обоснованных подходов к расчету тонкостенных стержней с учетом стесненного кручения. В то же время использование данной теории для анализа деформаций рамных конструкций еще требует проведения исследований с точки зрения условий передачи сил в узлах соединения стержней. Как отмечается в литературных источниках, на стыках тонкостенных стержней открытого профиля для некоторых конструктивных решений может существенно нарушаться баланс бимоментов. В настоящей статье рассматривается аспект данного явления для стальных двутавровых профилей, связанный с наличием наклонных ребер жесткости в стыковочных узлах. С помощью оболочечных конечноэлементных моделей показано влияние наклонных ребер на появление скачков по бимоментам при попарном соединении стержней. Выведена зависимость, обеспечивающая возможность учета в стержневых моделях жесткости наклонного ребра с точки зрения стеснения деформаций поперечных сечений. На основе численных экспериментов установлено, что введение таких жесткостей в стержневые конечноэлементные схемы рамных конструкций позволяет с достаточно высокой для инженерной практики точностью отразить условие взаимодействия стержней по передаче бимоментов.

Ключевые слова: тонкостенные стержни, теория кручения Власова, стальные рамы, двутавровые профили, наклонные ребра жесткости, бимоменты, конечноэлементный анализ

I.N. SERPIK¹, R.O. SHKOLYARENKO¹¹Bryansk State Engineering Technological University, Bryansk, Russia

INFLUENCE OF INCLINED STIFFENERS IN I-BEAM CONNECTIONS ON BIMOMENT TRANSFERRING

Abstract. Shear-free theory of V.Z. Vlasov remains one of the most reasonable approaches to calculating thin-walled bars taking into account constrained torsion. At the same time, the use of this theory for the analysis of deformations of frame structures still requires research in terms of the conditions for transferring forces in bar connections. As noted in some scientific papers, the balance of bimoments can be significantly broken at the joints of thin-walled bars of an open profile in some designs. This paper deals with this phenomenon for steel I-beam profiles, associated with the presence of inclined stiffeners in joint units. Using shell finite element models, the influence of inclined stiffeners on the appearance of bimoment jumps at the pairwise connection of bars is shown. A dependence is derived that makes it possible to take into account the stiffness of the inclined edge in the bar models from the point of view of the restraint of cross-section warping. On the basis of numerical experiments, it was determined that the introduction of such stiffness into the bar finite element schemes of frame structures allows to reflect the condition of bars interaction in the transferring of bimoments with a sufficiently high accuracy for engineering practice.

Keywords: thin-walled beams, Vlasov torsion theory, steel frames, I-beams, inclined stiffness, bimoments, finite element analysis

Введение

Требования к постановке поперечных ребер жесткости тонкостенных стальных стержней открытого профиля регулируются СП 16.13330.2017 «Стальные конструкции.

Актуализированная редакция СНиП II-23-81». Для отдельных стержней такого типа, выполненных в соответствии нормативными условиями, расчет с учетом стесненного кручения может эффективно выполняться на основе бессдвиговой теории В.З. Власова [1]. Различные варианты развития этой методологии, в том числе с принятием во внимание сдвиговых деформаций, рассмотрением изгиба контура поперечного сечения, отражением особенностей силовых воздействий и свойств материалов приведены в трудах ряда авторов [2-17].

Построение тонкостенных стержневых конечных элементов, основанное непосредственно на бессдвиговой теории в рамках двухузловых схем, представлено в ряде работ [18-25]. При этом использовались как точные решения дифференциальных уравнений, так и классические аппроксимации обобщенных перемещений на основе степенных полиномов. В работе [26] изложена процедура реализации бессдвиговой теории с помощью бистержневого четырехузловое конечного элемента.

Учет влияния поперечных ребер на распределение бимоментов подробно рассмотрен в книге [1]. Принимается во внимание изгибная жесткость диафрагм, влияющая на деформации поперечных сечений стержней. Получена зависимость, выражающая скачок бимомента в месте постановки диафрагмы через меру деформации поперечного сечения.

В работах [23, 27] выполнялся анализ деформирования рамных тонкостенных конструкций в предположении баланса бимоментов и равенства мер деформаций на стыках стержней. В статьях [28-30] приведены результаты расчета конструкций такого типа на основе оболочечных конечноэлементных моделей, показывающие, что это предположение может во многих случаях в значительной степени нарушаться. Согласно работе [31] к решению данной проблемы можно подойти с помощью комбинированных моделей, предусматривающих использование вне зон стыков стержневых конечных элементов, а для стыковочных узлов – конечных элементов оболочечного типа. Тем не менее, это приводит к усложнению расчетных схем по сравнению со стержневыми моделями.

В статьях [32, 33] показано, что при наличии поперечных ребер жесткости возможное нарушение баланса бимоментов в узлах соединения стержней может быть учтено на основе рассмотрения эксцентричной передачи моментов между стержнями. В то же время следует иметь в виду, что во многих случаях в узлах рамных тонкостенных конструкций устанавливаются наклонные ребра жесткости. Такие ребра могут существенно ограничивать деформации поперечных сечений стержней.

В исследовании [34] разработана методика расчета напряженно-деформированного состояния отдельных тонкостенных стержней с двутавровыми поперечными сечениями, снабженных наклонными ребрами жесткости, при стесненном кручении. Рассматривается оценка взаимодействия наклонных ребер с двутавром на основе метода сил и метода последовательных приближений. Выявлено существенное влияние наклонных ребер на крутильную жесткость стержней. Данное положение вытекает и из результатов исследований работы [35], выполненных с помощью оболочечных моделей, а также статьи [36], приводящей результаты натурных экспериментов. В то же время вопрос об отражении этого эффекта в стержневых расчетных схемах рамных конструкций требует проведения дальнейших исследований.

В настоящей работе представляется алгоритм учета наклонных ребер жесткости в узлах соединения двутавровых профилей при конечноэлементном анализе стальных рам с учетом стесненного кручения стержней. Вопрос о точности предлагаемого подхода оценивается на основе сопоставления расчетов с помощью стержневых и оболочечных конечноэлементных моделей.

Особенности передачи бимоментов в узле соединения стержней при введении наклонного ребра жесткости

Рассматривалась линейно деформируемая стержневая система, состоящая из двух двутавров №20Б1 по ГОСТ Р 57837-2017 «Двутавры стальные горячекатаные с параллельными гранями полок. Технические условия» (рисунок 1). В первом варианте конструкции полагалось, что стержни снабжены только поперечными ребрами жесткости толщиной 5 мм. Во втором варианте в узле соединения стержней дополнительно вводились две наклонные пластины такой же толщины, которые мы будем рассматривать как двойное ребро S . Система жестко закреплена в опоре H и нагружена парой сил с моментом $M=1$ кН·м.

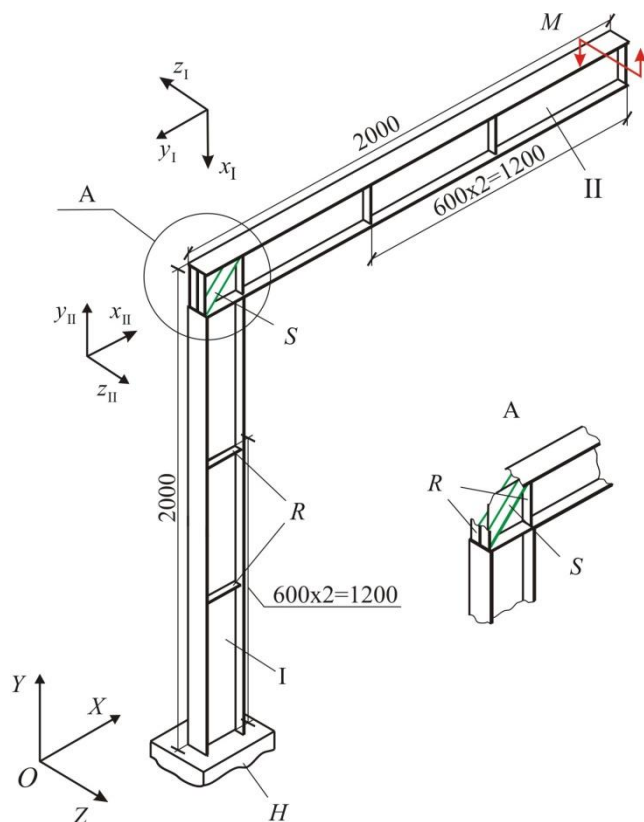


Рисунок 1 – Двухстержневая система

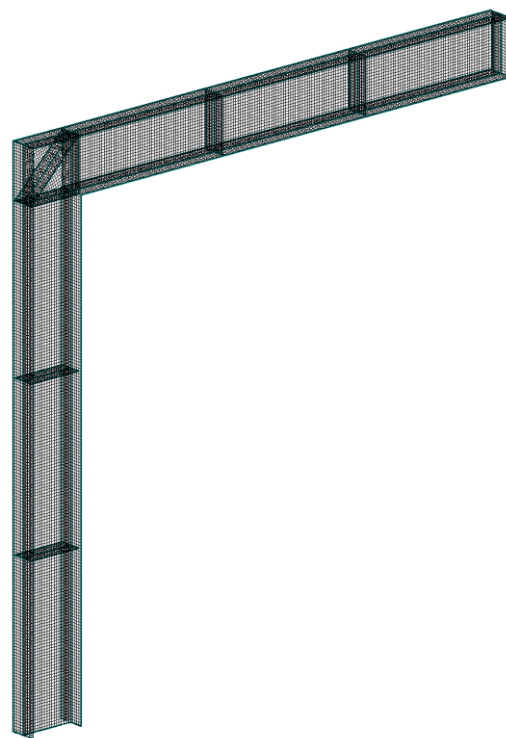


Рисунок 2 – Разбивка двухстержневой конструкции на оболочечные конечные элементы при наличии наклонного ребра S

Расчеты выполнялись в программном комплексе Autodesk NEiNastran (лицензия ФГБОУ ВО «Брянский государственный инженерно-технологический университет» № PR-05918596) с помощью оболочечных моделей. Для первого варианта использовалось 16506 плоских четырехузловых конечных элементов. Для второго варианта модель дополнительно включала 224 конечных элемента данного типа, описывающих деформации ребра S . Система конечных элементов для исследуемого объекта при наличии ребра S проиллюстрирована на рисунке 2. На основании напряжений, полученных в оболочечных конечных элементах, вычислялись значения бимоментов в ряде поперечных сечений стержней. На рисунке 3 показаны эпюры бимоментов, построенные для обоих вариантов конструкции. Согласно рисунку 3,а значение бимомента в поперечном сечении стержня I, примыкающем к соединительному узлу, отличается от соответствующего значения бимомента в стержне II только на 6,5%. Этот результат соответствует выводу работы [32] о возможности пренебрежения для практических расчетов скачков по бимоментам в узле соединения стержней такого конструктивного исполнения. В то же время, согласно рисунку 3,б, для второго варианта объекта данное различие уже составляет 73,6%. То есть наклонное ребро может в значительной степени влиять на передачу бимоментов между стержнями.

Методика учета жесткости наклонного ребра в стержневой конечноэлементной модели

Рассматриваем соединение двух двутавров с использованием наклонного ребра S (рисунок 4), где t , a – толщина и ширина ребра. При этом полагаем малыми размеры ребра в сравнении с длинами стержней и пренебрегаем жесткостью ребра по деформации из его плоскости. Для введения в стержневую модель элемента, имитирующего наклонное ребро, необходимо оценить жесткость C_B , которая определяет скачок ΔB по бимоменту (рисунок 5):

$$\Delta B = C_B \theta_U, \quad (1)$$

где θ_U – значение меры деформации θ для примыкающих к узлу поперечных сечений стержней.

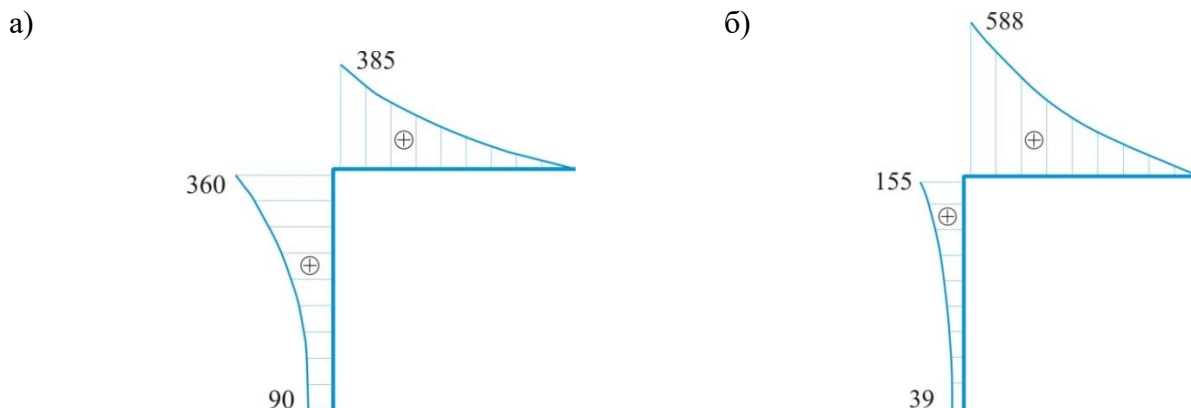


Рисунок 3 – Эпюры бимоментов для двухстержневой конструкции ($\text{Н}\cdot\text{м}^2$): а – при использовании только поперечных ребер; б – при наличии наклонного ребра S в узле соединения стержней

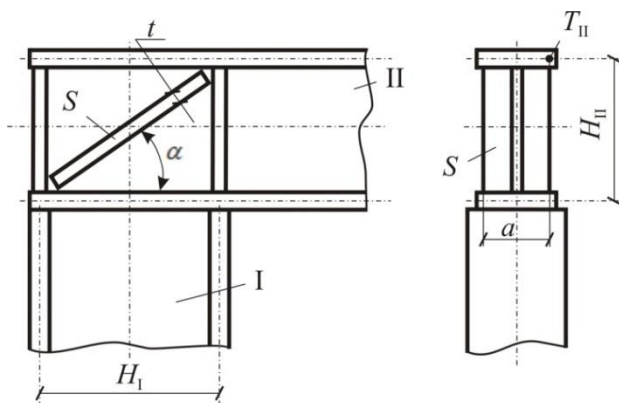


Рисунок 4 – Вариант установки двойного наклонного ребра S при соединении двутавров I и II

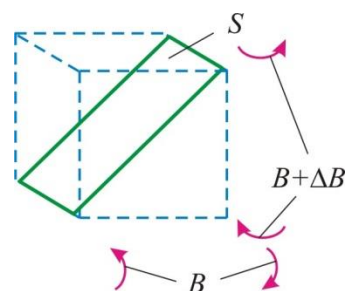


Рисунок 5 – Воздействие бимоментов на узел соединения стержней

Для этого используем условие сохранения энергии в виде

$$A_{\Delta B} = U_S, \quad (2)$$

где $A_{\Delta B}$ – работа, совершаемая бимоментом ΔB над узлом:

$$A_{\Delta B} = \frac{1}{2} (\Delta B) \theta_U; \quad (3)$$

U_S – энергия деформации ребра.

Принимаем во внимание чистый изгиб ребра в своей плоскости (рисунок 6). Согласно стержневой модели для деформаций ребра, модули углов поворота ϕ'_P , ϕ''_P его поперечных кромок можно определять с помощью зависимости

$$|\phi'_P| = |\phi''_P| = |\phi_P| = \frac{|M_P|l}{2EJ_{zp}}, \quad (4)$$

где M_p – изгибающий момент; l – длина ребра; $J_{zp} = ta^3/12$ – момент инерции поперечного сечения ребра относительно оси Oz_p .

Отметим также, что для условия чистого изгиба энергия деформации

$$U_s = \frac{1}{2} \frac{M_p^2 l}{EJ_{zp}}. \quad (5)$$

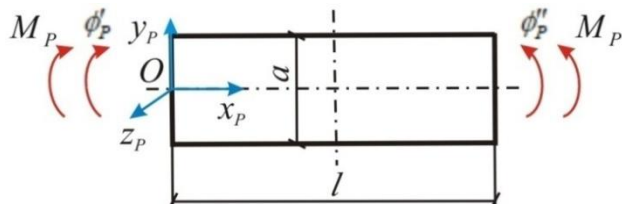


Рисунок 6 – Ребро S под действием изгибающих моментов

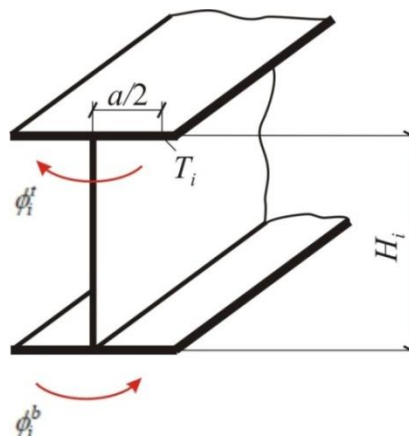


Рисунок 7 – Углы поворота полок в поперечном сечении двутавра i

Применительно к стержню i ($i = I, II$) для примыкающего к стыковочному узлу поперечного сечения модули связанных с его деформацией углов поворота ϕ_i^b, ϕ_i^t (рисунок 7) кромок полок будут определяться таким образом [1]:

$$|\phi_i^b| = |\phi_i^t| = |\phi_i| = \frac{2|\omega_{Ti}||\theta_U|}{a}, \quad (6)$$

где ω_{Ti} – секториальная координата в точке T_i .

Величина ω_{Ti} для двутавра прямо пропорциональна расстоянию H_i между срединными плоскостями полок [1]. При этом схему углов поворота ϕ'_i, ϕ''_i кромок полок двутавров I и II и углов ϕ'_p, ϕ''_p можно представить так, как показано на рисунке 8. Тогда на основании зависимостей (4)-(6) и этой схемы получим

$$U_s = \frac{8EJ_{zp}\omega_{Ti}^2\theta_U^2}{la^2\sin^2\alpha}, \quad (7)$$

где α – угол наклона ребра.

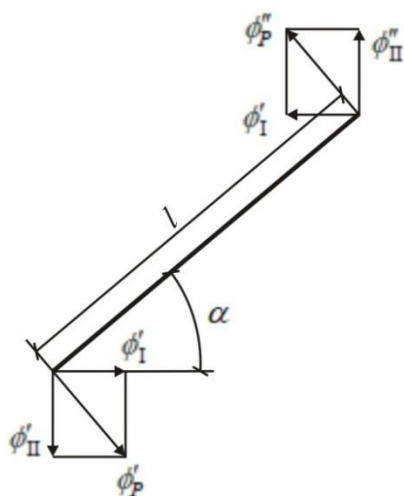


Рисунок 8 – Углы поворота ребра, связанные с деформациями поперечных сечений стержня

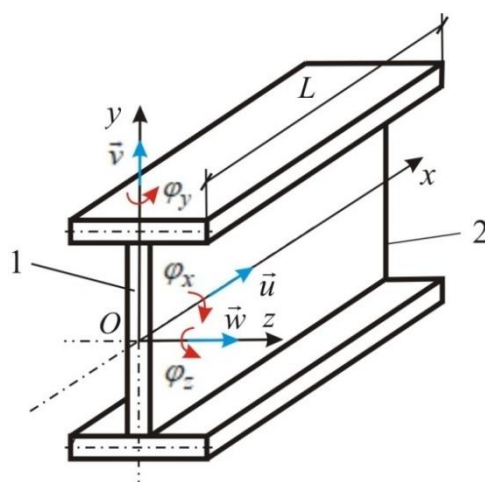


Рисунок 9 – Стержневой конечный элемент

В соответствии с равенствами (1)-(3), (7) будем иметь

$$C_B = \frac{16EJ_{zp}\omega_{T1}^2}{la^2\sin^2\alpha}. \quad (8)$$

Учет жесткости C_B в стержневой конечноэлементной модели, описывающей деформации несущей системы в рамках метода перемещений, может осуществляться следующим образом:

$$K_{rr} = \tilde{K}_{rr} + C_B, \quad (9)$$

где K_{rr} – диагональный элемент глобальной матрицы жесткости дискретизированного объекта для степени свободы r , связанной с рассматриваемой для ребра S мерой деформации поперечных сечений; $\tilde{K}_{rr}$ – данный элемент, полученный без учета жесткости наклонного ребра.

Как показывают расчеты, имеется возможность добиться дополнительного повышения точности решений с помощью метода конечных элементов при уменьшении на 20% значения C_B , полученного с помощью формулы (8). Эта корректировка выполнялась для представленных в статье примеров.

Тонкостенный стержневой конечный элемент

Полагаем, что в общем случае стержни могут быть подвергнуты растяжению-сжатию, поперечному изгибу в двух главных плоскостях и стесненному кручению. Для описания кручения используем бессдвиговую теорию В.З. Власова. Рассматриваем двухузловой стержневой конечный элемент с узлами $j = 1, 2$, расположенными в центрах тяжести крайних поперечных сечений 1 и 2 (рисунок 9). Вектор обобщенных перемещений конечного элемента представляем таким образом:

$$\{\delta_e\} = \{u_1 \ v_1 \ w_1 \ \varphi_{x1} \ \varphi_{y1} \ \varphi_{z1} \ \theta_1 \ u_2 \ v_2 \ w_2 \ \varphi_{x2} \ \varphi_{y2} \ \varphi_{z2} \ \theta_2\}^T, \quad (10)$$

где u_j, v_j, w_j – проекции u, v, w вектора перемещения центра тяжести поперечного сечения на оси S_x, S_y, S_z для узла j ; $\varphi_{xj}, \varphi_{yj}, \varphi_{zj}$ – углы поворота поперечного сечения узла j относительно этих осей; $\theta_j = (\partial\varphi_x/\partial x)$ – мера деформации в узле j .

Векторы обобщенных деформаций и напряжений запишем в виде

$$\{\varepsilon_e\} = \left\{ \varepsilon_x \ \chi_y \ \chi_z \ \frac{\partial\varphi_x}{\partial x} \ \frac{\partial^2\varphi_x}{\partial x^2} \right\}^T; \quad (11)$$

$$\{\sigma_e\} = \{N \ M_y \ M_z \ M_\theta \ B\}^T, \quad (12)$$

где $\varepsilon_x = \partial u/\partial x$ – относительная линейная деформация вдоль оси стержня; $\chi_y = -\partial^2 w/\partial x^2$, $\chi_z = -\partial^2 v/\partial x^2$ – деформации изгиба стержня относительно осей Oy и Oz ; N – продольная сила; M_y, M_z – изгибающие моменты относительно осей Oy и Oz ; M_θ – момент свободного кручения.

Будем аппроксимировать перемещения u по линейному закону, а перемещения v, w и угол поворота φ_x – с помощью полиномов третьей степени [18, 22]. Тогда с учетом соотношений (10), (11) матрицу деформаций $[B_e]$ конечного элемента, определяемую выражением $\{\varepsilon_e\} = [B_e]\{\delta_e\}$ [37,38], представим таким образом:

$$[B_e] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\eta_1 & 0 & \eta_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\eta_3 & 0 & \eta_4 & 0 & 0 \\ 0 & -\eta_1 & 0 & 0 & 0 & -\eta_2 & 0 & 0 & -\eta_3 & 0 & 0 & 0 & -\eta_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \xi_1 & 0 & 0 & \xi_2 & 0 & 0 & 0 & \xi_3 & 0 & 0 & \xi_4 \\ 0 & 0 & 0 & \eta_1 & 0 & 0 & \eta_2 & 0 & 0 & 0 & \eta_3 & 0 & 0 & \eta_4 \end{bmatrix}, \quad (13)$$

где L – длина конечного элемента;

$$\eta_1 = -\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3}; \xi_1 = -\frac{6x}{L^2} + \frac{6x^2}{L^3}; \eta_2 = -\frac{4}{L} + \frac{6x}{L^2}; \xi_2 = 1 - \frac{4x}{L} + \frac{3x^2}{L^2};$$

$$\eta_3 = \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3}; \xi_3 = \frac{6x}{L^2} - \frac{6x^2}{L^3}; \xi_4 = -\frac{2x}{L} + \frac{3x^2}{L^2}; \eta_4 = -\frac{2}{L} + \frac{6x}{L^2}.$$

Принимая во внимание равенства (11) и (12), представим матрицу упругости $[D_e]$ конечного элемента, определяемую равенством $\{\sigma_e\} = [D_e]\{\varepsilon_e\}$ [38], в виде

$$[D_e] = \begin{bmatrix} EA & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & EJ_y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & EJ_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & GJ_t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & EJ_\omega \end{bmatrix}, \quad (14)$$

где E , G – модуль упругости и модуль сдвига материала; A – площадь поперечного сечения стержня; J_y и J_z – моменты инерции поперечного сечения относительно осей Oy и Oz ; J_t – геометрический фактор жесткости при свободном кручении; J_ω – главный секториальный момент инерции сечения.

Результаты проверки точности стержневых моделей с жесткостями для наклонных ребер

Пример 1. Выполнялся расчет системы, приведенной на рисунке 1, при наличии ребра S . Стержневая модель деформируемого объекта, включающая элемент жесткости C_B , показана на рисунке 10, где D – вспомогательная стержневая вставка, не стесняющая деформации поперечных сечений; U – узлы конечноэлементной схемы. Полученное с помощью разработанного алгоритма распределение бимоментов в стержнях приведено на рисунке 11. Из сопоставления рисунков 3 и 10 видно, что предлагаемый подход к учету наклонного ребра позволил значительно повысить точность расчетов. По наибольшему бимоменту отличие результатов для стержневой модели составило по сравнению с оболочечной моделью менее 6%.

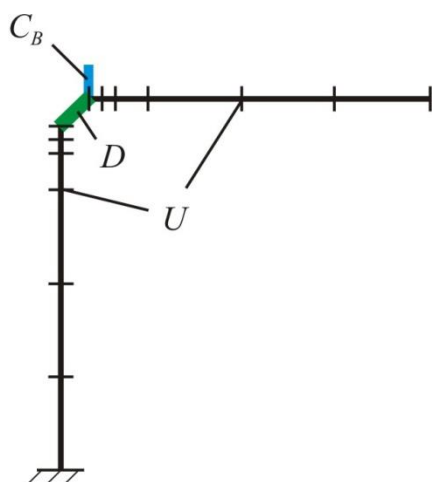


Рисунок 10 – Стержневая конечноэлементная модель примера 1

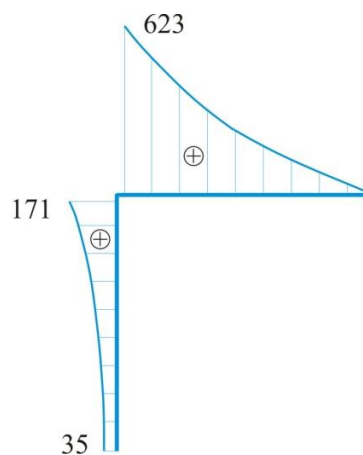


Рисунок 11 – Эпюра бимоментов в примере 1 (Н·м²)

Пример 2. Рассчитывалась стальная рамная конструкция, состоящая из трех стержней (рисунок 12). Объект снабжен поперечными ребрами жесткости R по длине стержней и наклонными ребрами S в обоих узлах их соединения. Профиль стержней и геометрические характеристики ребер принимались такими же, как для двухстержневой конструкции. Система нагружена двумя сосредоточенными силами $F = 3,500$ кН, приложенными по краю полки ригеля. Разбивка объекта на оболочечные конечные элементы в программном комплексе Autodesk NEi Nastran приведена на рисунке 13. Данная модель включала 28478 четырехугольных конечных элементов. В стержневой модели, построенной по аналогии с примером 1, для дискретизации двутавров использовался 51 конечный элемент. Результаты

расчетов, полученные на основании этих схем, приведены на рисунках 14 и 15, откуда видно, отличие по наибольшему значению бимомента для стержневой модели по сравнению с оболочечной составило 8,5 %.

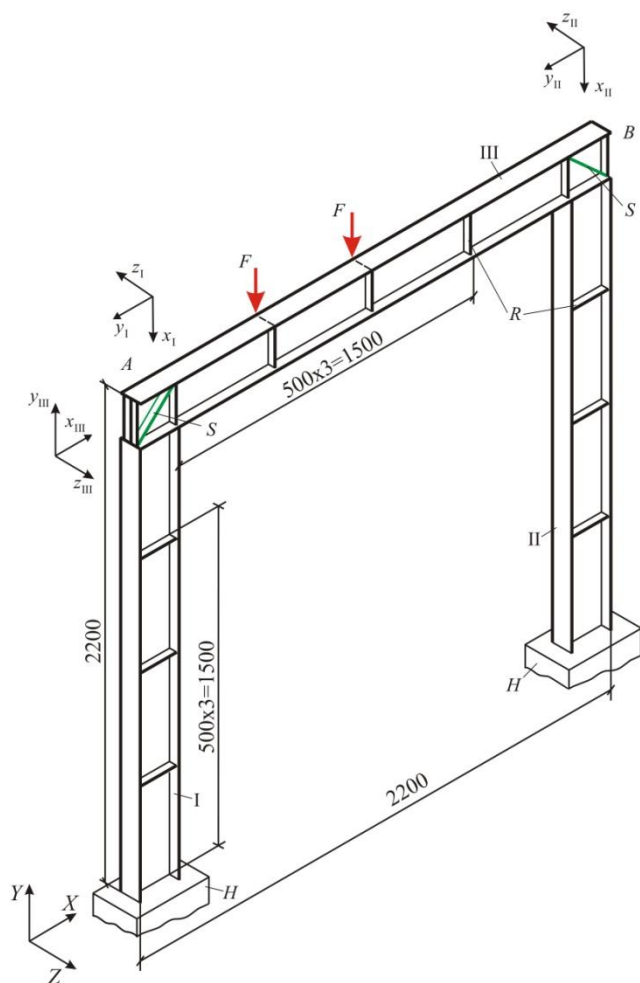


Рисунок 12 – Трехстержневая рама:
I, II – стойки; III – ригель



Рисунок 13 – Разбивка трехстержневой
конструкции на оболочечные конечные элементы

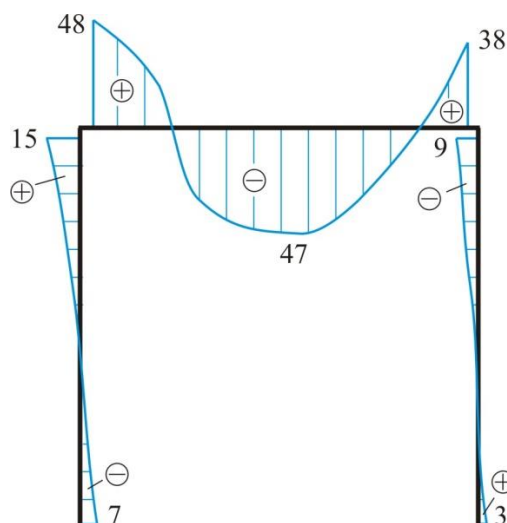


Рисунок 14 - Результаты определения бимоментов
на основе оболочечной модели в примере 2 ($\text{Н}\cdot\text{м}^2$)

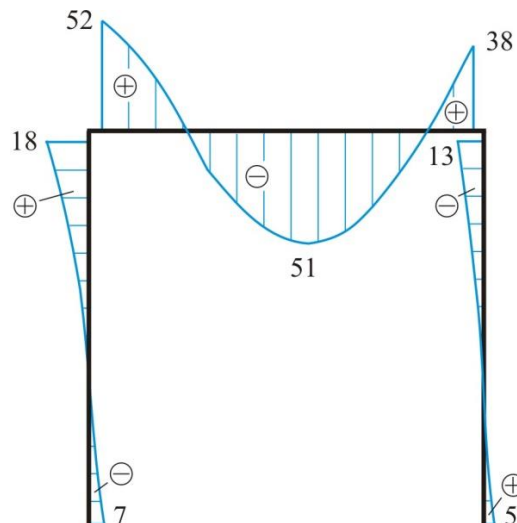


Рисунок 15 – Результаты расчета бимоментов для
примера 2 с помощью стержневой модели ($\text{Н}\cdot\text{м}^2$)

Таким образом, представляемая процедура учета жесткости наклонных ребер по деформации поперечных сечений позволила отразить для примеров 1 и 2 скачки по бимоментам в узлах соединения стержней с достаточно эффективным обеспечением соответствия эпюр бимоментов, построенных с помощью стержневых и оболочечных конечных элементов.

Выводы

1. На основе использования оболочечных конечно-элементных моделей установлено, что наклонное ребро в узле попарно соединяемых двутавровых профилей существенно влияет на распределение бимоментов в стержнях.
2. Разработан подход к определению жесткости наклонного ребра в узлах соединения двутавров с точки зрения локального стеснения деформаций поперечных сечений стержней.
3. Построена схема конечноэлементного моделирования стержневых систем, образуемых двутавровыми профилями, с введением дополнительных жесткостей, связанных с наличием наклонных ребер.
4. Сопоставление конечноэлементных решений, полученных с помощью разработанной методики и оболочечных моделей, показало, что введение в стержневые схемы дополнительных жесткостей по наклонным ребрам позволяет с достаточной для практических целей точностью учесть скачки по бимоментам в узлах соединения стержней.
5. Представляемый подход к уточнению расчетов рамных конструкций, образуемых стержнями с двутавровыми профилями поперечных сечений, можно рекомендовать к использованию в пакетах прикладных программ конечноэлементного анализа.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Власов В.З. Тонкостенные упругие стержни. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1959. 568 с.
2. Сливкер В.И. Строительная механика. Вариационные основы. М.: Издательство Ассоциации строительных вузов, 2005. 736 с.
3. Туснин А.М., Прокич М. Работа симметричных двутавровых сечений при развитии пластических деформаций и действии изгибающего момента и бимомента // Инженерно-строительный журнал. 2014. № 5 (49). С. 44-53. DOI: 10.5862/MCE.49.5
4. Wang Z.Q., Zhao J.C., Zhang D.X., Gong J.H. Restrained torsion of open thin-walled beams including shear deformation effects // Journal of Zhejiang University-SCIENCE A. 2012. Vol. 13. No. 4. Pp. 260-273. DOI: 10.1631/jzus.A1100149
5. Choi S., Kim Y.Y. Higher-order Vlasov torsion theory for thin-walled box beams // International Journal of Mechanical Sciences. 2021. Vol. 195. 106231. DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2020.106231
6. Latalski J., Warminski J., Rega G. Bending-twisting vibrations of a rotating hub-thin-walled composite beam system // Mathematics and Mechanics of Solids. 2017. Vol. 22. No. 6. Pp. 1303-1325. DOI: 10.1177/1081286516629768
7. Latalski J., Warminski J. Nonlinear vibrations of a rotating thin-walled composite piezo-beam with circumferentially uniform stiffness (CUS) // Nonlinear Dynamics. 2019. Vol. 98. No. 2. Pp. 2509-2529. DOI: 10.1007/s11071-019-05175-3
8. Taig G., Ranzi G. Generalized beam theory (GBT) for stiffened sections // International Journal of Steel Structures. 2014. Vol. 14. Pp. 381-397. DOI: 10.1007/s13296-014-2017-x
9. Piccardo G., Ranzi G., Luongo A. A complete dynamic approach to the Generalized Beam Theory cross-section analysis including extension and shear modes // Mathematics and Mechanics of Solids. 2014. Vol. 19. No. 8. Pp. 900-924. DOI: 10.1177/1081286513493107
10. Piccardo G., Ranzi G., Luongo A. A direct approach for the evaluation of the conventional modes within the GBT formulation // Thin-Walled Structures. 2014. Vol. 74. Pp. 133-145. DOI: 10.1016/j.tws.2013.09.008
11. Ferrarotti A., Piccardo G., Luongo A. A novel straightforward dynamic approach for the evaluation of extensional modes within GBT 'cross-section analysis' // Thin-Walled Structures. 2017. Vol. 114. Pp. 52-69. DOI: 10.1016/j.tws.2017.01.001
12. Piccardo G., Ferrarotti A., Luongo A. Nonlinear generalized beam theory for open thin-walled members // Mathematics and Mechanics of Solids. 2016. Vol. 22. No. 10. Pp. 1907-1921. DOI: 10.1177/1081286516649990
13. Luongo A., Zulli D. A non-linear one-dimensional model of cross-deformable tubular beam // International Journal of Non-Linear Mechanics. 2014. Vol. 66. Pp. 33-42. DOI: 10.1016/j.ijnonlinmec.2014.03.008
14. Luongo A., Zulli D., Scognamiglio I. The Brazier effect for elastic pipe beams with foam cores // Thin-Walled Structures. 2018. Vol. 124. Pp. 72-80. DOI: 10.1016/j.tws.2017.11.053

15. Zulli D. A one-dimensional beam-like model for double-layered pipes // *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 2019. Vol. 109. Pp. 50-62. DOI: 10.1016/j.ijnonlinmec.2018.11.006
16. Gonçalves R., Camotim D. GBT deformation modes for curved thin-walled cross-sections based on a mid-line polygonal approximation // *Thin-Walled Structures*. 2016. Vol. 103. Pp. 231-243. DOI: 10.1016/j.tws.2015.12.025
17. Latalski J., Zulli D. Generalized beam theory for thin-walled beams with curvilinear open cross-sections // *Applied Sciences*. 2020. Vol. 10. 7802. DOI: 10.3390/app10217802
18. Лалин В.В., Рыбаков В.А. Конечные элементы для расчета ограждающих конструкций из тонкостенных профилей // *Инженерно-строительный журнал*. 2011. № 8 (26). С. 69-80. DOI: 10.5862/MCE.26.11
19. Рыбаков В.А., Гамаюнова О.С. Напряженно-деформированное состояние элементов каркасных сооружений из тонкостенных стержней // *Строительство уникальных зданий и сооружений*. 2013. № 7 (12). С. 79-123. DOI: 10.18720/CUBS.12.10
20. Tusnín A. Finite element for calculation of structures made of thin-walled open profile rods // *Procedia Engineering*. 2016. Vol. 150. Pp. 1673-1679. DOI: 10.1016/j.proeng.2016.07.149
21. Туснин А.Р. Конечный элемент для численного расчета конструкций из тонкостенных стержней открытого профиля // *Металлические конструкции*. 2009. № 1 (15). С. 73–78.
22. Serpik I.N., Shvyryaev M.V. Finite element modeling of operation for thin-walled open cross section bars to analyze plate-rod systems // *Russian Aeronautics*. 2017. Vol. 60. No. 1. Pp. 34-43. DOI: 10.3103/S1068799817010068
23. Александров А.В., Осокин А.В., Александров А.А. Развитие метода конечных элементов для систем тонкостенных прямолинейных и криволинейных стержней // *Academia. Архитектура и строительство*. 2006. № 4. С. 57-61.
24. Dvorkin E.N., Celentano D., Cuitiño A., Gioia G. A Vlasov beam element // *Computers & Structures*. 1989. Vol. 33. No. 1. Pp. 187-196.
25. Ватин Н.И., Рыбаков В.А. Расчет металлоконструкций: седьмая степень свободы // *СтройПРОФИль*. 2007. №2 (56). С. 60-63.
26. Перельмутер А.В., Сливкер В.И. Расчетные модели сооружений и возможность их анализа. М.: Изд-во ДМК Пресс, 2011. 736 с.
27. Бычков Д.В. Строительная механика стержневых тонкостенных конструкций. М.: Государственное издательство литературы по строительству, архитектуре и строительным материалам, 1962. 476 с.
28. Юрченко В.В. Проектирование каркасов зданий из тонкостенных холодногнутых профилей в среде SCAD Office // *Инженерно-строительный журнал*. 2010. № 8(18). С. 38-46.
29. Перельмутер А.В., Юрченко А.В. О расчете пространственных конструкций из тонкостенных стержней открытого профиля // *Строительная механика и расчет сооружений*. 2012. № 6. С. 18-25.
30. Atavin I.V., Melnikov B.E., Semenov A.S., Chernysheva N.V., Yakovleva E.L. Influence of stiffness of node on stability and strength of thin-walled structure // *Magazine of Civil Engineering*. 2018. Vol. 80. No. 4. Pp. 48-61. DOI: 10.18720/MCE.80.5
31. Чернов С.А. Конечный элемент стержня коробчатого сечения с узлами по контуру сечения // *Автоматизация и современные технологии*. 2014. № 2. С. 9-13.
32. Serpik I., Shkolyarenko R. Refinement of the accounting methodology of bi-moments transfer at the junctions of the I-section bars // *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. 2019. Vol. 365. No. 4. 042011. DOI: 10.1088/1757-899X/365/4/042011
33. Серпик И.Н., Школяренко Р.О. Расчет систем тонкостенных стержней корытообразного профиля с учетом стесненного кручения // *Строительство и реконструкция*. 2018. № 4 (78). С. 31-41.
34. Киселев В.Н., Попков Ю.В. Расчет на кручение тонкостенных стержней с наклонными ребрами жесткости // *Вестник Полоцкого государственного университета. Серия F, Строительство. Прикладные науки*. 2010. № 6. С. 49-55.
35. Yang Y., Lui E.M. Behavior and design of steel I-beams with inclined stiffeners // *Steel and Composite Structures*. 2012. Vol. 12. No. 3. P. 183-205. DOI: 10.12989/scs.2012.12.3.183
36. Prado N.I., Carrillo J., Ospina G., Ramirez-Amaya, D. Experimental assessment of I-shaped steel beams with longitudinal stiffeners under lateral-torsional buckling // *DYNA*. 2018. Vol. 207. No. 85. Pp. 278-287. DOI: 10.15446/dyna.v85n207.71892
37. Серпик И.Н., Школяренко Р.О., Швыряев М.В. Конечно-элементное моделирование работы систем стержней двутаврового профиля с учетом стесненного кручения // *Интеграция, партнерство и инновации в строительной науке и образовании: Сборник материалов международной научной конференции*. М.: Издательство МГСУ, 2016. С. 287-292.
38. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., Fox D. *The Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics*. Oxford: Elsevier, 2014. 672 p.

REFERENCES

1. Vlasov V.Z. Tonkostennyye uprugie sterzhni [Thin-walled elastic rods]. Moscow: Gosudarstvennoye izdatel'stvo fiziko-matematicheskoy literatury, 1959. 568 p. (rus)
2. Slivker V.I. Stroitel'naya mekhanika. Variatsionnyye osnovy [Structural mechanics. Variational foundations]. Moscow: ASV Publ., 2005. 736 p. (rus)
3. Tusnin A.M., Prokich M. Rabota simmetrichnykh dvutavrovyykh sechenij pri razvitiy plasticheskikh deformacij i dejstviy izgibayushchego momenta i bimomenta [Behavior of symmetric steel I-sections under combined bending and torsion actions allowing for plastic deformations]. Magazine of Civil Engineering, 2014. Vol. 49. No. 5. Pp. 44-53. DOI: 10.5862/MCE.49.5 (rus)
4. Wang Z.Q., Zhao J.C., Zhang D.X., Gong J.H. Restrained torsion of open thin-walled beams including shear deformation effects. Journal of Zhejiang University-SCIENCE A. 2012. Vol. 13. No. 4. Pp. 260-273. DOI: 10.1631/jzus.A1100149
5. Choi S., Kim Y.Y. Higher-order Vlasov torsion theory for thin-walled box beams. International Journal of Mechanical Sciences. 2021. Vol. 195. 106231. DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2020.106231
6. Latalski J., Warminski J., Rega G. Bending-twisting vibrations of a rotating hub-thin-walled composite beam system. Mathematics and Mechanics of Solids. 2017. Vol. 22. No. 6. Pp. 1303-1325. DOI: 10.1177/1081286516629768
7. Latalski J., Warminski J. Nonlinear vibrations of a rotating thin-walled composite piezo-beam with circumferentially uniform stiffness (CUS). Nonlinear Dynamics. 2019. Vol. 98. No. 2. Pp. 2509-2529. DOI: 10.1007/s11071-019-05175-3
8. Taig G., Ranzi G. Generalized beam theory (GBT) for stiffened sections. International Journal of Steel Structures. 2014. Vol. 14. Pp. 381-397. DOI: 10.1007/s13296-014-2017-x
9. Piccardo G., Ranzi G., Luongo A. A complete dynamic approach to the Generalized Beam Theory cross-section analysis including extension and shear modes. Mathematics and Mechanics of Solids. 2014. Vol. 19. No. 8. Pp. 900-924. DOI: 10.1177/1081286513493107
10. Piccardo G., Ranzi G., Luongo A. A direct approach for the evaluation of the conventional modes within the GBT formulation. Thin-Walled Structures. 2014. Vol. 74. Pp. 133-145. DOI: 10.1016/j.tws.2013.09.008
11. Ferrarotti A., Piccardo G., Luongo A. A novel straightforward dynamic approach for the evaluation of extensional modes within GBT 'cross-section analysis'. Thin-Walled Structures. 2017. Vol. 114. Pp. 52-69. DOI: 10.1016/j.tws.2017.01.001
12. Piccardo G., Ferrarotti A., Luongo A. Nonlinear generalized beam theory for open thin-walled members. Mathematics and Mechanics of Solids. 2016. Vol. 22. No. 10. Pp. 1907-1921. DOI: 10.1177/1081286516649990
13. Luongo A., Zulli D. A non-linear one-dimensional model of cross-deformable tubular beam. International Journal of Non-Linear Mechanics. 2014. Vol. 66. Pp. 33-42. DOI: 10.1016/j.ijnonlinmec.2014.03.008
14. Luongo A., Zulli D., Scognamiglio I. The Brazier effect for elastic pipe beams with foam cores. Thin-Walled Structures. 2018. Vol. 124. Pp. 72-80. DOI: 10.1016/j.tws.2017.11.053
15. Zulli D. A one-dimensional beam-like model for double-layered pipes. International Journal of Non-Linear Mechanics. 2019. Vol. 109. Pp. 50-62. DOI: 10.1016/j.ijnonlinmec.2018.11.006
16. Gonçalves R., Camotim D. GBT deformation modes for curved thin-walled cross-sections based on a mid-line polygonal approximation. Thin-Walled Structures. 2016. Vol. 103. Pp. 231-243. DOI: 10.1016/j.tws.2015.12.025
17. Latalski J., Zulli D. Generalized beam theory for thin-walled beams with curvilinear open cross-sections. Applied Sciences. 2020. Vol. 10. 7802. DOI: 10.3390/app10217802
18. Lalin V.V., Rybakov V.A. Konechnyye elementy dlya rascheta ogradhdayushchikh konstruktsiy iz tonkostennykh profilyev [The finite elements for design of building walling made of thin-walled beams]. Magazine of Civil Engineering. 2011. Vol. 26. No. 8. Pp. 69-80. DOI: 10.5862/MCE.26.11 (rus)
19. Rybakov V.A., Gamayunova O.S. Napryazhenno-deformirovannoye sostoyaniye elementov karkasnykh sooruzheniy iz tonkostennykh sterzhney [Stress-strain state of elements of frame structures made of thin-walled rods]. Stroitel'stvo unikal'nykh zdaniy i sooruzheniy. 2013. Vol. 12. No. 7. Pp. 79-123. DOI: 10.18720/CUBS.12.10 (rus)
20. Tusnin A. Finite element for calculation of structures made of thin-walled open profile rods. Procedia Engineering. 2016. Vol. 150. Pp. 1673-1679. DOI: 10.1016/j.proeng.2016.07.149
21. Tusnin A.R. Konechnyy element dlya chislennogo rascheta konstruktsiy iz tonkostennykh sterzhney otkrytogo profilya [Finite element for numeric computation of structures of thin walled open profile bars]. Metal Constructions. 2009. Vol.15. No. 1. Pp. 73-78. (rus)
22. Serpik I.N., Shvyryayev M.V. Finite element modeling of operation for thin-walled open cross section bars to analyze plate-rod systems. Russian Aeronautics. 2017. Vol. 60. No. 1. Pp. 34-43. DOI: 10.3103/S1068799817010068
23. Aleksandrov A.V., Osokin A.V., Aleksandrov A.A. Razvitiye metoda konechnykh elementov dlya sistem tonkostennykh pryamolineynykh i krivolineynykh sterzhney [Development of the finite element method for systems of thin-walled straight and curved rods]. Academia. Architecture and Construction. 2006. No. 4. Pp. 57-61. (rus)
24. Dvorkin E.N., Celentano D., Cuitiño A., Gioia G. A Vlasov beam element. Computers & Structures. 1989. Vol. 33. No. 1. Pp. 187-196.
25. Vatin N.I., Rybakov V.A. Raschet metallokonstruktsiy: sed'maya stepen' svobody [An analysis of metal structures: the seventh degree of freedom]. StroyPROFIL'. 2007. Vol. 56. No. 2. Pp. 60-63. (rus)

26. Perelmuter A.V., Slivker V.I. Raschetnyye modeli sooruzheniy i vozmozhnost' ikh analiza [Design models of structures and the possibility of their analysis]. Moscow: DMK Press, 2011. 736 p. (rus)
27. Bychkov D.V. Stroitel'naya mekhanika sterzhnevyykh tonkostennykh konstruksiy [Structural mechanics of rod thin-walled structures]. Moscow: Gosudarstvennoye izdatel'stvo literatury po stroitel'stvu, arkhitekture i stroitel'nyim materialam, 1962. 476 p. (rus)
28. Yurchenko V.V. Proyektirovaniye karkasov zdaniy iz tonkostennykh kholodnognutyykh profiley v srede «SCAD Office» [Designing of steel frameworks from thin-walled cold-formed profiles in SCAD Office]. Magazine of Civil Engineering. 2010. Vol. 18. No.8. Pp. 38–46. DOI: 10.18720/MCE.18.7 (rus)
29. Perelmuter A.V., Yurchenko V.V. O raschete prostranstvennykh konstruksiy iz tonkostennykh sterzhney otkrytogo profilya [On calculation of the spatial structures of thin-walled open section]. Structural Mechanics and Analysis of Constructions. 2012. No. 6. Pp. 18–25. (rus)
30. Atavin, I.V., Melnikov, B.E., Semenov, A.S., Chernysheva, N.V., Yakovleva, E.L. Influence of stiffness of node on stability and strength of thin-walled structure. Magazine of Civil Engineering. 2018. Vol. 80. No. 4. Pp. 48–61. DOI: 10.18720/MCE.80.5
31. Chernov S.A. Konechnyy element sterzhnya korobchatogo secheniya s uzлами po konturu secheniya [The finite element of the box-section rod with nodes along the section contour]. Avtomatizatsiya i sovremennyye tekhnologii. 2014. No. 2. Pp. 9–13. (rus)
32. Serpik I., Shkolyarenko R. Refinement of the accounting methodology of bi-moments transfer at the junctions of the I-section bars. IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. 2019. Vol. 365. No. 4. 042011. DOI: 10.1088/1757-899X/365/4/042011
33. Serpik I.N., Shkolyarenko R.O. Raschet sistem tonkostennykh sterzhney korytoobraznogo profilya s uchetom stesennogo krucheniya [Calculation of thin-walled systems of channel bars taking into account the restrained torsion]. Stroitel'stvo i rekonstruktsiya. 2018. Vol. 78. No. 4. Pp. 31–41. (rus)
34. Kiselev V.N., Popkov Y.V. Raschet na kruchenie tonkostennykh sterzhney s naklonnymi rebrami zhestkosti [Torsion estimate for thin-walled rods with inclined stiffening ribs]. Vestnik Polockogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya F, Stroitel'stvo. Prikladnye nauki. 2010. No. 6. Pp. 49–55. (rus)
35. Yang Y., Lui E.M. Behavior and design of steel I-beams with inclined stiffeners. Steel and Composite Structures. 2012. Vol. 12. No. 3. P. 183–205. DOI: 10.12989/scs.2012.12.3.183
36. Prado N.I., Carrillo J., Ospina G., Ramirez-Amaya, D. Experimental assessment of I-shaped steel beams with longitudinal stiffeners under lateral-torsional buckling. DYNA. 2018. Vol. 207. No. 85. Pp. 278–287. DOI: 10.15446/dyna.v85n207.71892
37. Serpik I.N., Shkolyarenko R.O., Shvyryayev M.V. Konechno-elementnoye modelirovaniye raboty sistem sterzhney dvutavrovogo profilya s uchetom stesennogo krucheniya [Finite-element modeling of the operation of I-beam rod systems taking into account constrained torsion]. Integratsiya, partnerstvo i innovatsii v stroitel'noy nauke i obrazovanii: Sbornik materialov mezhdunarodnoy nauchnoy konferentsii [Integration, partnership and innovation in building science and education: Proceedings of the international scientific conference]. Moscow: Izdatel'stvo MGSU, 2016. Pp. 287–292. (rus)
38. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., Fox D. The Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics. Oxford: Elsevier, 2014. 672 p.

Информация об авторах:

Серпик Игорь Нафтольевич

ФГБОУ ВО «Брянский государственный инженерно-технологический университет», г. Брянск, Россия, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой прикладной механики и физики.

E-mail: inserpik@gmail.com

Школяренко Роман Олегович

ФГБОУ ВО «Брянский государственный инженерно-технологический университет», г. Брянск, аспирант.

E-mail: shkroman130@mail.ru

Information about authors:

Serpik Igor N.

Bryansk State Engineering Technological University, Bryansk, Russia, doctor of engineering, professor, head of the department of applied mechanics and physics.

E-mail: inserpik@gmail.com

Shkolyarenko Roman O.

Bryansk State Engineering Technological University, Bryansk, Russia, postgraduate student.

E-mail: shkroman130@mail.ru