

О.В. РАДАЙКИН¹, Л.С. САБИТОВ², Л.Ш. АХТЯМОВА³, Т.П. АРАКЧЕЕВ²

¹ООО Инженерный центр «Энергопрогресс», г. Казань, Россия,

²ФБГОУ ВО «Казанский государственный энергетический университет», г. Казань, Россия,

³ФБГОУ ВО «Донской государственный технический университет», г. Ростов-на-Дону, Россия

ОБЩИЙ СЛУЧАЙ РАСЧЁТА СТЕРЖНЕВЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ИЗ АРМИРОВАННОГО БЕТОНА ДИАГРАММНЫМ МЕТОДОМ

Аннотация. В СП 63.13330 общим расчётным случаем для диаграммного метода является косое внецентренное сжатие, при котором учитывается только три компонента внутренних силовых факторов в сечении: продольная сила – N_z – и два изгибающих момента относительно соответствующих осей – M_x и M_y . Остальные три компонента – перерезывающие силы Q_x и Q_y и крутящий момент M_z – остаются вне рассмотрения. Кроме того, для этого случая поиск в доступной литературе, в том числе у основоположников диаграммного метода, вывода расчётных формул не увенчался успехом – во всех источниках они приводятся уже в готовом виде без доказательств. Попытаться восполнить эти пробелы призвана данная статья. Для этого, основываясь на общепринятых в механике выражениях для перемещений стержня, в частности на интеграле перемещений Мора, получены разрешающие выражения диаграммного метода в самом общем виде.

Ключевые слова: армированный бетон, нелинейная деформационная модель, диаграммный метод, диаграммы деформирования.

O.V. RADAYKIN¹, L.S. SABITOV², L.SH. AKHTYAMOVA³, T.P. ARAKCHEEV²

¹Energoprogress Engineering center LLC, Kazan, Russia,

²Kazan state power engineering University, Kazan, Russia,

³Don state technical University, Rostov-on-Don, Russia

GENERAL CASE OF REINFORCED CONCRETE ROD ELEMENTS CALCULATION USING THE DIAGRAM METHOD

Abstract. In SP 63.13330 the general calculation case for the diagram method is oblique off-center compression, which takes into account only three components of internal force factors in the cross section: the longitudinal force- N_z – and two bending moments relative to the corresponding axes – M_x and M_y . The other three components-the Q_x and Q_y transfer forces and the M_z torque – are left out of consideration. In addition, for this case, the search in the available literature, including the founders of the diagram method, for the output of calculation formulas was not successful – in all sources they are given in ready-made form without evidence. This article is intended to try to fill in these gaps. For this purpose, based on the expressions for rod displacements that are generally accepted in mechanics, in particular on the Mora integral of displacements, the resolving expressions of the diagram method are obtained in the most general form.

Keywords: reinforced concrete, nonlinear deformation model, diagram method, deformation diagrams.

Введение

В СП 63.13330 альтернативно методу предельных усилий для расчёта стержневых железобетонных элементов включён также и диаграммный метод. Его отличительная особенность заключается в возможности расчёта по обеим группам предельных состояний проводить по единым формулам, а также получать напряжённо-деформированное состояние

(НДС) рассматриваемых элементов на всех этапах нагружения: от нуля и до разрушения. В указанном своде правил общим расчётным случаем по данному методу является косое внецентренное сжатие, при котором учитывает только три компоненты внутренних силовых факторов в сечении: продольная сила – N_z – и два изгибающих момента относительно соответствующих осей – M_x и M_y . Остальные три компоненты – перерезывающие силы Q_x и Q_y и крутящий момент M_z – остаются вне рассмотрения. Кроме того, для косоугольного внецентренного сжатия поиск в доступной литературе, в том числе у основоположников диаграммного метода [1]-[3], вывода расчётных формул не увенчался успехом – во всех источниках они приводятся уже в готовом виде без доказательств. Попытаться восполнить эти пробелы призвана данная статья.

Модели и методы

В частном случае косоугольного внецентренного сжатия разрешающие уравнения для стержня, показанного на рисунке 1а, известны. Например, в [4] приведены такие выражения:

$$\begin{Bmatrix} N_z \\ M_x \\ M_y \end{Bmatrix} = E \begin{bmatrix} A & -S_x & S_y \\ -S_x & I_x & -I_{xy} \\ S_y & -I_{xy} & I_y \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \varepsilon_z \\ \chi_x \\ \chi_y \end{Bmatrix} = [D] \times \begin{Bmatrix} \varepsilon_z \\ \chi_x \\ \chi_y \end{Bmatrix}, \quad (1)$$

где ε_z – продольные относительные деформации стержня; χ_x, χ_y – кривизны продольной оси стержня относительно соответствующих осей; E – модуль деформаций материала; $A, S_x, S_y, I_x, I_y, I_{xy}$ – геометрические характеристики сечения: площадь, статические моменты, моменты инерции, центробежный момент инерции.

Если принятые оси координат совпадают с главными центральными, то равны нулю статические моменты S_x, S_y и центробежный момент инерции I_{xy} , а матрица жёсткости $[D]$ превращается в диагональную.

Для железобетонного сечения формулу (1) можно переписать так:

$$\begin{Bmatrix} N_z \\ M_y \\ M_x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & -D_{12} & D_{13} \\ -D_{21} & D_{22} & -D_{23} \\ D_{31} & -D_{32} & D_{33} \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \varepsilon_z \\ \chi_x \\ \chi_y \end{Bmatrix} = [D] \times \begin{Bmatrix} \varepsilon_z \\ \chi_x \\ \chi_y \end{Bmatrix}, \quad (2)$$

где для сечения, показанного на рисунке 1б компоненты матрицы жёсткости равны:

$$\begin{aligned} D_{11} &= \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{m-1} v_{b,ij} E_{b,ij} A_{b,ij} + \sum_{k=1}^p v_{s,k} E_{s,k} A_{s,k}, \\ D_{12} = D_{21} &= \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{m-1} v_{b,ij} E_{b,ij} A_{b,ij} y_{bi} + \sum_{k=1}^p v_{s,k} E_{s,k} A_{s,k} y_{s,k}, \\ D_{13} = D_{31} &= \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{m-1} v_{b,ij} E_{b,ij} A_{b,ij} x_{bi} + \sum_{k=1}^p v_{s,k} E_{s,k} A_{s,k} x_{s,k}, \\ D_{22} &= \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{m-1} v_{b,ij} E_{b,ij} A_{b,ij} y_{bi}^2 + \sum_{k=1}^p v_{s,k} E_{s,k} A_{s,k} y_{s,k}^2, \\ D_{23} = D_{32} &= \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{m-1} v_{b,ij} E_{b,ij} A_{b,ij} x_{bi} y_{bi} + \sum_{k=1}^p v_{s,k} E_{s,k} A_{s,k} x_{s,k} y_{s,k}, \\ D_{33} &= \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{m-1} v_{b,ij} E_{b,ij} A_{b,ij} x_{bi}^2 + \sum_{k=1}^p v_{s,k} E_{s,k} A_{s,k} x_{s,k}^2, \end{aligned} \quad (3)$$

где ν_b , ν_s – коэффициенты секущего модуля деформации (по Карпенко Н.И.) или коэффициенты упруго-пластических деформаций (по Мурашёву В.И.) соответственно бетона и арматуры; остальные величины (геометрические) понятны из рисунка 1б.

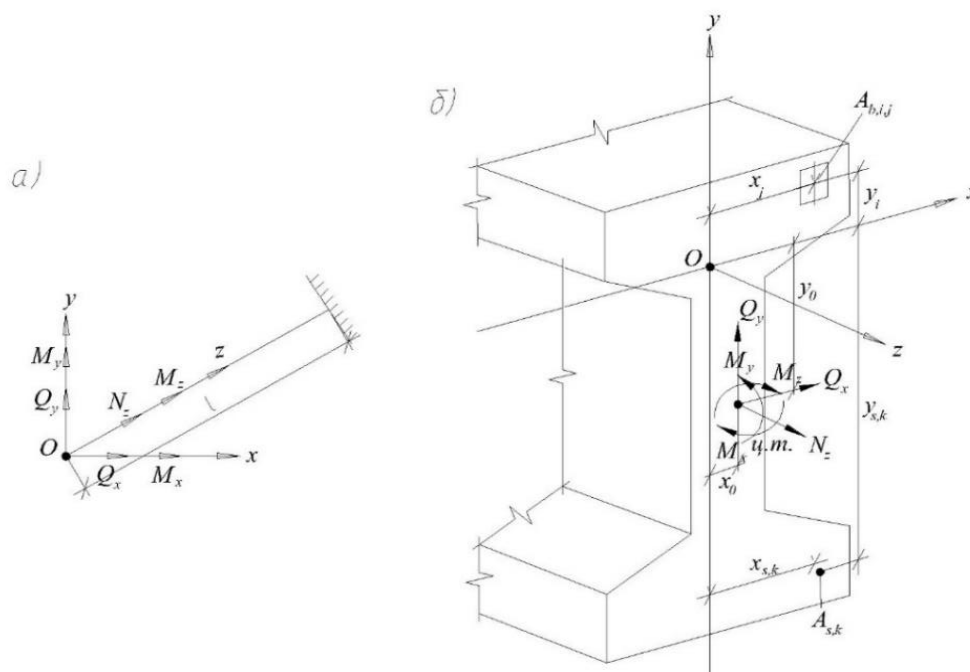


Рисунок 1 - Расчётная схема: а – стержня; б – поперечного сечения

Сравнивая полученные выражения с формулами (8.39)-(8.47) СП 63.13330, находим много схожего.

Отличие свода правил заключается, во-первых, в повороте осей координат Oxy относительно оси Oz на 90° по часовой стрелке, во-вторых, в полном отсутствии знаков «минус» в матрице жёсткости, что связано, видимо, с поворотом осей. Третье отличие заключается в индексации изгибающих моментов: в данной статье используется общепринятое в сопротивлении материалов – нижний индекс у момента обозначает координатную ось, относительно которой происходит вращение (например, момент M_x вызывает вращение относительно оси Ox); в СП 63.13330 – иначе: нижний индекс у момента обозначает координатную ось, вдоль которой действует момент. При этом, хотя в СП и конкретизируется плоскость, в которой действует тот или иной момент, но без этого уточнения вращение может происходить относительно любой из двух оставшихся осей, что вызывает путаницу. Поэтому в своих работах мы используем общепринятые в сопротивлении материалов и строительной механике обозначения.

Решением системы уравнений (2) будет:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_z \\ \chi_x \\ \chi_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & -D_{12} & D_{13} \\ -D_{21} & D_{22} & -D_{23} \\ D_{31} & -D_{32} & D_{33} \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{Bmatrix} N_z \\ M_y \\ M_x \end{Bmatrix} = [D]^{-1} \times \begin{Bmatrix} N_z \\ M_y \\ M_x \end{Bmatrix},$$

Для вывода общего случая расчёта стержня (рисунок 1а) диаграммным методом запишем интеграл перемещений Мора [4]:

$$\Delta_{1P} = \int_0^l \left(\frac{\bar{N}_{z1} N_{zP}}{D_z} + \frac{\bar{M}_{x1} M_{xP}}{D_x} + \frac{\bar{M}_{y1} M_{yP}}{D_y} + \frac{\bar{M}_{z1} M_{zP}}{D_k} + k_x \frac{\bar{Q}_{x1} Q_{xP}}{D_Q} + k_y \frac{\bar{Q}_{y1} Q_{yP}}{D_Q} \right) dz.$$

Формулы справедливы, если в полюсе O стержня положена правая система координат $Oxyz$: ось z – вдоль стержня, ось x – из плоскости чертежа, ось y – вверх. Причём оси являются главными центральными. Положительным направлением для моментов и углов поворота является направление против часовой стрелки, если смотреть с положительного конца данной оси. Для компактности моменты и углы поворота обозначены как спин-векторы.

Рассмотрим каждое из шести перемещений отдельно. Так при действии $\bar{N}_{z1}=1$ и N_z (остальные силовые факторы равны нулю), пользуясь правилом перемножения эпюр, получим перемещение вдоль оси Oz : $u_z = \int_0^l \frac{N_z}{D_z} dz$. Поворот полюса O стержня относительно

оси Ox на угол φ_x возможен как от действия моментов $\bar{M}_{x1}=1$, M_x – они вызовут перемещение $\varphi_{x1} = \int_0^l \frac{M_x}{D_x} dz$, так и от действия перерезывающих сил $\bar{Q}_{y1}=1$, Q_y , которые создают момент равный $Q_y z$ и соответствующее перемещение $\varphi_{x2} = - \int_0^l \frac{Q_y z}{D_x} dz$. Тогда

$\varphi_x = \varphi_{x1} + \varphi_{x2} = \int_0^l \frac{M_x}{D_x} dz - \int_0^l \frac{Q_y z}{D_x} dz$. Остальные компоненты перемещений получим по аналогии:

$$\begin{aligned} u_z &= \int_0^l \frac{N_z}{D_z} dz, \quad \varphi_x = \int_0^l \frac{M_x}{D_x} dz - \int_0^l \frac{Q_y z}{D_x} dz, \quad \varphi_y = \int_0^l \frac{M_y}{D_y} dz + \int_0^l \frac{Q_x z}{D_y} dz, \quad \varphi_z = \int_0^l \frac{M_z}{D_k} dz, \\ u_x &= \int_0^l k_x \frac{Q_x}{D_Q} dz + \int_0^l \frac{Q_x z^2}{D_y} dz + \int_0^l \frac{M_y z}{D_y} dz, \quad u_y = \int_0^l k_y \frac{Q_y}{D_Q} dz + \int_0^l \frac{Q_y z^2}{D_x} dz - \int_0^l \frac{M_x z}{D_x} dz, \end{aligned} \quad (4)$$

где D_z – осевая жёсткость стержня, D_x , D_y – изгибные, D_Q – сдвиговая, D_k – крутильная; l – длина стержня; k_x , k_y – коэффициенты формы при сдвиге (для прямоугольного сечения $k_x = k_y = 1,2$).

О жёсткостях подробнее речь пойдёт в конце статьи.

Для отыскания коэффициентов формы при сдвиге применяют следующие выражения (армирование пренебрегается):

$$k_x = \frac{A_b}{I_{by} A_b} \int \frac{S_{by}^{omc} dA_b}{b^2}, \quad k_y = \frac{A_b}{I_{bx} A_b} \int \frac{S_{bx}^{omc} dA_b}{b^2},$$

где A_b – площадь бетонного сечения;

b – ширина бетонного сечения;

I_{bx} , I_{by} – моменты инерции бетонного сечения относительно осей Ox и Oy ;

S_{bx}^{omc} , S_{by}^{omc} – статические моменты отсечённой части бетонного сечения относительно соответствующих осей.

Вектор сил, приложенный в полюсе O стержня, запишем в виде:

$$\{P\}^T = \{N_z \quad Q_x \quad Q_y \quad M_z \quad M_x \quad M_y\}^T,$$

соответствующий вектор перемещений:

$$\{u\}^T = \{u_z \quad u_x \quad u_y \quad \varphi_z \quad \varphi_x \quad \varphi_y\}^T.$$

Результаты исследования и их анализ

В выражениях (4) продифференцируем по координате z линейные перемещения u_z

один раз: $\frac{\partial u_z}{\partial z} = \varepsilon_z$, линейные перемещения u_x, u_y – дважды: $\frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} = \chi_x$, $\frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} = \chi_y$, углы

поворота $\varphi_z, \varphi_x, \varphi_y$ – один раз: $\frac{\partial \varphi_z}{\partial z} = \theta_z$, $\frac{\partial \varphi_x}{\partial z} = \chi_x$, $\frac{\partial \varphi_y}{\partial z} = \chi_y$, где θ_z – относительный угол закручивания относительно оси Oz .

Теперь получим:

$$\varepsilon_z = \frac{N_z}{D_z}, \quad \chi_x = k_y \frac{q_y}{D_Q} + \frac{q_y z^2}{D_x} + \frac{2Q_y z}{D_x} - \frac{Q_y z}{D_x} - \frac{M_x}{D_x} = q_y \left(\frac{k_y}{D_Q} + \frac{z^2}{D_x} \right) + \frac{Q_y z}{D_x} - \frac{M_x}{D_x},$$

$$\chi_y = k_x \frac{q_x}{D_Q} + \frac{q_x z^2}{D_y} + \frac{2Q_x z}{D_y} + \frac{Q_x z}{D_y} + \frac{M_y}{D_y} = q_x \left(\frac{k_x}{D_Q} + \frac{z^2}{D_y} \right) + \frac{3Q_x z}{D_y} + \frac{M_y}{D_y},$$

$$\theta_z = \frac{M_z}{D_k}, \quad \chi_x = -\frac{Q_y z}{D_x} + \frac{M_x}{D_x}, \quad \chi_y = \frac{Q_x z}{D_y} + \frac{M_y}{D_y}.$$

В этих формулах сделаем замену: $Q_y z = -M_x$, $Q_x z = M_y$, тогда будем иметь:

$$\begin{aligned} \varepsilon_z &= \frac{N_z}{D_z}, \quad \chi_x = q_y \left(\frac{k_y}{D_Q} + \frac{z^2}{D_x} \right) - \frac{2M_x}{D_x}, \quad \chi_y = q_x \left(\frac{k_x}{D_Q} + \frac{z^2}{D_y} \right) + \frac{4M_y}{D_y}, \\ \theta_z &= \frac{M_z}{D_k}, \quad \chi_x = -\frac{M_y}{D_x} + \frac{M_x}{D_x}, \quad \chi_y = \frac{M_x}{D_y} + \frac{M_y}{D_y}. \end{aligned} \quad (5)$$

Уравнения 2,3 и соответственно 5,6 в формулах (5) являются тождественными – определяющими одну и ту же величину, поэтому отбросим, например, 2 и 3. Получим следующую систему уравнений:

$$\varepsilon_z = \frac{N_z}{D_z}, \quad \theta_z = \frac{M_z}{D_k}, \quad \chi_x = \frac{M_x - M_y}{D_x}, \quad \chi_y = \frac{M_y + M_x}{D_y}. \quad (6)$$

Или в матричном виде:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_z \\ \theta_z \\ \chi_x \\ \chi_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{D_z} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{D_k} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{D_x} & -\frac{1}{D_x} \\ 0 & 0 & \frac{1}{D_y} & \frac{1}{D_y} \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} N_z \\ M_z \\ M_x \\ M_y \end{Bmatrix},$$

Полученные выражения не содержат прирезающих сил и сдвиги учитывают в неявном виде. Чтобы учесть их явно, необходимо в формулах (5) отбросить два последних

выражения и положить $z=l$, $q_x = \frac{3Q_x}{8l} \dots \frac{5Q_x}{8l} \approx \frac{2Q_x}{l}$, $q_y = \frac{3Q_y}{8l} \dots \frac{5Q_y}{8l} \approx \frac{2Q_y}{l}$.

Тогда (5) предстанут в виде:

$$\varepsilon_z = \frac{N_z}{D_z}, \theta_z = \frac{M_z}{D_k}, \chi_x = 2Q_y \left(\frac{k_y}{D_Q l} + \frac{l}{D_x} \right) - \frac{2M_x}{D_x}, \chi_y = 2Q_x \left(\frac{k_x}{D_Q l} + \frac{l}{D_y} \right) + \frac{4M_y}{D_y}. \quad (7)$$

Или в матричном виде:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_z \\ \theta_z \\ \chi_x \\ \chi_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{D_z} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{D_z} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2k_y}{D_Q l} + \frac{2l}{D_x} & 0 & -\frac{2}{D_x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2k_x}{D_Q l} + \frac{2l}{D_y} & 0 & \frac{4}{D_y} \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} N_z \\ Q_x \\ Q_y \\ M_z \\ M_x \\ M_y \end{Bmatrix}. \quad (8)$$

Отметим, что в выражениях (7) и (8) хотя и учтены перерезывающие усилия, однако в векторе деформаций сдвиговые деформации γ отсутствуют, они учитываются косвенно через сдвиговую жёсткость D_Q , которая зависит от τ и γ .

Также отметим, что в структуре формул для кривизн первое слагаемое отвечает за влияние на кривизну деформаций чистого сдвига, второе слагаемое – изгибных деформаций, вызванных перерезывающей силой, третье слагаемое – изгибных деформаций, вызванных действием момента.

Кроме того, предлагаемый подход несёт в себе перспективы развития за счёт учёта помимо продольных деформаций ε_z также и поперечных деформаций ε_x и ε_y . Возможные варианты таких уточнений приведены в работах [5], [6], [7].

До этого вывод всех формул осуществлялся относительно главных центральных осей стержня. При произвольном выборе системы координат $O'x'y'z'$ в жесткостные характеристики сечения необходимо внести корректировки на основе следующих рассуждений (рисунок 1б). Относительно главных центральных осей продольная сила не имеет эксцентриситета, $a_x=a_y=0$, а центробежный момент инерции и соответствующая центробежная жёсткость сечения стержня равны нулю: $I_{xy} = I_{bxy} + I_{sxy} = 0$, $D_{xy} = 0$. Последняя величина определяется по последнему выражению из формул (3): $D_{xy} = D_{33}$.

Равны нулю также статические моменты относительно осей Ox и Oy и соответствующие им статические жёсткости: $S_x = S_{bx} + S_{sx} = 0$ и $S_y = S_{by} + S_{sy} = 0$, $D_{sx} = 0$ и $D_{sy} = 0$. Указанные жёсткости определяются по выражениям 2 и 3 формул (3): $D_{sx} = D_{12} = D_{21}$, $D_{sy} = D_{13} = D_{31}$.

При произвольном задании системы координат необходимо учесть дополнительные деформации поворота сечения, вызванные внецентренно приложенной продольной силой N_z , а также дополнительные повороты от M_x относительно оси Oy и от M_y относительно оси Ox . Это достигается путём включения в первое выражение формул (6) или (7) относительных

деформаций, вызванных изгибом: $\varepsilon_z = \varepsilon_0 + \chi_y x - \chi_x y$, где $\varepsilon_0 = \frac{N_z}{D_z}$. И, кроме того, необходимо выполнить замену изгибных жесткостей на следующие величины:

$$D_x = \frac{D'_x + D'_y}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(D'_x - D'_y)^2 + 4D'_{xy}} - \frac{D'^2_{Sx}}{D'_z},$$

$$D_y = \frac{D'_x + D'_y}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(D'_x - D'_y)^2 + 4D'_{xy}} - \frac{D'^2_{Sy}}{D'_z},$$

где штрих «'» – означает, что данная величина вычислена относительно произвольных осей $O'x'y'z'$.

При этом $D_z = D'_z$, $D_Q = D'_Q$ и $D_k = D'_k$.

Также необходимо выполнить замену изгибающих моментов и перерезывающих сил на:

$$M_x = \frac{(M'_x + N_z a_y) \cos(\alpha_{0M} - \alpha)}{\cos \alpha_{0M}} = \frac{N_z (e'_y + a_y) \cos(\alpha_{0M} - \alpha)}{\cos \alpha_{0M}} = \frac{N_z e_x \cos(\alpha_{0M} - \alpha)}{\cos \alpha_{0M}},$$

$$M_y = \frac{(M'_y + N_z a_x) \sin(\alpha_{0M} - \alpha)}{\sin \alpha_{0M}} = \frac{N_z (e'_x + a_x) \sin(\alpha_{0M} - \alpha)}{\sin \alpha_{0M}} = \frac{N_z e_y \sin(\alpha_{0M} - \alpha)}{\sin \alpha_{0M}},$$

$$Q_x = \frac{Q'_x \cos(\alpha_{0Q} - \alpha)}{\cos \alpha_{0Q}}, \quad Q_y = \frac{Q'_y \sin(\alpha_{0Q} - \alpha)}{\sin \alpha_{0Q}},$$

где a_x, a_y – расстояния между соответствующими осями $O'x'y'$ и Oxy (принимаются со своим

знаком относительно осей Oxy); $e'_y = \frac{M'_x}{N_z}$, $e'_x = \frac{M'_y}{N_z}$ – проекции на оси $O'x'y'$ эксцентриситета

приложения продольной силы относительно центра O' ; $e_y = \frac{M_x}{N_z}$, $e_x = \frac{M_y}{N_z}$ – проекции на оси

Oxy эксцентриситета приложения продольной силы относительно центра O ;

$\alpha = \frac{1}{2} \arctg \left(-\frac{2D'_{xy}}{D'_x - D'_y} \right)$ – угол поворота осей $O'x'y'$ относительно осей Oxy ; $\alpha_{0M} = \arctg \left(\frac{M'_y}{M'_x} \right)$

$\alpha_{0Q} = \arctg \left(\frac{Q'_y}{Q'_x} \right)$ – углы между соответственно вектором M' и Q' и горизонтальной осью $O'x'$.

Обозначим для краткости $C_M = \frac{\cos(\alpha_{0M} - \alpha)}{\cos \alpha_{0M}}$, $S_M = \frac{\sin(\alpha_{0M} - \alpha)}{\sin \alpha_{0M}}$, $C_Q = \frac{\cos(\alpha_{0Q} - \alpha)}{\cos \alpha_{0Q}}$,

$$S_Q = \frac{\sin(\alpha_{0Q} - \alpha)}{\sin \alpha_{0Q}}.$$

Таким образом для формул (6) будем иметь:

$$\varepsilon_z = \frac{N_z}{D_z} + \chi_y x - \chi_x y, \quad \theta_z = \frac{M_z}{D_k}, \quad \chi_x = \frac{N_z (-e'_x - a_x + e'_y + a_y) C_M}{\frac{D'_x + D'_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(D'_x - D'_y)^2 + 4D'_{xy}} - \frac{D'^2_{Sx}}{D'_z}},$$

$$\chi_y = \frac{N_z (e'_x + a_x + e'_y + a_y) S_M}{\frac{D'_x + D'_y}{2} \mp \frac{1}{2} \sqrt{(D'_x - D'_y)^2 + 4D'_{xy}} - \frac{D'^2_{Sy}}{D'_z}}. \quad (9)$$

А формулы (14) перепишем так:

$$\begin{aligned}\varepsilon_z &= \frac{N_z}{D_z} + \chi_y x - \chi_x y, \quad \theta_z = \frac{M_z}{D_k}, \\ \chi_x &= \frac{2Q_y C_Q k_y}{D_Q l} + \frac{2Q_y C_Q l - 2N_z (e'_y + a_y) C_M}{\frac{D'_x + D'_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(D'_x - D'_y)^2 + 4D'_{xy}} - \frac{D_{Sx}'^2}{D_z}}, \\ \chi_y &= \frac{2Q_x S_Q k_x}{D_Q l} + \frac{2Q_x S_Q l + 4N_z (e'_x + a_x) S_M}{\frac{D'_x + D'_y}{2} \mp \frac{1}{2} \sqrt{(D'_x - D'_y)^2 + 4D'_{xy}} - \frac{D_{Sy}'^2}{D_z}}.\end{aligned}\quad (10)$$

Рассмотрим частный случай, когда угол $\alpha=0$, то есть оси $O'x'y'$ параллельны Ox . Это означает, что $\cos \alpha = 1$, $D'_{xy} = 0$, тогда для (9) будем иметь:

$$\begin{aligned}\varepsilon_z &= \frac{N_z}{D_z} + \chi_y x - \chi_x y, \quad \theta_z = \frac{M_z}{D_k}, \quad \chi_x = \frac{N_z (-e'_x - a_x + e'_y + a_y)}{D'_x - \frac{D_{Sx}'^2}{D_z}}, \\ \chi_y &= \frac{N_z (e'_x + a_x + e'_y + a_y)}{D'_y - \frac{D_{Sy}'^2}{D_z}}.\end{aligned}\quad (11)$$

А для (10):

$$\begin{aligned}\varepsilon_z &= \frac{N_z}{D_z} + \chi_y x - \chi_x y, \quad \theta_z = \frac{M_z}{D_k}, \quad \chi_x = \frac{2Q_y k_y}{D_Q l} + \frac{2Q_y l - 2N_z (e'_y + a_y)}{D'_x - \frac{D_{Sx}'^2}{D_z}}, \\ \chi_y &= \frac{2Q_x k_x}{D_Q l} + \frac{2Q_x l + 4N_z (e'_x + a_x)}{D'_y - \frac{D_{Sy}'^2}{D_z}}.\end{aligned}\quad (12)$$

Если оси $O'x'y'$ теперь перенести в центр тяжести сечения, то $D'_{Sx} = 0$, $D'_{Sy} = 0$, $a_x = 0$, $a_y = 0$, $e'_x = e_x$, $e'_y = e_y$, $D'_x = D_x$, $D'_y = D_y$, $\varepsilon_z = \varepsilon_0$ тогда приходим к формулам (6) и (7).

Отметим, что выражения (6), (7), (9)-(12) получены впервые.

Дополним их граничными условиями в форме деформационных критериев наступления того или иного предельного состояния. Так, образование трещин в элементе наступает при достижении в наиболее растянутом бетонном волокне предельных деформаций:

$$\varepsilon_{bt}^{\max} = \varepsilon_{bt2}.$$

При разрушении элемента возможны три случая:

$$\varepsilon_b^{\max} = \varepsilon_{b2} - \text{хрупкое разрушение,}$$

$$\varepsilon_s^{\max} = \varepsilon_{s0} - \text{«пластичное» разрушение,}$$

$$\varepsilon_b^{\max} = \varepsilon_{b2} \cup \varepsilon_s^{\max} = \varepsilon_{s0} - \text{разрушение оптимального сечения.}$$

Перечислим преимущества предлагаемого подхода:

1 – рассматриваются все шесть компонент внешних силовых факторов, действующих на стержневой элемент (в СП 63.13330 их только три: N_z , M_x , M_y): у главного вектора сил R – три (N_z , Q_x , Q_y), у главного момента M – три (M_x , M_y , M_z);

2 – в расчётах учтена работа растянутой зоны бетона над трещиной;

3 – для описания взаимосвязи между напряжениями и деформациями бетона помимо диаграмм деформирования на одноосное растяжение/сжатие используются диаграммы сдвига « τ - γ » [8], [9]. Благодаря этому возникает возможность рассчитывать сечения изгибаемых элементов в зоне совместного действия M и Q на основе диаграммного метода.

Предложенный подход распространим на более широкий класс конструктивных стержневых элементов из армированного бетона. Для этого запишем формулы для определения жесткостей в самом общем виде:

$$\begin{aligned} D_z &= \sum \sum v_b E_b A_b + \sum \sum k_{b,ad} v_{b,ad} E_{b,ad} A_{b,ad} + \sum k_s v_s E_s A_s + \\ &+ \sum k_{s,ad} v_{s,ad} E_{s,ad} A_{s,ad} + \sum \sum k_{r1} v_{s,r1} E_{s,r1} A_{s,r1} + \sum \sum k_{r2} v_{s,r2} E_{s,r2} A_{s,r2}, \\ D_x &= \sum \sum v_b E_b I_{bx} + \sum \sum k_{b,ad} v_{b,ad} E_{b,ad} I_{bx,ad} + \sum k_s v_s E_s I_{sx} + \\ &+ \sum k_{s,ad} v_{s,ad} E_{s,ad} I_{sx,ad} + \sum \sum k_{r1} v_{s,r1} E_{s,r1} I_{sx,r1} + \sum \sum k_{r2} v_{s,r2} E_{s,r2} I_{sx,r2}, \\ D_y &= \sum \sum v_b E_b I_{by} + \sum \sum k_{b,ad} v_{b,ad} E_{b,ad} I_{by,ad} + \sum k_s v_s E_s I_{sy} + \\ &+ \sum k_{s,ad} v_{s,ad} E_{s,ad} I_{sy,ad} + \sum \sum k_{r1} v_{s,r1} E_{s,r1} I_{sy,r1} + \sum \sum k_{r2} v_{s,r2} E_{s,r2} I_{sy,r2}, \\ D_k &= \sum \sum v_b G_b I_{bk} + \sum \sum k_{b,ad} v_{b,ad} G_{b,ad} I_{bk,ad} + \sum k_s v_s G_s I_{sk} + \\ &+ \sum k_{s,ad} v_{s,ad} G_{s,ad} I_{sk,ad} + \sum \sum k_{r1} v_{s,r1} G_{s,r1} I_{sk,r1} + \sum \sum k_{r2} v_{s,r2} G_{s,r2} I_{sk,r2}, \\ D_Q &= \sum \sum v_b G_b A_b + \sum \sum k_{b,ad} v_{b,ad} G_{b,ad} A_{b,ad} + \sum k_s v_s G_s A_s + \\ &+ \sum k_{s,ad} v_{s,ad} G_{s,ad} A_{s,ad} + \sum \sum k_{r1} v_{s,r1} G_{s,r1} A_{s,r1} + \sum \sum k_{r2} v_{s,r2} G_{s,r2} A_{s,r2}, \end{aligned}$$

где E_b , $E_{b,ad}$, E_s , $E_{s,ad}$, $E_{s,r1}$, $E_{s,r2}$ и G_b , $G_{b,ad}$, G_s , $G_{s,ad}$, $G_{s,r1}$, $G_{s,r2}$ – начальные модули деформаций и модули сдвига соответственно основного бетона, добавленного бетона усиления, основной гибкой стержневой арматуры, добавленной гибкой стержневой арматуры усиления, жёсткой центральной арматуры (стального ядра), жёсткой внешней стальной арматуры (трубной оболочки); A_b , $A_{b,ad}$, A_s , $A_{s,ad}$, $A_{s,r1}$, $A_{s,r2}$ – площади соответствующих компонент сечения; I_{bx} , $I_{bx,ad}$, I_{sx} , $I_{sx,ad}$, $I_{sx,r1}$, $I_{sx,r2}$ и I_{by} , $I_{by,ad}$, I_{sy} , $I_{sy,ad}$, $I_{sy,r1}$, $I_{sy,r2}$ – моменты инерции соответствующих компонент сечения относительно осей Ox и Oy ; I_{bk} , $I_{bk,ad}$, I_{sk} , $I_{sk,ad}$, $I_{sk,r1}$, $I_{sk,r2}$ – крутильные моменты инерции соответствующих компонент сечения; v_b , $v_{b,ad}$, v_s , $v_{s,ad}$, $v_{s,r1}$, $v_{s,r2}$ – коэффициенты секущего модуля (иначе коэффициенты упругопластической деформации) соответствующих компонент сечения; $k_{b,ad}$, k_s , $k_{s,ad}$, k_{r1} , k_{r2} – коэффициенты совместной работы. Суммирование жесткостей выполняется по элементарным площадкам (по горизонтали и вертикали).

Дальнейшее уточнение предлагаемого подхода будет заключаться в учёте фактического механизма появления и развития наклонных [10] и спиральных трещин [11] соответственно при действии перерезывающих сил и крутящего момента, в определении параметров совместной работы компонент сечения стержня (отчасти исследования на тему

усиления железобетонных балок сталефибробетонной «рубашкой» выполнены в [12]–[14]), в учёте циклической статической и динамической нагрузок, что актуально при проектировании ветроэлектрических установок башенного типа [15]–[17].

Выводы

1. Установлена преемственность диаграммного метода расчёта стержневых железобетонных элементов при косом внецентренном сжатии согласно СП 63.13330 и классического подхода сопротивления материалов.

2. Впервые получены разрешающие уравнения диаграммного метода, в которых учитывается все шесть компонент внутренних силовых факторов. Это сделано на основе интеграла перемещений Мора.

3. Предлагаемый подход имеет перспективы развития. Дальнейшее его уточнение будет заключаться в учёте фактического механизма появления и развития наклонных и спиральных трещин соответственно при действии перерезывающих сил и крутящего момента, в определении параметров совместной работы компонент сечения стержня, в учёте циклической статической и динамической нагрузок, что актуально при проектировании ветроэлектрических установок башенного типа.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Байков В.Н., Додонов М.И., Расторгуев Б.С. [и др.] Общий случай расчета прочности элементов по нормальным сечениям // Бетон и железобетон. 1987. № 5. С. 16–18.
2. Карпенко Н.И., Мухамедиев Т.А., Сапожников М.А. К построению методики расчета стержневых элементов на основе диаграмм деформирования материалов // Совершенствование методов расчета статически неопределимых железобетонных конструкций. 1987. С. 4–24.
3. Карпенко Н.И. Общие модели механики железобетона. М.: Стройиздат, 1996. 416 с.
4. Горшков А.Г., Трошин В.Н., Шалашилин В.И. Сопротивление материалов. М.: Физматлит, 2005. 544 с.
5. Карпенко Н.И. Методика расчёта стержневых железобетонных конструкций и элементов с учётом деформаций сдвига // Бетон и железобетон, 1989. №3. С. 14–16.
6. Силантьев А.С. Прочность изгибаемых железобетонных элементов без хомутов по наклонным сечениям с учетом параметров продольного армирования // Вестник МГСУ, 2011. № 2-1. С. 163–170.
7. Лазовский Е.Д., Глухов Д.О. Предпосылки, методика и программа для расчета напряженно-деформированного состояния усиленных в зоне среза изгибаемых железобетонных элементов // Вестник Полоцкого государственного университета. Сер. F, Прикладные науки. 2013. № 16. С. 33–39.
8. Соколов Б.С., Радайкин О.В. К построению диаграмм деформирования бетона при сдвиге на основе авторской теории силового сопротивления анизотропных материалов сжатия и деформационной теории пластичности // Международный журнал по расчету гражданских и строительных конструкций. 2019. Т. 15. № 3. С. 149–160.
9. Карпенко Н.И., Соколов Б.С., Радайкин О.В. Проектирование бетонных, железобетонных, каменных и армокаменных элементов и конструкций с применением диаграммных методов расчёта: монография. М.: Изд-во АСВ, 2019. 194 с.
10. Залесов А.С., Климов Ю.А. Прочность железобетонных конструкций при действии поперечных сил. Киев: Будивэльнык, 1989. 104 с.
11. Колчунов В.И., Демьянов А.И., Матвеев М.И. Основные результаты экспериментальных исследований железобетонных конструкций круглого сечения при кручении с изгибом // Строительство и реконструкция. 2020. № 3 (89). С. 3–13.
12. Радайкин О.В., Шарафутдинов Л.А. К оценке прочности, жесткости и трещиностойкости изгибаемых железобетонных элементов, усиленных сталефибробетонной «рубашкой», на основе компьютерного моделирования в пакете «Ansys» // Известия КГАСУ. 2017. №1(39). С. 111–120.
13. Радайкин О.В., Шарафутдинов Л.А. К оценке совместного влияния начальных напряжённо-деформированного состояния и силовых трещин на прочность, жесткость и трещиностойкость железобетонных

балок, усиленных сталефибробетонной «рубашкой», на основе компьютерного моделирования в пакете «Ansys» // Известия КГАСУ. 2019. №1(47). С. 155-165.

14. Радайкин О.В., Шарафутдинов Л.А. Экспериментальные исследования железобетонных балок, усиленных сталефибробетонной рубашкой // Вестник БГТУ им. В.Г. Шухова. 2020. №3. С. 34-45.

15. Mailyan L., Yaziev S., Sabitov L., Konoplev Y., Radaykin O. Stress-strain state of the "combined tower-reinforced concrete foundation-foundation soil" system for high-rise structures // E3S Web of Conferences. Topical Problems of Green Architecture, Civil and Environmental Engineering, TPACEE 2019. 2020. Pp. 20-35.

16. Стрелков Ю.М., Сабитов Л.С., Кузнецов И.Л., Радайкин О.В., Ахтямова Л.Ш. Компьютерное моделирование системы "стальная башня - железобетонный фундамент - грунт основания" ветроэлектрических установок // В сборнике: Эффективные конструкции, материалы и технологии в строительстве. Материалы международной научно-практической конференции. 2019. С. 116-127.

17. Сабитов Л.С., Коноплев Ю.Г., Радайкин О.В. Компьютерное моделирование системы "комбинированная башня - железобетонный фундамент - грунт основания" ветроэлектрической установки для оценки ее эффективности // Вестник Волгоградского государственного архитектурно-строительного университета. Серия: Строительство и архитектура. 2020. № 1 (78). С. 345-355.

REFERENCES

1. Baykov V.N., Dodonov M.I., Rastorguev B.S. [et al.] General case of calculating the strength of elements by normal cross-sections // Concrete and reinforced concrete. 1987. No. 5. Pp. 16-18. (rus).

2. Karpenko N.I., Mukhamediev T.A., Sapozhnikov M.A. On the construction of a method for calculating rod elements based on material deformation diagrams // Improvement of methods for calculating statically indeterminate reinforced concrete structures. 1987. Pp. 4-24. (rus).

3. Karpenko N.I. General models of reinforced concrete mechanics. M.: Stroyizdat, 1996. 416 p. (rus).

4. Gorshkov A.G., Troshin V.N., Shalashilin V.I. Resistance of materials. M.: Fizmatlit, 2005. 544 p. (rus).

5. Karpenko N.I. Method of calculating rod reinforced concrete structures and elements taking into account shear deformations // Concrete and reinforced concrete. 1989. No.3. Pp. 14-16. (rus).

6. Silantev A.C. Strength of bent reinforced concrete elements without clamps on inclined sections taking into account the parameters of longitudinal reinforcement // Vestnik MGSU. 2011, No. 2-1, Pp. 163-170. (rus).

7. Lazovsky E.D., Glukhov D.O. Prerequisites, methods and program for calculating the stress-strain state of reinforced bent reinforced concrete elements in the cut zone // Bulletin of Polotsk state University. Ser. F, Applied Sciences. 2013. No. 16. Pp. 33-39. (rus).

8. Sokolov B.S., Radaykin O.V. Construction of diagrams of concrete deformation under shear based on the author's theory of force resistance of anisotropic materials to compression and deformation theory of plasticity // International journal for the calculation of civil and building structures. 2019. Vol. 15. No. 3. Pp. 149-160. (rus).

9. Karpenko N.I., Sokolov B.S., Radaykin O.V. Design of concrete, reinforced concrete, stone and reinforced stone elements and structures using diagram calculation methods: monograph. M.: publishing house of ASV, 2019. 194 p. (rus).

10. Zalesov A.S., Klimov Yu.A. Strength of reinforced concrete structures under the action of transverse forces. Kiev: Budivelnik, 1989. 104 p. (rus).

11. Kolchunov V.I., Demyanov A.I., Matveev M.I. Main results of experimental studies of round-section reinforced concrete structures under torsion with bending // Construction and reconstruction. 2020. No. 3 (89). Pp. 3-13. (rus).

12. Radaikin O.V., Sharafutdinov L.A. To the assessment of strength, stiffness and crack resistance of bendable concrete elements reinforced by steel fiber reinforced concrete "shirt", on the basis of computer simulation in a PC "Ansys" // Izvestiya KGASU. 2017 No. 1(39). Pp. 111-120. (rus).

13. Radaikin O.V., Sharafutdinov L.A. To the assessment of the joint influence of initial stress-strain state and strength of cracks on the strength, stiffness and crack resistance of reinforced concrete beams, reinforced steel fiber concrete "shirt", on the basis of computer simulation in a PC "Ansys" // Izvestiya KGASU. 2019. No. 1(47). Pp. 155-165. (rus).

14. Radaykin O.V., Sharafutdinov L.A. Experimental studies of reinforced concrete beams reinforced with a steel-fiber concrete jacket // Bulletin of BSTU named after V. G. Shukhov. 2020. No. 3. Pp. 34-45. (rus).

15. Mailyan L., Yaziev S., Sabitov L., Konoplev Y., Radaykin O. Stress-strain state of the "combined tower-reinforced concrete foundation-foundation soil" system for high-rise structures // E3S Web of Conferences. Topical Problems of Green Architecture, Civil and Environmental Engineering, TPACEE 2019. 2020. Pp. 20-35.

16. Strelkov Yu.M., Sabitov L.S., Kuznetsov I.L., Radaykin O.V., Akhtyamova L.Sh. Computer modeling of the system "steel tower - reinforced concrete Foundation - ground base" of wind power installations // In the collection: Effective structures, materials and technologies in construction. Materials of the international scientific and practical conference. 2019. Pp. 116-127. (rus).

17. Sabitov L.S., Konoplev Yu.G., Radaykin O.V. Computer modeling of the system "combined tower-reinforced concrete Foundation - ground base" of a wind power plant for evaluating its efficiency // Bulletin of the Volgograd state University of architecture and civil engineering. series: construction and architecture. 2020. No. 1 (78). Pp. 345-355. (rus).

Информация об авторах:

Радайкин Олег Валерьевич

ООО Инженерный центр «Энергопрогресс», г. Казань, Россия,
кандидат технических наук, начальник отдела НИР.
E-mail: olegxxii@mail.ru

Сабитов Линар Салихзанович

ФБГОУ ВО «Казанский государственный энергетический университет», г. Казань, Россия,
кандидат технических наук, доцент кафедры Энергообеспечение предприятий и энергосберегающих технологий.
E-mail: sabitov-kgasu@mail.ru

Ахтямова Лейсан Шамилевна

ФБГОУ ВО «Донской государственный технический университет», г. Ростов-на-Дону, Россия,
аспирант кафедры Сопrotивления материалов.
E-mail: Leysanas@gmail.com

Аракчеев Тимур Павлович

ФБГОУ ВО «Казанский государственный энергетический университет», г. Казань, Россия,
аспирант кафедры Энергообеспечение предприятий и энергосберегающих технологий.
E-mail: leps-89@mail.ru

Information about authors:

Radaykin Oleg V.

Energoprogress Engineering center LLC, Kazan, Russia,
candidate of technical sciences, head of research Department.
E-mail: olegxxii@mail.ru

Sabitov Linar S.

Kazan state power engineering University, Kazan, Russia,
candidate of technical sciences, associate Professor of the Department of Energy supply of enterprises and energy-saving technologies.
E-mail: sabitov-kgasu@mail.ru

Akhtyamova Leysan Sh.

Don state technical University, Rostov-on-Don, Russia,
postgraduate student of the Department of Materials Resistance.
E-mail: Leysanas@gmail.com

Arakcheev Timur P.

Kazan state power engineering University, Kazan, Russia,
postgraduate student of the Department of Energy supply of enterprises and energy saving technologies.
E-mail: leps-89@mail.ru