

П.Д. ДЕМИНОВ¹¹Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, г. Москва, Россия

ОЦЕНКА ВЕРОЯТНОСТИ РАЗРУШЕНИЯ ЖЕЛЕЗОБЕТОННОЙ БАЛКИ ЛЕЖАЩЕЙ НА СТОХАСТИЧЕСКОМ УПРУГОМ ОСНОВАНИИ С ДВУМЯ КОЭФФИЦИЕНТАМИ ПОДАТЛИВОСТИ, ПО НАКЛОННОМУ СЕЧЕНИЮ ОТ ПОПЕРЕЧНОЙ СИЛЫ

Аннотация. В статье получена оценка вероятности разрушения по наклонному сечению от действия поперечной силы при изгибе, а также суммарной вероятности наступления предельных состояний железобетонной балки с вероятностными параметрами прочности, лежащей на упругом основании модели В.З. Власова-П.Л. Пастернака, обладающей стохастическими свойствами. Построены вероятностные характеристики поперечной силы и плотность её распределения для фундаментной балки, покоящейся на упругом основании с двумя случайными характеристиками, нагруженной квазистационарной случайной нагрузкой, с учетом вероятностного характера прочностных свойств бетона и арматуры. Показано, что если спектральные плотности коэффициентов постели и нагрузки являются дробно-рациональными функциями, корреляционные функции прогибов и, соответственно, дисперсия прогибов вычисляются с помощью теории вычетов.

Ключевые слова: железобетонная балка, упругое основание, математическое ожидание, дисперсия, корреляционная функция, поперечная сила, вероятность разрушения, наклонное сечение.

P.D. DEMINOV¹¹National Research Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russia

ESTIMATION OF THE FAILURE PROBABILITY OF A REINFORCED CONCRETE BEAM LYING ON A STOCHASTIC ELASTIC BASE WITH TWO PRESSURE COEFFICIENTS, ON AN INCLINED SECTION FROM THE LATERAL FORCE

Abstract. The estimate of failure probability on the inclined section from the action of transverse forces, as well as the total probability of the limit States of reinforced concrete beams with probabilistic strength parameters lying on an elastic Foundation model V.Z. Vlasov-P.L. Pasternak, possessing stochastic properties. Probabilistic characteristics of the transverse force and its distribution density are constructed for a Foundation beam resting on an elastic base with two random characteristics, loaded with a quasi-stationary random load, taking into account the probabilistic nature of the strength properties of concrete and reinforcement. It is shown that if the spectral densities of the bed and load coefficients are fractional rational functions, the deflection correlation functions and, accordingly, the deflection variance are calculated using the residue theory.

Keywords: reinforced concrete beam, elastic foundation, mathematical expectation, dispersion, correlation function, shear force, probability of failure, inclined section.

Введение

В работах [1,2] рассматривались вероятности наступления предельных состояний в железобетонной балке на упругом основании со случайными свойствами: $\mathbb{P}_{M_{ult}}$ - от действия

изгибающего момента и $\mathbb{P}_{[w]}$ - от возникновения чрезмерных прогибов. Влияние изменчивости параметров железобетонной балки на надежность при разных условиях работы рассмотрена в трудах [3,4].

В данной работе рассматривается разрушение железобетонной балки по наклонному сечению от действия поперечной силы. Балка имеет случайную жесткость $B(R)$, как функцию случайной гауссовой кубиковой прочности бетона R , и лежит на упругом стохастически неоднородном основании с двумя коэффициентами постели $C_1(x)$ и $C_2(x)$ при этом загружена случайной квазистационарной нормально распределенной нагрузкой $q(x)$ с математическим ожиданием $\langle q(x) \rangle$ и центрированной стационарной случайной составляющей $q^*(x)$. Предполагается, что трещиностойкость балки обеспечена.

Метод

Пусть случайная кубиковая прочность бетона получила конкретную реализацию R , при этом изгибная жесткость балки будет равна $B_0(R)$, а случайная нагрузка $q(x)$ с корреляционной функцией $K_q(x - x')$ представлена U произвольными случайными сосредоточенными силами P_j с математическими ожиданиями $\langle P_j \rangle$ и N произвольными случайными распределенными нагрузками $q_i(x)$ с математическими ожиданиями $\langle q_i(x) \rangle$, как показано на рисунке 1.

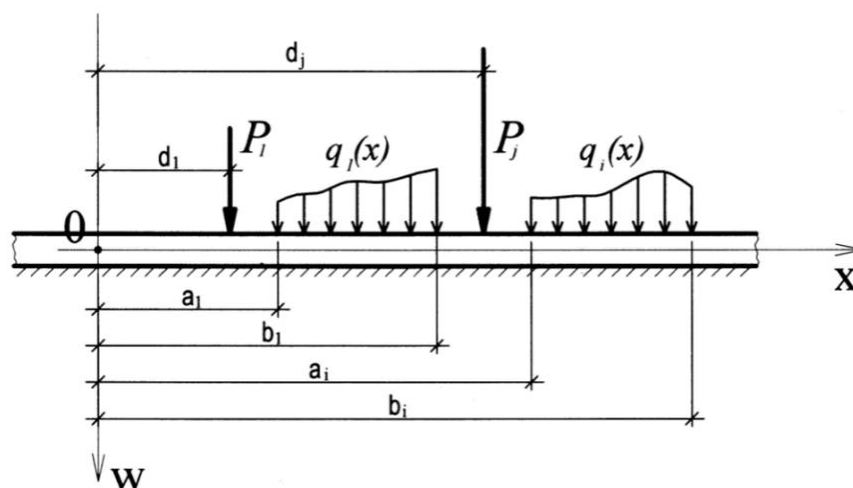


Рисунок 1 - Схема нагружения балки

Уравнение изгиба балки бесконечной длины постоянного сечения на упругом основании с двумя характеристиками хорошо известно и имеет в стохастической постановке следующий вид [5]:

$$B(R) \frac{d^4 w(x)}{dx^4} = C_2(x) \frac{d^2 w(x)}{dx^2} - C_1(x) w(x) + q(x). \quad (1)$$

Для решения уравнения (1) будем использовать метод малого параметра. Представим случайные функции $w(x)$, $C_1(x)$, $C_2(x)$ и $q(x)$ в виде сумм их неслучайных математических ожиданий $\langle C_1 \rangle$, $\langle C_2 \rangle$, $\langle q(x) \rangle$ и $\langle w(x) \rangle$ и центрированных

случайных составляющих $C_1^*(x)$, $C_2^*(x)$ и $q^*(x)$, которые есть стационарные случайные функции, и $w^*(x)$, которая в общем случае является нестационарной случайной функцией.

Выражение для математического ожидания прогибов балки $\langle w(x) \rangle$, аналогичное решению в детерминированной постановке [2], будет иметь вид:

$$\begin{aligned} \langle w(x, R) \rangle = & - \frac{1}{4B_0(R) \alpha \beta (\alpha^2 + \beta^2)} \cdot \\ & \cdot \left\{ \sum_{i=0}^N \int_{a_i}^{b_i} \langle q_i(x_i) \rangle e^{-\alpha|x-x_i|} [\beta \cos \beta(x-x_i) + \alpha \sin \beta |x-x_i|] dx_i + \right. \\ & \left. + \sum_{j=0}^U \langle P_j \rangle e^{-\alpha|x-d_j|} [\beta \cos \beta(x-d_j) + \alpha \sin \beta |x-d_j|] \right\}, \quad x \geq 0, \quad (2) \end{aligned}$$

здесь $\alpha(R) = \left(\sqrt{\frac{\langle C_1 \rangle}{4B_0(R)}} + \frac{\langle C_2 \rangle}{4B_0(R)} \right)^{\frac{1}{2}}$; $\beta(R) = \left(\sqrt{\frac{\langle C_1 \rangle}{4B_0(R)}} - \frac{\langle C_2 \rangle}{4B_0(R)} \right)^{\frac{1}{2}}$.

Для математического ожидания поперечной силы после дифференцирования трижды по x выражения (2) имеем (3):

$$\begin{aligned} \langle Q(x, R) \rangle = & - \frac{1}{4\alpha \beta} \left\{ \sum_{i=0}^N \int_{a_i}^{b_i} \langle q_i(x_i) \rangle e^{-\alpha|x-x_i|} [(\alpha^2 - \beta^2) \sin \beta |x-x_i| - \right. \\ & \left. - 2\alpha \beta \cos \beta(x-x_i)] dx + \right. \\ & \left. + \sum_{j=0}^U \operatorname{sgn}(x-d_j) \frac{\langle P_j \rangle}{2} e^{-\alpha|x-d_j|} [(\alpha^2 - \beta^2) \sin \beta |x-d_j| - 2\alpha \beta \cos \beta(x-d_j)] \right\}, \quad (3) \end{aligned}$$

где $\operatorname{sgn}(z)$ – сигнум-функция Кронекера [6]; $x \geq 0$.

Для нахождения корреляционной функции прогибов используем метод спектральных представлений, учитывая при этом, что корреляционная функция и спектральная плотность случайного процесса составляют пару преобразования Н. Винера-А.Я. Хинчина [7]. Так как передаточная функция $H(\omega, R)$ уравнения (1) будет иметь вид:

$$H(\omega, R) = \frac{1}{J(\omega, R)} = \frac{1}{[B_0(R)\omega^4 + \langle C_2 \rangle \omega^2 + \langle C_1 \rangle]},$$

то, используя известное соотношение между спектральной плотностью $S_\Phi(\omega)$ на входе в динамическую систему и спектральной плотностью $S_w(\omega)$ на выходе из этой системы, получаем спектральную плотность прогибов:

$$S_w(\omega, R) = |H(\omega, R)|^2 S_\Phi(\omega) = \frac{S_\Phi(\omega, R)}{[B_0(R)\omega^4 + \langle C_2 \rangle \omega^2 + \langle C_1 \rangle]^2}.$$

Входную спектральную плотность $S_\Phi(\omega, R)$ правой части уравнения (1), учитывая стационарность случайных функций отпоров основания $C_1^*(x)$ и $C_2^*(x)$ и нагрузки $q^*(x)$, представим следующим образом:

$$S_\Phi(\omega, R) = \langle w(x, R) \rangle^2 S_{C_1}(\omega) + \left(\frac{d^2 \langle w(x, R) \rangle}{dx^2} \right)^2 \cdot S_{C_2}(\omega) + S_q(\omega).$$

В исследованиях [8] и [9] по результатам испытаний грунтов было рекомендовано принимать корреляционную функцию коэффициента постели в виде:

$$K_{C_i}(x - x') = D_{C_i} \exp(-v_i |x - x'|) \cos[\varphi_i(x - x')], \quad v_i > 0, \varphi_i > 0, \quad (4)$$

где v_i - коэффициенты, характеризующий затухание корреляционных свойств по мере удаления точек x и x' друг от друга, φ_i - коэффициенты, отражающий скрытые периодичности корреляционных свойств основания, методика определения этих коэффициентов приведена, например, в работе [10].

Для корреляционной функции вида (4) спектральная плотность коэффициента отпора основания будут иметь вид дробно-рациональных функций [11,12]:

$$S_{C_i}(\omega) = D_{C_i} \frac{v_i}{\pi} \left\{ \frac{\omega^2 + v_i^2 + \varphi_i^2}{[\omega^4 + 2(v_i^2 - \varphi_i^2)\omega^2 + (v_i^2 + \varphi_i^2)]} \right\}. \quad (5)$$

Учитывая, что де факто наблюдается затухание корреляции значений случайной функции нагрузки $q^*(x)$ по мере увеличения расстояния между двумя сечениями балки с координатами x и x' , корреляционную функцию нагрузки можно принять в виде:

$$K_q(x - x') = D_q \exp(-v_q |x - x'|), \quad v_q > 0,$$

где D_q - дисперсия нагрузки, тогда спектральная плотность случайной функции нагрузки будет иметь вид [10]:

$$S_q(\omega) = D_q \frac{2v_q}{\pi(\omega^2 + v_q^2)}. \quad (6)$$

Дисперсия прогибов балки будет определяться обратным преобразованием Н. Винера - А.Я. Хинчина спектральных плотностей случайных функции правой части уравнения (1) при $x = x'$:

$$\begin{aligned} D_w(x, R) = 2 \langle w(x, R) \rangle^2 & \int_0^\infty \frac{S_{C_1}(\omega) d\omega}{[B_0(R)\omega^4 + \langle C_2 \rangle \omega^2 + \langle C_1 \rangle]^2} + \\ & + 2 \left(\frac{d^2 \langle w(x, R) \rangle}{dx^2} \right)^2 \int_0^\infty \frac{S_{C_2}(\omega) d\omega}{[B_0(R)\omega^4 + \langle C_2 \rangle \omega^2 + \langle C_1 \rangle]^2} + \\ & + 2 \int_0^\infty \frac{S_q(\omega) d\omega}{[B_0(\bar{R})\omega^4 + \langle C_2 \rangle \omega^2 + \langle C_1 \rangle]^2}. \end{aligned} \quad (7)$$

Дифференцируя выражение (7) трижды и подставляя спектральные плотности (5) и (6), получаем для дисперсии поперечной силы:

$$\begin{aligned}
 D_Q(x, R) = & 2B_0^2(R) \langle w(x, R) \rangle^2 + \\
 & + D_{c_1} \frac{v_1}{\pi} \int_0^\infty \frac{[\omega^8 + (v_1^2 + \varphi_1^2)\omega^6]d\omega}{[\omega^2 - (v_1^2 + \varphi_1^2)]^2 [B_0(R)\omega^4 + \langle C_2 \rangle \omega^2 + \langle C_1 \rangle]^2} + \\
 & + 2B_0^2(R) \left[\frac{d^2 \langle w(x, R) \rangle}{dx^2} \right]^2 D_{c_2} \frac{v_2}{\pi} \int_0^\infty \frac{[\omega^8 + (v_2^2 + \varphi_2^2)\omega^6]d\omega}{[\omega^2 - (v_2^2 + \varphi_2^2)]^2 [B_0(R)\omega^4 + \langle C_2 \rangle \omega^2 + \langle C_1 \rangle]^2} + \\
 & + 4B_0^2(R) D_q \frac{v_q}{\pi} \int_0^\infty \frac{\omega^6 d\omega}{(\omega^2 + v_q^2) [B_0(R)\omega^4 + \langle C_2 \rangle \omega^2 + \langle C_1 \rangle]^2}. \quad (8)
 \end{aligned}$$

Корреляционные функции, спектральные плотности которых являются дробно-рациональными функциями вида:

$$\begin{aligned}
 S(\omega) &= C \frac{|(i\omega)^m + b_1(i\omega)^{m-1} + \dots + b_m|^2}{|(i\omega)^n + a_1(i\omega)^{n-1} + \dots + a_n|^2} = \\
 &= C \frac{\omega^{2m} + B_1\omega^{2(m-1)} + \dots + B_m}{\omega^{2n} + A_1\omega^{2(n-1)} + \dots + A_n},
 \end{aligned}$$

где коэффициенты $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m, A_1, \dots, A_n$ и $B_1, \dots, B_m$ суть вещественные числа, можно записать в следующем общем виде [9]:

$$\begin{aligned}
 K(x - x') &= \sum_{k=1}^{n_2} \exp(-\alpha_k^{(2)}|x - x'|) \{C_k(|x - x'|) \cos[\alpha_k^{(1)}(x - x')]\} + \\
 &+ D_k(|x - x'|) \sin[\alpha_k^{(1)}|x - x'|] + \sum_{j=1}^{n_1} E_j(|x - x'|) \exp(-\alpha_j'|x - x'|),
 \end{aligned}$$

где $i\alpha_1', \dots, i\alpha_{n_1}'$ – чисто мнимые корни, входящие в число корней $\alpha_1, \dots, \alpha_n$;

$\alpha_1^{(1)} + i\alpha_1^{(2)}, \dots, \alpha_{n_2}^{(1)} + i\alpha_{n_2}^{(2)}$ – комплексные корни с положительной вещественной частью, входящие в число корней $\alpha_1, \dots, \alpha_n$;

$C_k(|x - x'|), D_k(|x - x'|), E_j(|x - x'|)$ – многочлены относительно $|x - x'|$, степени которых на единицу меньше кратности соответствующих корней α_j' или $\alpha_k^{(1)} + i\alpha_k^{(2)}$; при отсутствии у $S(\omega)$ кратных корней все коэффициенты C_k, D_k и E_j являются постоянными.

Вторая производная от функции математического ожидания прогибов, входящая в выражение для дисперсии поперечных сил (8), будет иметь вид:

$$\frac{d^2 < w(x, R) >}{dx^2} = \frac{1}{4B_0(R)\alpha\beta} \cdot$$

$$\cdot \left\{ \sum_{i=0}^N \int_{a_i}^{b_i} < q_i(x_i) > e^{-\alpha|x-x_i|} [\beta \cos \beta(x-x_i) - \alpha \sin \beta |x-x_i|] dx_i + \right.$$

$$\left. + \sum_{j=0}^U < P_j > e^{-\alpha|x-d_j|} [\beta \cos \beta(x-d_j) - \alpha \sin \beta |x-d_j|] \right\}, \quad x \geq 0.$$

Тогда плотность распределения поперечной силы в балке в характерном сечении x^* при любой конкретной реализации кубиковой прочности бетона будет иметь вид:

$$p_Q(Q, x^*, R) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D_Q(x^*, R)}} \exp \left\{ -\frac{[Q - < Q(x^*, R) >]^2}{2D_Q(x^*, R)} \right\}.$$

С учётом случайного характера нормально распределенной кубиковой прочности бетона R с плотностью $p_R(R)$ математическое ожидание и дисперсия поперечных сил в балке запишутся в виде:

$$< Q(x) > = \int_{-\infty}^{\infty} < Q(x, R) > p_R(R) dR; \quad D_Q(x) = \int_{-\infty}^{\infty} D_Q(x, R) p_R(R) dR.$$

Зная математическое ожидание и дисперсию поперечных сил в балке, можно построить его нормальное распределение в любом, в том числе в характерном сечении x^* , которое будет иметь вид:

$$p_Q(Q, x^*) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D_Q(x^*)}} \exp \left\{ -\frac{[Q - < Q(x^*) >]^2}{2D_Q(x^*)} \right\}.$$

Вычисления интегралов, входящих в формулу (8), сводятся к вычислению интегралов от чётных дробно-рациональных функций общего вида [13]:

$$I_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g_n(\omega) d\omega}{h_n(\omega) h_n(-\omega)}, \quad (9)$$

где $g_n(\theta)$ и $h_n(\theta)$ - комплексные многочлены следующего вида, где $\theta = \omega$ или $-\omega$:

$$g_n(\theta) = a_0 \theta^{2n-2} + a_1 \theta^{2n-4} + \dots + a_{n-1};$$

$$h_n(\theta) = b_0 \theta^n + b_1 \theta^{n-1} + \dots + b_n, \quad b_0 \neq 0,$$

причем в многочлен $g_n(\omega)$ входят только чётные степени ω , так как величина интеграла не зависит от нечётных степеней ω , а многочлен $h_n(\omega)$ таков, что все его корни имеют отрицательные действительные части и лежат в верхней полуплоскости, а корни многочлена $h_n(-\omega)$ лежат, соответственно, в нижней полуплоскости.

Для любого $n > 1$ интеграл (9) можно вычислить по основной теореме Коши теории вычетов [14]:

$$I_n = \frac{1}{2\pi i} \left\{ 2\pi i \sum_{\eta=1}^n \operatorname{Res}_{\omega=\omega_\eta} \left[\frac{g_n(\omega)}{h_n(\omega) h_n(-\omega)} \right] \right\}. \quad (10)$$

Учитывая голоморфность функций $g_n(\omega)$ и $h_n(\omega)$ и с учетом следующего известного равенства теории вычетов [15]:

$$\operatorname{Res}_{\omega=\omega_\eta} \frac{g_n(\omega)}{h_n(\omega)} = \frac{g_n(\omega_\eta)}{h'_n(\omega_\eta)},$$

где функция $h'_n(\omega_\eta)$ является производной по ω от полинома $h_n(\omega)$, выражение (10) будет иметь вид:

$$I_n = \sum_{\eta=1}^n \frac{g_n(\omega_\eta)}{h'_n(\omega_\eta)h_n(-\omega_\eta)} = \frac{(-1)^n}{2a_0 \prod_{l < m} (\omega_m + \omega_l)} \sum_{\eta=1}^n \frac{g_n(\omega_\eta)}{\omega_\eta h'_n(\omega_\eta)} \prod_{j \neq i}^{i,j \neq \eta} (\omega_i + \omega_j). \quad (11)$$

В матричной форме выражение (11) можно записать в следующем виде [16]:

$$I_n = (-1)^n \frac{N_n}{2a_0 D_n}, \quad (12)$$

где N_n – детерминант матрицы, составленной из коэффициентов многочленов $g_n(\omega)$ и $h_n(\omega)$:

$$N_n = \det \begin{bmatrix} a_0 & b_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_1 & b_2 & b_1 & 0 & \dots & 0 \\ a_2 & b_4 & b_3 & b_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1} & 0 & 0 & 0 & \dots & b_n \end{bmatrix},$$

здесь $b_k = 0$, если $k < 0$ или $k > n$;

D_n – определитель матрицы, составленной из коэффициентов многочлена $h_n(\omega)$:

$$D_n = \det \begin{bmatrix} b_1 & b_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b_3 & b_2 & b_1 & b_0 & \dots & 0 \\ b_5 & b_4 & b_3 & b_2 & \dots & 0 \\ b_7 & b_6 & b_5 & b_4 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & b_n \end{bmatrix}.$$

Результаты и обсуждение

Результаты интегрирования с использованием формулы (12) для полиномов до 7 степени включительно в замкнутой форме приводятся, например, в [17].

Разрушение железобетонной балки по наклонному сечению происходит в случае, если $Q(x^*) > Q_{ult}$, где $Q_{ult} = Q_{sw}(R_{bt}, \sigma_T)$ – случайная несущая способность балки по наклонному сечению, являющаяся нормально распределенной функцией случайных величин R_{bt} и σ_T ; а $Q(x^*)$ – случайная поперечная сила в балке в характерном сечении x^* , зависящая от случайной величины прочности R и случайных функций $q(x)$, $C_1(x)$, $C_2(x)$. Характерное сечение в нашем случае будет совпадать с сечением, в котором возникает наибольшее математическое ожидание поперечной силы.

Тогда вероятность $\mathbb{P}_{Q_{ult}}$ разрушения железобетонной балки по наклонному сечению от действия случайной поперечной силы $Q(x^*)$ в характерном сечении x^* находится по формуле Ньютона-Лейбница:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{Q_{ult}}(x^*) &= \int_{-\infty}^{\infty} p_{\sigma_T}(\sigma_T) \int_{-\infty}^{\infty} p_{R_{bt}}(R_{bt}) \int_{-\infty}^{\infty} p_R(R) \left[\int_{Q_{ult}(R_{bt}, \sigma_T)}^{\infty} p_Q(Q, x^*, R) dQ \right] d\sigma_T dR_{bt} dR = \\ &= \iiint_{-\infty}^{\infty} p_{\sigma_T}(\sigma_T) p_{R_{bt}}(R_{bt}) p_R(R) \left\{ 1 - \Phi \left[\frac{Q_{ult}(R_{bt}, \sigma_T) - Q(x^*, R)}{\sqrt{D_Q(x^*, R)}} \right] \right\} d\sigma_T dR_{bt} dR, \quad (13) \end{aligned}$$

где $p_{\sigma_T}(\sigma_T)$ и $p_{R_{bt}}(R_{bt})$ - функции плотностей распределений случайного предела текучести арматуры $\tilde{\sigma}_T$ и случайной прочности бетона на растяжение $\tilde{R}_{bt}$, соответственно;

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z \exp(-\frac{t^2}{2}) dt - \text{интеграл вероятности Гаусса};$$

$Q_{ult}(R_{bt}, \sigma_T)$ - предельная поперечная сила, зависящая от случайных величин R_{bt} и σ_T и равная в соответствии с п. 5.2.11 [16]:

$$Q_{ult}(R_{bt}, \sigma_T) = Q_{sw}(R_{bt}, \sigma_T) = 2 \sqrt{\frac{bh_0^2 \varphi_{b2} R_{bt} \gamma_{s1} \sigma_T \varphi_{sw} A_{sw}}{s_w}} \approx 1,9 h_0 \sqrt{\frac{b A_{sw}}{s_w} R_{bt} \sigma_T}, \quad (14)$$

здесь $\varphi_{b2} = 1,5$; $\varphi_{sw} = 0,75$; $\gamma_{s1} = 0,8$; обозначения в выражении (14) приняты по [18].

Зная вероятность разрушения балки по нормальному сечению $\mathbb{P}_{M_{ult}}$ и вероятность возникновения недопустимых прогибов $\mathbb{P}_{[w]}$, полученные в [1,2], а также вероятность разрушения по наклонному сечению $\mathbb{P}_{Q_{ult}}$ (13), можно определить суммарную вероятность $\mathbb{P}$ наступления предельных состояний в железобетонной балке как сумму вероятностей n совместных событий по формуле перекрытий (включений и исключений) теории вероятностей [19]:

$$\begin{aligned} \mathbb{P} &= \sum_{i=1}^n \mathbb{P}_i - \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \mathbb{P}_i \mathbb{P}_j + \sum_{i=1}^{n-2} \sum_{j=i+1}^{n-1} \sum_{k=j+1}^n \mathbb{P}_i \mathbb{P}_j \mathbb{P}_k - \\ &- \sum_{i=1}^{n-3} \sum_{j=i+1}^{n-2} \sum_{k=j+1}^{n-1} \sum_{l=k+1}^n \mathbb{P}_i \mathbb{P}_j \mathbb{P}_k \mathbb{P}_l + \dots + (-1)^{n-1} \prod_{i=1}^n \mathbb{P}_i. \end{aligned}$$

В нашем случае вероятность одновременного наступления трех предельных состояний будет равна:

$$\begin{aligned} \mathbb{P} &= \mathbb{P}_{M_{ult}} + \mathbb{P}_{[w]} + \mathbb{P}_{Q_{ult}} - \mathbb{P}_{M_{ult}} \mathbb{P}_{[w]} - \mathbb{P}_{M_{ult}} \mathbb{P}_{Q_{ult}} - \mathbb{P}_{Q_{ult}} \mathbb{P}_{[w]} + \mathbb{P}_{M_{ult}} \mathbb{P}_{Q_{ult}} \mathbb{P}_{[w]} = \\ &= \mathbb{P}_{M_{ult}} + (1 - \mathbb{P}_{M_{ult}}) [\mathbb{P}_{Q_{ult}} + (1 - \mathbb{P}_{Q_{ult}}) \mathbb{P}_{[w]}]. \end{aligned}$$

Выводы

Получена оценка вероятности разрушения по наклонному сечению железобетонной балки от действия поперечной силы, а также оценка суммарной вероятности наступления трех предельных состояний железобетонной балки с вероятностными параметрами прочности, лежащей на упругом основании модели В.З. Власова - П.Л. Пастернака, обладающем стохастическими свойствами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Деминов П.Д. К оценке статистических параметров железобетонной балки на упругом основании, имеющем стохастические характеристики // Строительство и реконструкция. 2018. № 5(79). С. 5-12.
2. Деминов П.Д. Оценка вероятности возникновения недопустимых прогибов в железобетонной балке, лежащей на стохастическом основании с двумя коэффициентами постели, под действием нестационарной случайной нагрузки // Известия ВУЗов. Технология текстильной промышленности. 2019. № 4 (382). С. 48-54.
3. Тамразян А.Г., Дудина И.В. Влияние изменчивости контролируемых параметров на надежность преднапряженных балок на стадии изготовления. Жилищное строительство. 2001. № 1. С.16-17.
4. Тамразян А.Г. Огнеударостойкость несущих железобетонных конструкций высотных зданий. Жилищное строительство. 2005. № 1. С.7.
5. Киселев В.А. Расчет балок на упругом основании. М.: Издательство МАДИ, 1981. С. 39-40.
6. Хинчин А.Я. Теория корреляции стационарных статистических процессов // Успехи математических наук. М.: Наука, 1938. Выпуск 5. С. 42-51.
7. Раскатов С.Н. Расчет балочных и плитных свайных ростверков на упругом стохастическом основании: дис. ... канд. техн. наук. М.: МИСИ, 1976. 135 с.
8. Болотин В.В. Об упругих деформациях подземных трубопроводов, прокладываемых в статистически неоднородном грунте // Строительная механика и расчет сооружений. 1965. № 1. С. 4-8.
9. Благонядин В.Л., Кудрявцев Е.П. Статистическое исследование деформаций песчаных оснований и трубопроводов подземных волноводных линий связи // Доклады научно-технической конференции по итогам научно-исследовательских работ за 1964-1965 г. Секция динамики и прочности машин. М.: МЭИ, 1965. С. 78-86.
10. Яглом А.М. Корреляционная теория стационарных случайных функций с примерами из метеорологии. Л.: Гидрометеоиздат, 1981. С. 121-122, 129.
11. Пугачёв В.С. Теория случайных функций и её применение к задачам автоматического управления. М., Физматиздат, 1960. С. 340.
12. Миллер В.М., Панков А.Р. Теория случайных процессов в примерах и задачах. М., Физматлит, 2002. С. 308-309.
13. Булгаков Б.В. Колебания. М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1954. С. 159-167.
14. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. М.: Наука, 1976. С.130.
15. Кац А.М. К вопросу о вычислении квадратичного критерия качества регулирования // Прикладная математика и механика. 1952. Т. XVI. Вып. 3. С. 362-364.
16. Теория следящих систем / под ред. Джеймс Х.М., Никольс Н.Б., Филлипс Р.С. М.: Иностранная литература, 1953. С. 411-418, 454-456.
17. СП 63.13330.2018. Бетонные и железобетонные конструкции. Основные положения. СНиП 52-01-2003. М.: Стандартинформ, 2019.
18. СП 52-101-2003 Бетонные и железобетонные конструкции без предварительного напряжения арматуры. М., 2004.
19. Крицкий О.Л., Михальчук А.А., Трифонов А.Ю., Шинкеев М.Л. Теория вероятностей и математическая статистика для технических университетов. Ч. I. Теория вероятностей: учебное пособие. Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2010. С.16-17.

REFERENCES

1. Deminov P.D. K otsenke statisticheskikh parametrov zhelezobetonnoy balki na uprugom osnovanii, imeyushchem stokhasticheskiye kharakteristiki [To the assessment of the statistical parameters of a reinforced concrete beam on an elastic foundation with stochastic characteristics]. Building and reconstruction. 2018. No. 5 (79). Pp.5-12.
2. Deminov P.D. Otsenka veroyatnosti vozniknoveniya nedopustimyykh progibov v zhelezobetonnoy balke, lezhashchey na stokhasticheskom osnovanii s dvumya koeffitsiyentami posteli, pod deystviyem nestatsionarnoy sluchaynoy nagruzki [Estimation of the probability of occurrence of unacceptable deflections in a reinforced concrete beam lying on a stochastic foundation with two bed coefficients under the action of a non-stationary random load]. Izvestiya VUZov. Tekhnologiya tekstil'noy promyshlennosti. 2019, No. 4 (382). Pp. 48-54.
3. Tamrazyan A.G., Dudina I.V. Vliyaniye izmenchivosti kontroliruyemykh parametrov na nadezhnost' prednapryazhennykh balok na stadii izgotovleniya [Influence of variability of controlled parameters on the reliability of prestressed beams at the manufacturing stage]. Zhilishchnoe stroitelstvo. 2001. No. 1. P.16-17.

4. Tamrazyan A.G. Ogneudarostoykost' nesushchikh zhelezobetonnykh konstruktсий vysoknykh zdaniy [Fire resistance of load-bearing reinforced concrete structures of high-rise buildings]. Zhilishchnoe stroitel'stvo. 2005. No. 1. Pp. 7.
5. Kiselev V.A. Raschet balok na uprugom osnovanii [Calculation of beams on an elastic foundation]. Moscow: MADI Publishing House, 1981. Pp. 39-40.
6. Khinchin A.Ya. Teoriya korrelyatsii statsionarnykh statisticheskikh protsessov [Correlation theory of stationary statistical processes] // Uspekhi Matematicheskikh Nauk. 1938. Issue 5. Pp. 42-51.
7. Raskatov S.N. Raschot balochnykh i plitnykh svaynykh rostverkov na uprugom stokhasticheskom osnovanii [Calculation of beam and slab pile grillages on an elastic stochastic foundation]: dis. ... Cand. tech. sciences. Moscow.: MISI, 1976. 135 p.
8. Bolotin V.V. Ob uprugikh deformatsiyakh podzemnykh truboprovodov, prokladyvayemykh v statisticheski neodnorodnom grunte [On elastic deformations of underground pipelines laid in statistically heterogeneous soil // Structural mechanics and calculation of structures]. 1965. No. 1. Pp. 4-8.
9. Blagonadezhin V.L., Kudryavtsev E.P. Statisticheskoye issledovaniye deformatsiy peschanykh osnovaniy i truboprovodov podzemnykh volnovodnykh liniy svyazi [Statistical study of deformations of sandy foundations and pipelines of underground waveguide communication lines]. Reports of a scientific and technical conference on the results of research work for 1964-1965, Section of dynamics and strength of machines. Moscow: MEI, 1965. Pp. 78-86.
10. Yaglom A.M. Korrelyatsionnaya teoriya statsionarnykh sluchaynykh funktsiy s primerami iz meteorologii [Correlation theory of stationary random functions with examples from meteorology]. Leningrad: Gidrometeoizdat, 1981. Pp. 121-122, 129.
11. Pugachev V.S. Teoriya sluchaynykh funktsiy i yeyo primeneniye k zadacham avtomaticheskogo upravleniya [The theory of random functions and its application to automatic control problems]. – Moscow: Fizmatizdat, 1960. 340 p.
12. Miller V.M., Pankov A.R. Teoriya sluchaynykh protsessov v primerakh i zadachakh [Theory of stochastic processes in examples and problems]. Moscow: Fizmatlit, 2002. Pp. 308-309.
13. Bulgakov B.V. Kolebaniya [Vibrations]. Moscow: State publishing house of technical and theoretical literature, 1954. Pp. 159-167.
14. Shabat B.V. Vvedeniye v kompleksnyy analiz [Introduction to complex analysis]. Moscow: Nauka, 1976. P.130.
15. Katz A.M. K voprosu o vychislenii kvadrachnogo kriteriya kachestva regulirovaniya [On the issue of calculating the quadratic quality criterion of regulation] // Applied Mathematics and Mechanics. 1952. T. XVI. Issue. 3. Pp. 362-364.
16. James H.M., Nichols N.B., Phillips R.S. et al. Teoriya sledyashchikh system [The theory of tracking systems]. Moscow: Inostrannaya literatura, 1953. Pp. 411-418, 454-456.
17. Building Code of RF SP 63.13330.2018. Betonnyye i zhelezobetonnyye konstruktсии. Osnovnyye polozheniya. SNiP 52-01-2003 [Concrete and reinforced concrete structures. Basic provisions. SNiP 52-01-2003]. – Moscow: Standartinform, 2019.
18. Building Code of RF SP 52-101-2003. Betonnyye i zhelezobetonnyye konstruktсии bez predvaritel'nogo napryazheniya armatury [Concrete and reinforced concrete structures without prestressing reinforcement]. Moscow, 2004.
19. Kritskiy O.L., Mikhalechuk A.A., Trifonov A.Yu., Shinkeev M.L. Teoriya veroyatnostey i matematicheskaya statistika dlya tekhnicheskikh universitetov. Ch. I. Teoriya veroyatnostey [Probability theory and mathematical statistics for technical universities. Part I. Probability theory]. Tomsk: Publishing house of the Tomsk Polytechnic University, 2010. Pp.16-17.

Информация об авторе:

Демин Павел Дмитриевич

Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, г. Москва, Россия, кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры железобетонных и каменных конструкций.

E-mail: p-deminov@mail.ru

Information about the author:

Deminov Pavel D.

National Research Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russia, candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Associate Professor of the Department of Reinforced Concrete and Stone Structures.

E-mail: p-deminov@mail.ru