

А.Г. КОЛЕСНИКОВ¹

¹ФГБОУ ВО «Юго-Западный государственный университет», г. Курск, Россия

НЕЛИНЕЙНЫЕ МЕТОДЫ МЕХАНИКИ ДЕРЕВЯННЫХ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК НА ПРЯМОУГОЛЬНОМ ПЛАНЕ

Аннотация. В статье рассматриваются конструкции покрытий зданий и сооружений в виде деревянных пологих оболочек на прямоугольном плане. Приводится вывод уравнений с учетом ортотропии работы материала и геометрической нелинейности работы тонкостенной конструкции. Дается методика решения систем уравнений с помощью метода Бубнова-Галёркина. Моделируется работа конструкции с различными способами закрепления краёв. Исследуется влияние соотношения модулей упругости во взаимно перпендикулярных направлениях, формы, толщины конструкции на значение напряжений, критической нагрузки и нижних частот малых свободных колебаний. Результаты приведённых исследований приводятся в безразмерном виде и иллюстрируются графиками, что делает удобным использование их в инженерных расчетах. Даются рекомендации по корректировке формы и толщины конструкции покрытий в виде пологих оболочек для увеличения их несущей способности или уменьшения расхода материала.

Ключевые слова: пологая оболочка, устойчивость конструкций, деревянные конструкции, геометрическая нелинейность, напряженно-деформированное состояние.

A.G. KOLESNIKOV¹

¹Southwest State University, Kursk, Russia

THE SUPPORT BONDS RIGIDITY INFLUENCES ON THE CARRYING CAPACITY REDUCTION OF THE SHALLOW SHELLS ON A RECTANGULAR PLAN

Abstract. The coatings construction of buildings and structures in the form of wooden shallow shells on a rectangular plan are considered. The orthotropic of the material and the geometric nonlinearity of the thin-walled structure taken into account in the equations. The Bubnov-Galerkin method is used to solve differential equations of wooden shallow shells with different supports. The influences of the ratio of elasticity in mutually perpendicular directions, shape and thickness of a structure on the value of stresses, critical load and low frequencies of small values of vibrations are investigated. The investigations results are given in dimensionless form and graphs are shown. This makes them useful in engineering calculations. Recommendations for adjusting the shape and thickness of the structure of coatings in the form of shallow shells to increase their bearing capacity or reduce material consumption are given.

Keywords: shallow shell, stability of structures, wooden structures, geometric nonlinearity, stress-strain state.

Введение.

Конструкции покрытий в виде деревянных оболочек получили широкое распространение, особенно в северных широтах [1]. При этом придание конструкциям небольшой (не более 1/5 меньшего размера в плане) стрелы подъема позволяет значительно увеличить несущую способность и уменьшить количество используемого материала по

отношению к плоским конструкциям и не требуют устройства затяжек или возведения контрфорсов, которые необходимы при использовании купольных покрытий. Это в некоторой степени усложняет процедуру расчета и возведения, однако имеет очевидные преимущества при эксплуатации здания.

Изучению деревянных конструкций в виде оболочек в настоящее время уделяется значительное внимание во всем мире. Проводятся исследования устойчивости [2,3], прочности [4] и колебаний конструкций [5-8], в том числе на упругом основании [9] и при учете сложного напряженного состояния [10]. Интересны работы, анализирующие поведение многослойных [11] конструкций и работу конструкций в нелинейной стадии деформирования [12, 13], результаты которых могут быть использованы для моделирования деревянных тонких пологих оболочек.

Часто перед проектировщиками стоят задачи не только расчета деревянных пространственных конструкций, но и нахождения их оптимальных параметров, поэтому разработка методов их анализа является важной задачей. В настоящее время большинство таких конструкций рассчитываются и исследуются при помощи программного обеспечения, основанного на методе конечных элементов [14, 15], что удобно для инженерного проектирования. В решении некоторых задач проектирования, а особенно синтеза и оптимизации конструкций более точные результаты можно получить с использованием численных методов прямого вариационного исчисления [16, 17].

Разработка численных методов расчета и оптимизации тонкостенных деревянных конструкций покрытий, работающих в нелинейной стадии деформирования остается актуальной задачей.

Материалы и методы

В соответствии со строением древесины моделировался ортотропный материал, имеющий определенные количественные показатели прочности в двух характерных направлениях – вдоль и поперек волокон, не делая при этом различия между прочностью древесины в радиальном и тангенциальном направлениях.

Дифференциальные уравнения пологих ортотропных оболочек на прямоугольном плане с учетом геометрической нелинейности работы могут быть записаны в виде [16, 17]:

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{h} \left(\frac{1}{E_x} \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} + \frac{1}{E_y} \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} - \frac{\nu_y}{E_y} \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} - \frac{\nu_x}{E_x} \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{1}{G} \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} \right) + \\ & + k_y \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + k_x \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2k_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0, \\ & h^3 \left(D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + D_x \nu_y \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + D_y \nu_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{1}{3} G \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \right) - \\ & - \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \left(k_x + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \left(k_y + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + 2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \left(k_{xy} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) - Z = 0. \end{aligned} \right. \quad (1)$$

где ϕ – функция усилий, w – прогиб, $k_x \approx \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$, $k_y \approx \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$ – кривизны срединной поверхности оболочки, $k_{xy} \approx \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$ – кручение срединной поверхности оболочки, $F = F(x, y)$ – уравнение срединной поверхности оболочки при начальном нагружении.

$$F(x, y) = f \left[\alpha \left(\frac{x}{a} \right)^{2\xi} + \beta \left(\frac{y}{b} \right)^{2\xi} + 1 \right]. \quad (2)$$

где f – стрела подъема в центре оболочки,

$\alpha = -\frac{f_1}{f}$, $\beta = -\frac{f_2}{f}$ – параметры, характеризующие форму оболочки,

f_1, f_2 – стрелы подъема опорных арок оболочки,

f – стрела подъема в центре конструкции,

ξ – параметр формы срединной поверхности оболочки, изменяющийся в пределах $[0,5,2]$,

a, b – размеры в плане.

Так как рассматриваются большепролетные тонкие конструкции, то прежде всего учитывается устойчивость деревянных оболочек.

Безразмерный коэффициент интенсивности верхней критической нагрузки имеет вид:

$$p_{cr} = \frac{\bar{p}a^4}{Ef^4}. \quad (3)$$

где

$$p = \frac{\psi_1}{t^4} \left(\left(t^2 \psi_2^2 \bar{J}_2^2 - 3\psi_3 (\psi_4 + t^2 \psi_5 \bar{J}_2^2) \right)^{3/2} + t\psi_2 \bar{J}_2 \left(t^2 \psi_2^2 \bar{J}_2^2 - \frac{9}{2} \psi_3 (\psi_4 + t^2 \psi_5 \bar{J}_2^2) \right) \right). \quad (4)$$

$$\psi_1 = \frac{\bar{J}_1^2 \bar{J}_4^2}{54 \bar{J}_3^4}, \psi_2 = \frac{3\bar{J}_3}{\bar{J}_1 \bar{J}_4}, \psi_3 = \frac{2\bar{J}_3^2}{\bar{J}_1 \bar{J}_4}, \psi_4 = \frac{\bar{J}_5}{12(1-\nu_x \nu_y) \bar{J}_4}, \psi_5 = \frac{1}{\bar{J}_1 \bar{J}_4}. \quad (5)$$

$$\bar{J}_1 = E_x h a^2 J_1, \bar{J}_2 = \frac{a^2}{f} J_2, \bar{J}_3 = a^2 J_3, \bar{J}_4 = \frac{1}{a^2} J_4, \bar{J}_5 = \frac{12(1-\nu_x \nu_y) a^2}{E_x h^3} J_5. \quad (6)$$

$$J_1 = \int_{-a}^a \int_{-b}^b \left(\frac{1}{h E_x} \frac{\partial^4}{\partial y^4} \phi + \frac{1}{h E_y} \frac{\partial^4}{\partial x^4} \phi - \frac{\nu_y}{h E_y} \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} \phi - \frac{\nu_x}{h E_x} \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} \phi + \frac{1}{h G} \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} \phi \right) \bar{w} dx dy, \quad (7)$$

$$J_2 = \int_{-a}^a \int_{-b}^b \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x \partial y} \right) \bar{w} dx dy, \quad (8)$$

$$J_3 = \int_{-a}^a \int_{-b}^b (\Delta \bar{w}) \bar{w} dx dy, J_4 = \int_{-a}^a \int_{-b}^b Z \bar{w} dx dy, \quad (9)$$

$$J_5 = \int_{-a}^a \int_{-b}^b \left(D_x \frac{\partial^4}{\partial x^4} w + D_x \nu_y \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} w + D_y \frac{\partial^4}{\partial y^4} w + D_y \nu_x \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} w + \frac{1}{3} G h^3 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} w \right) \bar{w} dx dy \quad (10)$$

$$D_x = \frac{E_x}{12(1-\nu_x \nu_y)}, D_y = \frac{E_y}{12(1-\nu_x \nu_y)}, G = \frac{E_x E_y}{E_x(1+\nu_y) + E_y(1+\nu_x)}; t = \frac{h}{f}; \quad (11)$$

E_x, E_y - модули упругости во взаимно перпендикулярных направлениях,

ν_x, ν_y - коэффициенты Пуассона во взаимно перпендикулярных направлениях,

h – толщина конструкции деревянной оболочки.

Эквивалентные напряжения, возникающие в ортотропной полой оболочке, принимаются по четвертой гипотезе прочности. Безразмерный коэффициент напряжений имеет вид [18]:

$$\sigma = \frac{\bar{\sigma} a^4}{\sqrt{E_x E_y} f^4}, \quad (12)$$

где

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{2} [(\bar{\sigma}_1 - \bar{\sigma}_2)^2 + (\bar{\sigma}_3 - \bar{\sigma}_2)^2 + (\bar{\sigma}_2 - \bar{\sigma}_1)^2]}, \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_1 = & \left| \frac{6}{t} \bar{D}_x \bar{B} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} Z_x Z_y + \nu_y \frac{\partial^2}{\partial y^2} Z_y Z_x \right) \right| + \left| \bar{A} \frac{\partial^2}{\partial x^2} Z_x Z_y t \right| + \\ & + \left| \frac{g}{t^2} \bar{D}_x \bar{B} \left(\frac{\partial^3}{\partial y^3} Z_y Z_x + \frac{\partial}{\partial y} Z_y \frac{\partial^2}{\partial x^2} Z_x \right) \right|, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_2 = & \left| \frac{6}{t} \bar{D}_y \bar{B} \left(\nu_x \frac{\partial^2}{\partial x^2} Z_x Z_y + \frac{\partial^2}{\partial y^2} Z_y Z_x \right) \right| + \left| \bar{A} \frac{\partial^2}{\partial x^2} Z_x Z_y t \right| + \\ & + \left| \frac{g}{t^2} \bar{D}_y \bar{B} \left(\frac{\partial^3}{\partial y^3} Z_y Z_x + \frac{\partial}{\partial y} Z_y \frac{\partial^2}{\partial x^2} Z_x \right) \right|, \end{aligned} \quad (15)$$

$$\overline{\sigma}_3 = \left| \frac{6}{t} G \bar{B} \frac{\partial}{\partial x} Z_x \frac{\partial}{\partial y} Z_y \right| + \left| \bar{A} \frac{\partial}{\partial x} Z_x \frac{\partial}{\partial y} Z_y t \right|, g = \frac{f}{a}, \quad (16)$$

$\bar{A}, \bar{B}$ - неизвестные метода Бубнова-Галеркина, Z_x и Z_y - балочные функции В.В. Власова [19].

Рассматривались малые колебания пологих ортотропных оболочек около положения, определяемого некоторой начальной нагрузкой. Начальное состояние определялось решением системы нелинейных уравнений теории геометрически нелинейных пологих оболочек (1).

Использовалась система нелинейных дифференциальных уравнений динамики пологих оболочек с учетом ортотропных свойств деревянных конструкций:

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{h} \left(\frac{1}{E_x} \frac{\partial^4}{\partial y^4} \Psi + \frac{1}{E_y} \frac{\partial^4}{\partial x^4} \Psi - \frac{\nu_y}{E_y} \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} \Psi - \frac{\nu_x}{E_x} \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} \Psi + \frac{1}{G} \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} \Psi \right) + \\ & + k_y \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + k_x \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - 2k_{xy} \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} = 0, \\ & h^3 \left(D_x \frac{\partial^4}{\partial x^4} W + D_x \nu_y \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} W + D_y \frac{\partial^4}{\partial y^4} W + D_y \nu_x \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} W + \frac{1}{3} G \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} W \right) - \\ & - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} \left(k_x + \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right) - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \left(k_y + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) + 2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} \left(k_{xy} + \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right) + \rho h \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0. \end{aligned} \right. \quad (17)$$

Где ρ - плотность материала.

Функции напряжений и перемещений представлялись в виде суммы функций, определяющих начальное равновесное состояние оболочки, и вариаций отклонений системы от начального равновесного состояния δw и $\delta \phi$:

$$\Psi = \phi + \delta \phi, W = w + \delta w, \quad (18)$$

$$\delta \phi(x, y, t) = \bar{A} \bar{w}(x, y) \sin \omega t, \delta w(x, y, t) = \bar{B} \bar{w}(x, y) \sin \omega t, \bar{w}(x, y) = Z_x Z_y. \quad (19)$$

Проведя преобразования и введения новых обозначений, получили выражение для определения квадрата нижней частоты малых свободных колебаний:

$$\omega^2 = \frac{\bar{J}_3 \bar{B}^2}{\bar{J}_1 \bar{J}_5} + \frac{2 \bar{J}_2 \bar{J}_3 \bar{B}}{\bar{J}_1 \bar{J}_5} + \frac{1}{t^2} \frac{\bar{J}_1}{12(-\nu_x \nu_y) \bar{J}_5} + \frac{\bar{J}_2^2}{\bar{J}_1 \bar{J}_5}, \quad (20)$$

где $\bar{J}_1 \div \bar{J}_5$ - коэффициенты, определяемые по (6).

Пересчет в размерные величины дает:

$$\omega_0^2 = \frac{E f^2}{\rho a^4} \omega^2. \quad (21)$$

Полученные выражения для определения критической нагрузки, эквивалентных напряжений и нижней частоты малых свободных колебаний позволяют выполнять расчеты деревянных пологих оболочек с учетом ортотропии материала, а также проводить исследования влияния различных параметров на напряженно-деформированное состояние конструкций.

Результаты

Для примера рассматривалась конструкция квадратной деревянной оболочки с соотношением толщины к размеру в плане $h/a = 1/10$ и отношением стрелы подъема к размеру в плане $f/a = 1/20$. На рисунке 1 показано изменение значения критической нагрузки (а) и эквивалентных напряжений в центре (б) в зависимости от соотношения модулей упругости в двух взаимоперпендикулярных направлениях.

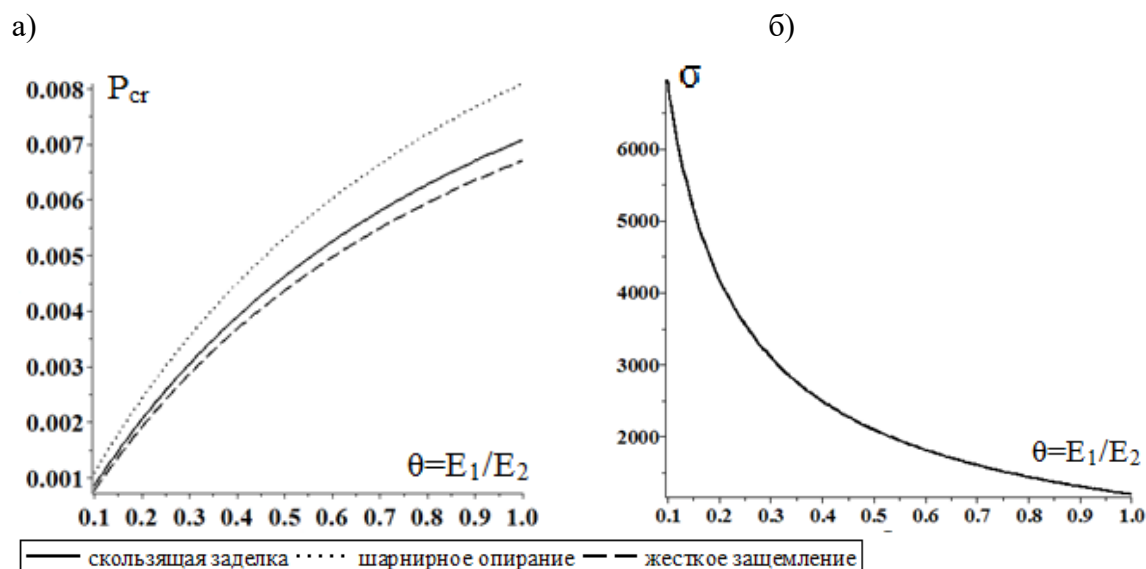


Рисунок 1 – Зависимость критической нагрузки (а) и эквивалентных напряжений в центре конструкции (б) от параметра $\theta = E_1/E_2$

Графики наглядно иллюстрируют опасность потери устойчивости и прочности конструкции при снижении соотношения модулей упругости в двух взаимно перпендикулярных направлениях.

При этом, значение критической нагрузки и эквивалентных напряжений в центре конструкции может быть снижено изменением толщины и формы конструкции (рисунок 2).

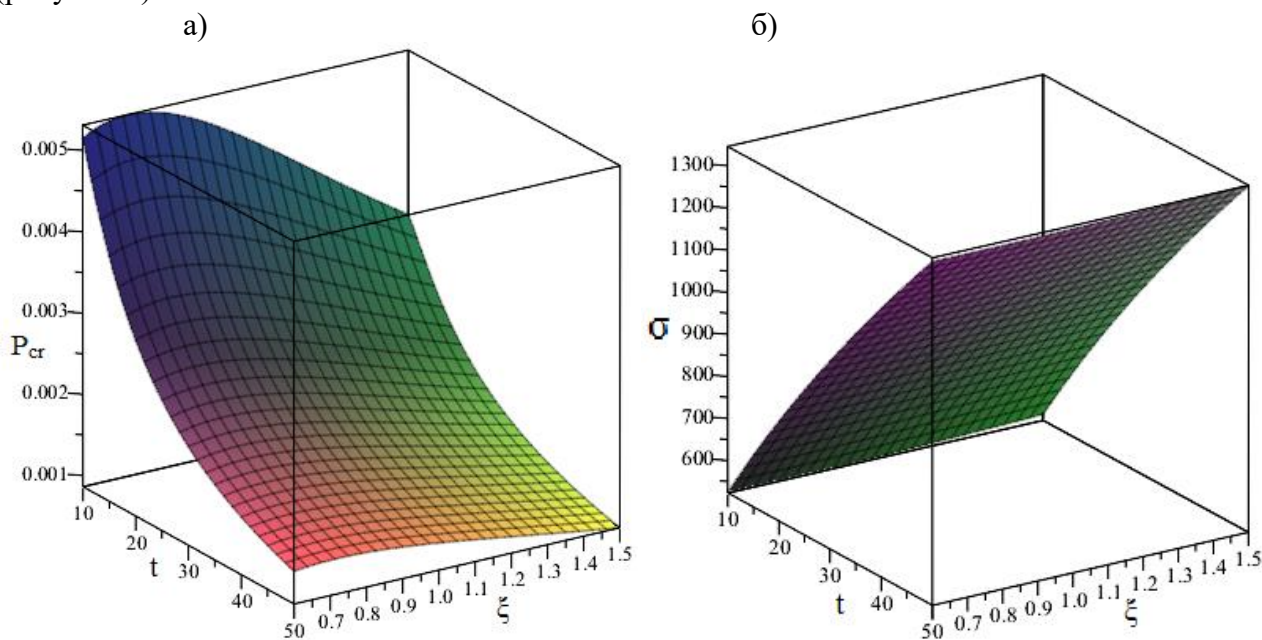


Рисунок 2 – Зависимость критической нагрузки (а) и эквивалентных напряжений в центре конструкции (б) от соотношения относительной толщины t и параметра формы ξ

Принято считать, что пологие оболочки (с соотношением стрелы подъема к наименьшему размеру в плане $f/a \leq 1/5$) теряют устойчивость, а подъёмистые – прочность. Однако при учете ортотропных свойств материала и геометрической нелинейности работы, существуют соотношения характеристик, при которых необходим расчет на прочность даже пологих конструкций (рисунок 3).

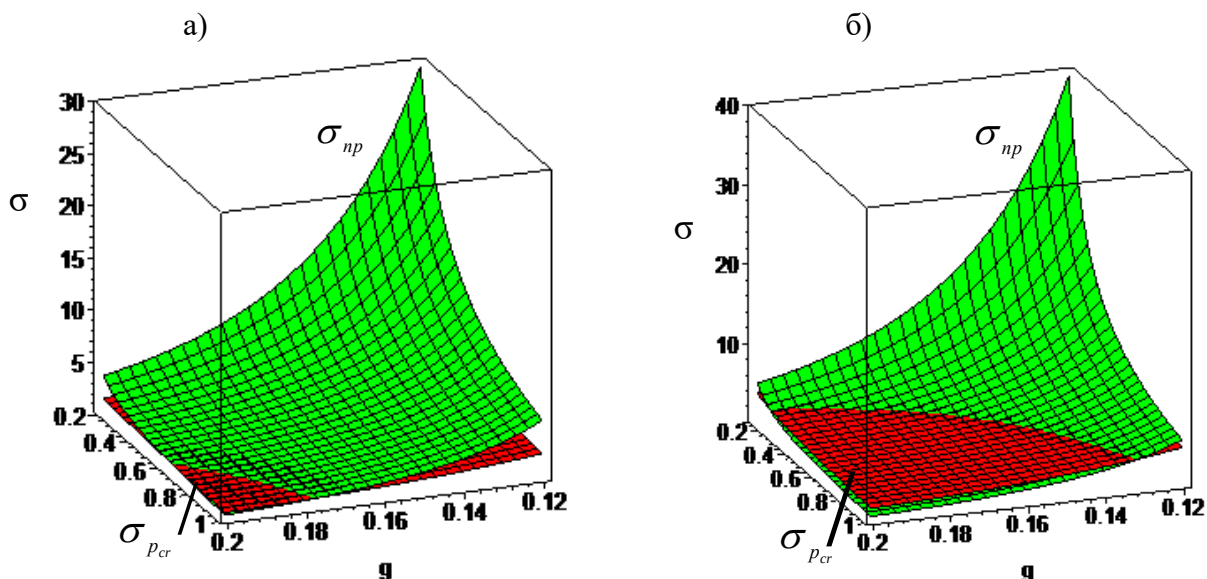


Рисунок 3 – Области потери прочности и устойчивости при различных соотношениях стрелы подъема и отношения модулей упругости в двух взаимно перпендикулярных направлениях при:
а) $\xi=2$, $t=200$, б) $\xi=0,7$, $t=10$

На рисунке 4 показано изменение квадрата нижней частоты малых свободных колебаний от соотношения модулей упругости в двух взаимно перпендикулярных направлениях.

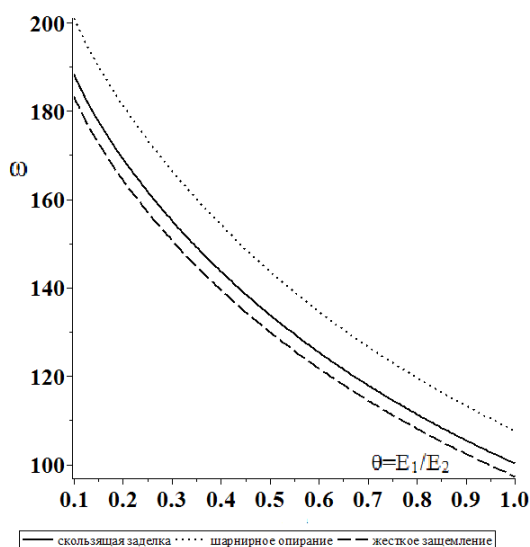


Рисунок 4 – Зависимость значения нижней частоты малых свободных колебаний от параметра $\theta=E_1/E_2$

Графики показывают возможность использования представленной численной методики определения напряженно-деформированного состояния пологих ортотропных геометрически нелинейных оболочек на прямоугольном плане для анализа влияния свойств материала (отношения модулей упругости в двух взаимно перпендикулярных отношениях) и размеров конструкции (толщины, формы конструкции, стрелы подъема) на исследуемые характеристики.

Обсуждение

Методика определения напряженно-деформированного состояния деревянных пологих оболочек на прямоугольном плане позволяет проводить исследования и подбирать форму и размеры конструкции исходя из условий проектирования.

Представление уравнений (3, 12, 20) в безразмерном виде удобно для получения зависимостей и анализа вносимых изменений без привязки к конкретным размерам.

Задание функции срединной поверхности $F(x,y)$, входящей в систему (1) в виде поверхности переноса (2) позволило исследовать влияние коэффициента изменения формы образующей ξ на напряженно-деформированное состояние конструкции. Для данного типа конструкций оптимальная форма колеблется между сферической и цепной функциями.

Рисунок 1 показывает, что учет ортотропии материала при определении критической нагрузки и напряжений значительно уточняет расчет конструкции. Не учет этих свойств может привести к неверным, завышенным данным о несущей способности. Рисунок 4 иллюстрирует этот тезис при определении нижних частот малых свободных колебаний.

На изменение значений напряжений и критической нагрузки в значительной степени влияет форма конструкции и её толщина, причем при различных значениях модулей упругости в двух взаимно перпендикулярных направлениях. Изменяя эти параметры (рисунок 2) можно получить необходимые значения при конкретных исходных данных.

Важно понимать, что при определённых соотношениях формы и толщины конструкции, даже пологие оболочки необходимо рассчитывать на потерю прочности. График на рисунке 3,а построен для конструкции с параметром формы срединной поверхности $\xi=2$ и относительной толщиной $t=200$ (при таких значениях эквивалентное напряжение в центре оболочки максимально), график 3, б – для конструкции с $\xi=0,7$, $t=10$ (эквивалентное напряжение в центре оболочки минимально). При расположении зелёной (светлой) области над красной (тёмной) расчет следует производить на потерю устойчивости, в противном случае – исходя из потери прочности. При значениях, соответствующих границе двух областей деревянные пологие оболочки следует рассчитывать исходя как из предпосылок потери прочности, так и устойчивости.

Из графиков видно, что существуют различные комбинации параметров конструкции, дающие одинаковые значения напряжений, критической нагрузки и нижних частот малых свободных колебаний. Следовательно, можно найти оптимальное сочетание этих параметров с ограничением величины напряжения, критической нагрузки или толщины (объема) ортотропной полой оболочки. Это может обеспечить значительную экономию веса строительных конструкций [18, 19].

Выводы

Предложенная методика может быть использована для определения и исследования напряженно-деформированного состояния конструкций деревянных пологих оболочек с учетом геометрической нелинейности работы. Построенные графики зависимости напряжений, критической нагрузки и нижней частоты малых свободных колебаний от различных параметров позволили оценить работу конструкций с учетом изменения различных внутренних факторов и ортотропных свойств материала. Реализация методики в программном комплексе [20] позволяет использовать её при расчете реальных конструкций. Проведенные исследования позволили дать рекомендации по рациональным значениям формы и толщины конструкций деревянных оболочек.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шаталова Д.В., Шведов В.Н. История возникновения и развития конструктивных решений соединений кружально-сетчатых сводов // Труды Новосибирского государственного архитектурно-строительного университета (Сибстрин). 2020. Т. 23. № 1 (75). С. 105-113.
2. Арленинов Д.К., Потапова Т.В., Рогожина А.В. О методике расчета сжато-изгибаемых деревянных элементов // Строительная механика и расчет сооружений. 2019. № 6 (287). С. 19-21.
3. Погорельцев А.А., Турковский С.Б., Кондрашев И.А. Большепролётные купола из клеёной древесины с жёсткими узлами системы ЦНИИСК // Строительная механика и расчет сооружений. 2017. № 4 (273). С. 63-70.

4. Глухих В.Н., Кирютина С.Е., Богданова А.С. Влияние начальных напряжений в древесине на прочность и формоустойчивость деревянных конструкций // Известия Петербургского университета путей сообщения. 2017. Т. 14. № 3. С. 523-531.
5. Sofiyev A.H., Omurtag M.H., Schnack E. The vibration and stability of orthotropic conical shells with non-homogeneous material properties under a hydrostatic pressure. 2009. J. Sound Vib. 319: 963–983.
6. Jouneghani F.Z., Dimitri R., Baccocchi M., Tornabene F. Free vibration analysis of functionally graded porous doubly-curved shells based on the first-order shear deformation theory. 2017. Appl. Sci. 7 (12): 1252.
7. Eisenberger M., Godoy L.A. Navier type exact analytical solutions for vibrations of thin-walled shallow shells with rectangular planform. Thin-Walled Structures. 23 December 2020. Volume 160: 107356.
8. Sofiyev A.H., Turan F. On the nonlinear vibration of heterogenous orthotropic shallow shells in the framework of the shear deformation shell theory. Thin-Walled Structures. 19 February 2021.
9. Nie G., Chan C., Yao J., He X. 2009. Asymptotic solution for nonlinear buckling of orthotropic shells on elastic foundation. AIAA Journal 47-7. 2009. Pp.1772-1783.
10. Пятикрестовский К.П. Расчет деревянных пространственных конструкций при сложном напряженном состоянии // Строительная механика и расчет сооружений. 2020. № 5 (292). С. 17-24.
11. Trushin S., Zhavoronok S. Nonlinear analysis of multilayered composite shells using finite difference energy method. Space Structures 5 proceedings of the Fifth International Conference on Space Structures, held at the University of Surrey. 2002. Pp. 1527-1533.
12. Jingchao Wang, Zheng LiangLi & Wei Yu. 2019. Structural similitude for the geometric nonlinear buckling of stiffened orthotropic shallow spherical shells by energy approach. Thin-Walled Structures. November 2018. Volume 138: 430-457.
13. Пятикрестовский К.П., Соколов Б.С. Нелинейный расчет статически неопределимых деревянных конструкций и оптимизация размеров сечений ребер куполов // Строительная механика и расчет сооружений. 2019. № 5 (286). С. 48-56.
14. Клюкин А.А. Рекомендации по расчету покрытия-оболочки с ребрами из цельной древесины // Инновации и инвестиции. 2021. № 2. С. 172-174.
15. Погорельцев А.А., Пятикрестовский К.П. Дальнейшее развитие и совершенствование норм проектирования конструкций из древесины // Промышленное и гражданское строительство. 2019. № 3. С. 35-41.
16. Ступишин Л.Ю., Колесников А.Г. Восстановление несущей способности и эксплуатационных характеристик геометрически нелинейных пологих оболочек на прямоугольном плане // Промышленное и гражданское строительство. 2014. № 2. С. 51-53.
17. Stupishin L., Kolesnikov A., Nikitin K. Variable form forming investigation for flexible shallow shells on circular base // Asian Journal of Civil Engineering. 2017. Т. 18. № 2. С. 163-171.
18. Ступишин Л.Ю., Колесников А.Г., Соломатников И.В. Исследование оптимальных форм пологих геометрически нелинейных оболочек по критерию максимума значений низших частот малых свободных колебаний // Известия Юго-Западного государственного университета. 2011. № 5-2 (38). С. 313-316.
19. Stupishin L.Y., Kolesnikov A.G., Nikitin K.E. Optimal design of flexible shallow shells on elastic foundation // Journal of Applied Engineering Science. 2017. Т. 15. № 3. С. 349-353.
20. Колесников А.Г., Ступишин Л.Ю., Толмачева Т.А. Программа для определения нижней частоты малых свободных колебаний изотропных пологих геометрически нелинейных оболочек на прямоугольном плане с постоянной толщиной и переменной формой срединной поверхности // Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ RU 2015660771, 08.10.2015. Заявка № 2015617664 от 20.08.2015.

REFERENCES

1. Shatalova D.V., Shvedov V.N. Istoriya vzniknoveniya i razvitiya konstruktivnyh reshenij soedinenij kruzhal'no-setchatyh svodov [The history of the emergence and development of constructive solutions for the connections of circular mesh vaults]. Trudy Novosibirskogo gosudarstvennogo arhitekturno-stroitel'nogo universiteta (Sibstrin). 2020. Vol. 23. 1 (75). Pp. 105-113. (rus)
2. Arleninov D.K., Potapova T.V., Rogozhina A.V. O metodike rascheta szhato-izgibaemyh derevyannyh elementov [On the method of calculating compressed-bendable wooden elements]. Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzhenij. 2019. 6 (287). Pp. 19-21. (rus)
3. Pogorel'cev A.A., Turkovskij S.B., Kondrashev I.A. Bol'sheprolyotnye kupola iz kleyonoy drevesiny s zhyostkimi uzlami sistemy CNIISK [Large-span domes made of glued timber with rigid nodes of the TsNIISK system]. Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzhenij. 2017. 4 (273). Pp. 63-70. (rus)
4. Gluhih V.N., Kiryutina S.E., Bogdanova A.S. Vliyanie nachal'nyh napryazhenij v drevesine na prochnost' i formoustojchivost' derevyannyh konstrukcij [Influence of initial stresses in wood on the strength and form stability of wooden structures]. Izvestiya Peterburgskogo universiteta putej soobshcheniya. 2017. 14 (3). Pp. 523-531. (rus)
5. Sofiyev A.H., Omurtag M.H., Schnack E. The vibration and stability of orthotropic conical shells with non-homogeneous material properties under a hydrostatic pressure. J. Sound Vib. 319. 2009. Pp. 963–983.

6. Jouneghani F.Z., Dimitri R., Baccocchi M., Tornabene F. Free vibration analysis of functionally graded porous doubly-curved shells based on the first-order shear deformation theory. *Appl. Sci.* 2017. 7 (12): 1252.
7. Eisenberger M., Godoy L.A. Navier type exact analytical solutions for vibrations of thin-walled shallow shells with rectangular planform. *Thin-Walled Structures*. 23 December 2020. Volume 160: 107356.
8. Sofiyev A.H., Turan F. On the nonlinear vibration of heterogenous orthotropic shallow shells in the framework of the shear deformation shell theory. *Thin-Walled Structures*. 19 February 2021.
9. Nie G., Chan C., Yao J., He X. Asymptotic solution for nonlinear buckling of orthotropic shells on elastic foundation. *AIAA Journal* 47-7. 2009. Pp.1772-1783.
10. Pyatikrestovskij K.P. Raschet derevyannyh prostranstvennyh konstrukcij pri slozhnom napryazhenom sostoyanii [Calculation of wooden spatial structures in a complex stress state]. *Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzhenij*. 2020. 5 (292). Pp. 17-24. (rus)
11. Trushin S., Zhavoronok S. Nonlinear analysis of multilayered composite shells using finite difference energy method. *Space Structures 5 proceedings of the Fifth International Conference on Space Structures, held at the University of Surrey*. 2002. Pp. 1527-1533. (rus)
12. Jingchao Wang, Zheng LiangLi & Wei Yu. Structural similitude for the geometric nonlinear buckling of stiffened orthotropic shallow spherical shells by energy approach. *Thin-Walled Structures*. November 2018. Volume 138: 430-457.
13. Pyatikrestovskij K.P., Sokolov B.S. Nelinejnyj raschet staticheski neopredelimyh derevyannyh konstrukcij i optimizaciya razmerov sechenij reber kupolov [Nonlinear analysis of statically indeterminate timber structures and optimization of the cross-sectional dimensions of the ribs of domes]. *Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzhenij*. 2019. 5 (286). Pp. 48-56. (rus)
14. Klyukin A.A. Rekomendacii po raschetu pokrytiya-obolochki s rebrami iz cel'noj drevesiny [Design guidelines for sheathing with solid wood ribs]. *Innovacii i investicii*. 2021. No. 2. Pp. 172-174. (rus)
15. Pogorel'cev A.A., Pyatikrestovskij K.P. Dal'nejshee razvitie i sovershenstvovanie norm proektirovaniya konstrukcij iz drevesiny [Further development and improvement of standards for the design of timber structures]. *Promyshlennoe i grazhdanskoe stroitel'stvo*. 2019. No. 3. Pp. 35-41. (rus)
16. Stupishin L.Yu., Kolesnikov A.G. Vosstanovlenie nesushchej sposobnosti i ekspluatacionnyh harakteristik geometricheski nelinejnyh pologih obolochek na pryamougol'nom plane [Restoration of bearing capacity and performance characteristics of geometrically nonlinear shallow shells on a rectangular plan]. *Promyshlennoe i grazhdanskoe stroitel'stvo*. 2014. No. 2. Pp. 51-53. (rus)
17. Stupishin L., Kolesnikov A., Nikitin K. Variable form forming investigation for flexible shallow shells on circular base. *Asian Journal of Civil Engineering*. 2017. 18 (2). Pp. 163-171.
18. Stupishin L.Yu., Kolesnikov A.G., Solomatnikov I.V. Issledovanie optimal'nyh form pologih geometricheski nelinejnyh obolochek po kriteriyu maksimuma znachenij nizshih chastot malyh svobodnyh kolebanij [Investigation of the optimal shapes of shallow geometrically nonlinear shells by the criterion of the maximum values of the lowest frequencies of small free vibrations]. *Izvestiya YUgo-Zapadnogo gosudarstvennogo universiteta*. 2011. No. 5-2 (38). Pp. 313-316. (rus)
19. Stupishin L.Y., Kolesnikov A.G., Nikitin K.E. Optimal design of flexible shallow shells on elastic foundation. *Journal of Applied Engineering Science*. 2017. 15 (3). Pp. 349-353.
20. Kolesnikov A.G., Stupishin L.YU., Tolmacheva T.A. Programma dlya opredeleniya nizhnej chastoty malyh svobodnyh kolebanij izotropnyh pologih geometricheski nelinejnyh obolochek na pryamougol'nom plane s postoyannoju tolshchinoju i peremennoj formoj sredinnoj poverhnosti [Program for determining the lower frequency of small free vibrations of isotropic shallow geometrically nonlinear shells on a rectangular plan with constant thickness and variable shape of the middle surface]. RU 2015660771, 2015. (rus)

Информация об авторе:

Колесников Александр Георгиевич

ФГБОУ ВО «Юго-Западный государственный университет», г. Курск, Россия,
кандидат технических наук, доцент кафедры УЗС.

E-mail: ag-kolesnikov@mail.ru

Information about author:

Kolesnikov Alexander G.

Southwest State University, Kursk, Russia,
candidate of technical sciences, docent of the department of UBS.

E-mail: ag-kolesnikov@mail.ru