

Е.В. ЛЕОНТЬЕВ¹¹ФАУ «Главгосэкспертиза России», г. Москва, Россия

К ВОПРОСУ О ПОПЕРЕЧНЫХ КОЛЕБАНИЯХ БАЛОК НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ ПРИ ИЗМЕНЕНИИ УСЛОВИЙ ОПИРАНИЯ

Аннотация. В работе рассматривается система «балка-основание», в которой балка со свободными краями сначала находилась на сплошном упругом основании, но при внезапном образовании дефекта в основании под правой частью балки, оно исключено из работы. В результате расчётов, выполненных методом начальных параметров, определены перемещения и внутренние усилия для статической задачи. Решена динамическая задача по определению усилий и перемещений с учётом трёх вибрационных нагрузок $F(t) = F \sin \gamma t$, приложенных в произвольных точках d при изменении условий опирания правой части балки на упругое основание, определены значения коэффициентов динамичности.

Сформулированы условия, которые необходимо учитывать при анализе динамического поведения конструкции под действием вибрационных нагрузок в случае изменения условий опирания на упругое основание.

Ключевые слова: грунтовое основание, балка на упругом основании, метод начальных параметров, свободные колебания, вынужденные колебания, динамический анализ, изменение условий опирания балки.

E.V. LEONTIEV¹¹FAU "Glavgosexpertiza of Russia", Moscow, Russia

LATERAL VIBRATIONS OF BEAMS ON AN ELASTIC BASE AT CHANGING THE SUPPORTING CONDITIONS

Abstract. The paper considers the system "beam - elastic foundation", in which a beam with free edges was at first on a solid elastic foundation, but when a defect suddenly forms in the foundation under the right side of the beam, part of foundation was removed from design model. As a result of calculations performed by the method of initial parameters, the displacements and internal forces for the static problem are determined. The dynamic problem of determining the forces and displacements was solved, taking into account the three vibration loads $F(t) = F \sin \gamma t$ applied at arbitrary points d when the conditions for supporting the right side of the beam on an elastic foundation were changed, the values of the dynamics coefficients were determined.

Conditions are formulated that must be taken into account when analyzing the dynamic behavior of a structure under the influence of vibration loads in the case of a change in the conditions of bearing on an elastic foundation.

Keywords: soil foundation, beam on an elastic foundation, method of initial parameters, free vibrations, forced vibrations, dynamic analysis, changing the conditions of support of the beam

Введение

В процессе жизненного цикла здания или сооружения условия работы их строительных конструкций могут изменяться, что непосредственно влияет на работу их конструктивной системы. Особенно часто это происходит в процессе эксплуатации, а также изменения возможны в процессе строительства.

В современной строительной практике для выполнения требований механической безопасности зданий и сооружений, которые регламентированы законодательно [1], и получили развитие в современных нормативно-технических документах [2], актуальной

является задача исследования конструктивных систем, изменяющих расчётную схему в силу различных причин при локальном разрушении или в результате проявления опасных природных процессов и явлений или техногенных воздействий.

При проектировании зданий и сооружений необходимо учитывать особые воздействия, к которым относятся деформации основания, вызванные изменением физико-механических свойств грунта, сопровождающиеся снижением его прочностных характеристик в результате карстовых или карстово-суффозионных процессов; тепловых просадок, связанных с оттаиванием льдистых грунтов и залежей подземных льдов; замачивания просадочных грунтов или вследствие ошибок при производстве работ; нарушений правил эксплуатации сооружений; нарушений технологического процесса или поломки оборудования и по другим, не установленным причинам.

В большей степени изменение грунтовых условий влечёт за собой изменение условий работы фундаментных конструкций, которые можно рассматривать как работу балки, лежащей на упругом основании. К этой схеме приводятся многие задачи расчёта элементов конструкций – шпал, рельсов, свай, ленточных фундаментов, резервуаров, трубопроводов, каналов, тоннелей, распределительных устройств каменных конструкций и др.

Вопросам расчёта балок, лежащих на упругом основании, посвящены исследования многих зарубежных и отечественных учёных. Большая часть исследовательских работ выполнена по расчёту балок, лежащих на сплошном упругом основании, описываемых моделью Винклера, и нагруженных статической нагрузкой.

В то же время мало работ [3-6], в которых рассматриваются конструкции на упругом основании, у которых во время эксплуатации изменились граничные условия под частью площади опирания, либо на части опирания основание мгновенно исчезло, что может привести к колебанию конструкций.

Также мало работ, в которых в процессе эксплуатации конструкций рассматривается изменение нагрузки или происходит изменение характера их воздействия. Вместо статической нагрузки будет приложена динамическая, что приведёт к колебанию конструкций.

При таких условиях необходим динамический расчёт. Для этого на предварительном этапе необходимо решить общие статические задачи – как начальные условия исследования динамического процесса при внезапном исключении из работы части упругого основания.

Модели и методы

Решение общей статической задачи выполнено для балки, свободно лежащей на винклеровском сплошном упругом основании, состоящем из трёх различных участков (рисунок 1 а). В середине каждого участка приложена статическая сила. Также, выполнено решение для такой же балки, расположенной на упругом основании слева при изменении условий опирания справа (рисунок 1 б). Решение задачи получено по методу начальных параметров [7,8].

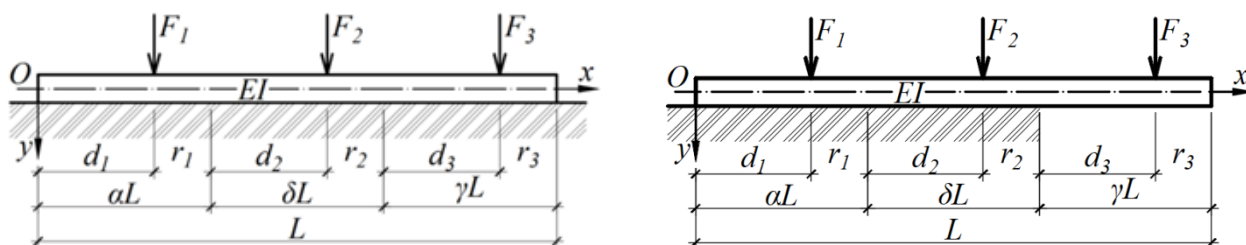


Рисунок 1 - Балка на упругом основании при действии сосредоточенных сил.

а) балка на сплошном упругом основании; б) изменение условий опирания балки на упругое основание справа

Для поперечных колебаний балки постоянного сечения с равномерно распределённой массой и расположенной на упругом основании дифференциальное уравнение вынужденных колебаний при отсутствии рассеивания энергии при любом законе изменения возмущающей силы $q(x, t)$ имеет вид [9, 10]:

$$EI \frac{\partial^4 y(x, t)}{\partial x^4} + \mu \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} + r_0 b y(x, t) = q(x, t), \quad (1)$$

где E – модуль упругости материала балки; I – момент инерции поперечного сечения балки, $y(x, t)$ – поперечное перемещение оси балки в сечении x ; $q(x, t)$ – возмущающая нагрузка, изменяющаяся во времени t ; $\mu = q/g$; q — равномерно распределенная нагрузка (собственный вес и т. п.) на единицу длины балки; g — ускорение силы тяжести; $r_0 b y(x, t)$ – изменяющаяся по длине балки интенсивность реакции упругого винклеровского основания; r_0 – коэффициент отпора основания или коэффициент «постели»; b – ширина балки.

Общее решение неоднородного дифференциального уравнения (1) состоит из общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения.

Отметим, что в областях, удалённых от резонансных отношений частот, влияние затухания на амплитуды вынужденных колебаний незначительно, и в этих областях расчёт можно производить без учёта затухания [9, 10], рассматривая систему «балка-основание» как консервативную систему. Колебания таких систем считаются незатухающими.

Собственные поперечные колебания балки постоянного сечения с равномерно распределённой нагрузкой, при отсутствии сил сопротивления и возмущающей силы описываются дифференциальным уравнением, полученным из условия равновесия внутренних усилий и сил инерции:

$$EI \frac{\partial^4 y(x, t)}{\partial x^4} + \mu \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} = 0. \quad (2)$$

Простым периодическим решением уравнения собственных колебаний балки (2) является главное колебание, которое изменяется по гармоническому закону:

$$y(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(x) \sin \omega_i t, \quad (3)$$

где $\varphi_i(x)$ – функция, устанавливающая закон распределения максимальных отклонений точек оси балки от равновесного расположения; $\omega_i = \omega_{ix}$ – круговая частота собственных поперечных колебаний части балки на основании, а $\omega_i = \omega_{ik}$ – круговая частота собственных поперечных колебаний части балки без основания, (рад/сек).

Используя метод разделения переменных, задачу (3) можно свести к уравнению собственных колебаний для частей балки aL и δL на основании:

$$\varphi^{IV}(x) + \kappa^4 \varphi(x) = 0, \quad (4)$$

где обозначено:

$$\kappa^4 = \frac{\mu \omega_{\kappa}^2 - r_0 b}{EI}, \quad (5)$$

Для правой части балки γL без основания уравнение собственных колебаний:

$$\varphi^{IV}(x) + k^4 \varphi(x) = 0, \quad (6)$$

где обозначено:

$$k^4 = \frac{\mu \omega_k^2}{EI}.$$

Здесь индекс i опущен, т.к. рассматривается решение в окрестности некоторой конкретной собственной формы колебаний.

Решение уравнений (4) и (6) удобно представить в виде функций Крылова:

$$\left. \begin{aligned} S(x) &= \frac{1}{2} (ch \lambda x + cos \lambda x), \\ T(x) &= \frac{1}{2} (sh \lambda x + sin \lambda x), \\ U(x) &= \frac{1}{2} (ch \lambda x - cos \lambda x), \\ V(x) &= \frac{1}{2} (sh \lambda x - sin \lambda x). \end{aligned} \right\},$$

где $\lambda = \kappa$ для части балки на основании и $\lambda = k$ для части балки без основания.

Для той же балки, исходные данные которой приняты для статического расчёта, при изменении условий опирания справа определим частоты и формы собственных поперечных колебаний с учётом собственного веса.

Также, для той же балки определим перемещения и внутренние усилия при действии трёх вибрационных нагрузок $F(t) = F \sin \gamma t$, приложенных в произвольных точках d (рисунок 2) в случае сплошного упругого основания и при изменении условий опирания балки на упругое основание справа. Частота γ вибрационной нагрузки принята значительно меньшей частоты ω собственных колебаний балки на упругом основании.

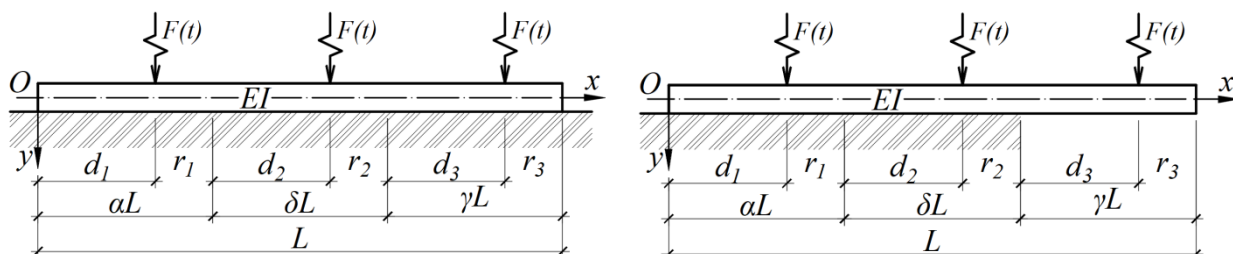


Рисунок 2 - Балка на упругом основании при действии вибрационных сил.

а) балка на сплошном упругом основании; б) изменение условий опирания балки на упругое основание справа

Для практической цели определения частот и форм поперечных колебаний балок, расположенных на упругом основании, а также для определения перемещений и внутренних усилий при действии вынужденных нагрузок также эффективным, является метод начальных параметров с использованием функций Крылова.

Результаты исследования и их анализ

Исходные данные принятые для статических расчётов: балка шириной $b=1,25$ м, высотой $h=1,5$ м, длиной $L=18,0$ м из материала с модулем упругости $E=2,1 \times 10^6$ т/м² расположена на упругом основании с коэффициентом постели $r_0=5000$ т/м³. Длина каждого из трёх участков $\alpha L = \delta L = \gamma L = 6,0$ м, в середине каждого участка действует сила $F=10,0$ т.

По результатам решения статической задачи определены перемещения (рисунок 3) и внутренние усилия (рисунок 4) для балки на сплошном упругом основании и при изменении условий опирания справа при действии сосредоточенных сил. По результатам двух расчётов эпюры совмещены и построены сплошной линией для балки на сплошном основании, штриховой линией - для балки без основания справа.

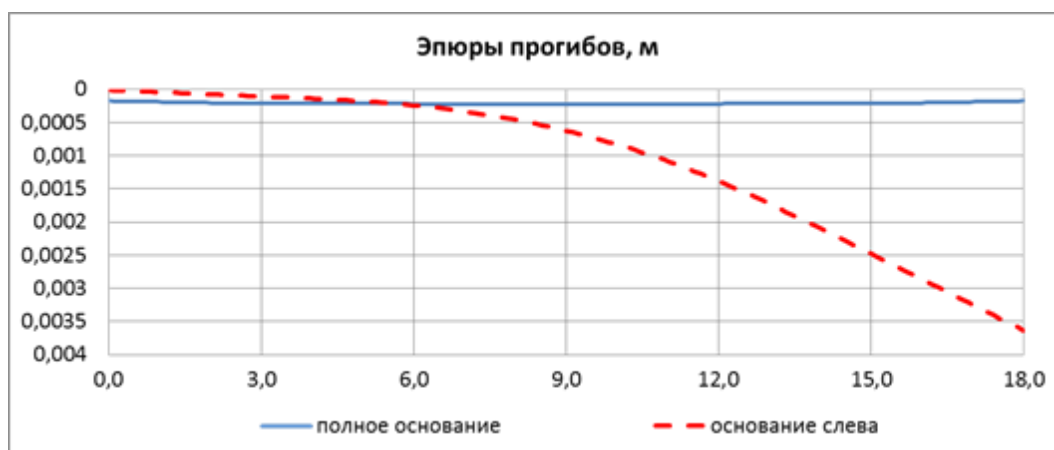


Рисунок 3 - Эпюры прогибов по результатам статического расчёта

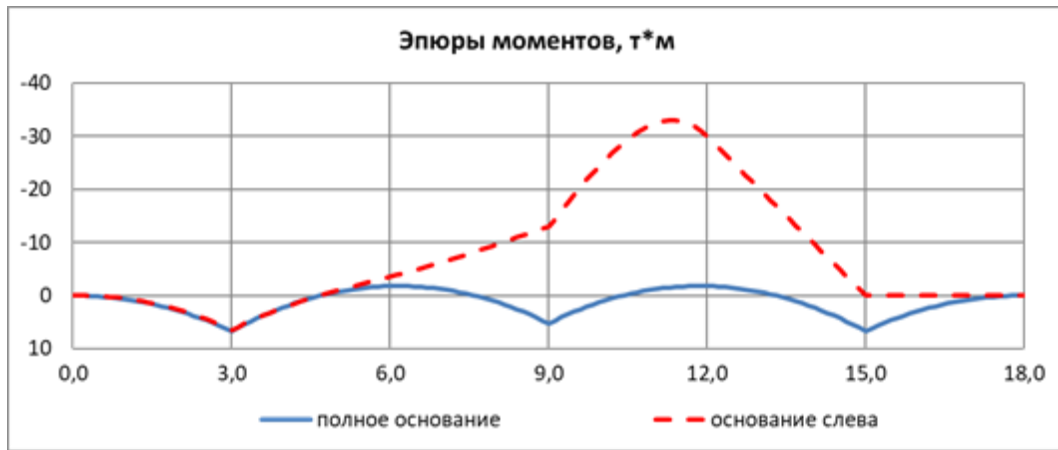


Рисунок 4 - Эпюры моментов по результатам статического расчёта

По результатам расчётов определено, что в случае изменения схемы работы балки при исключении части основания справа изменяется положение балки в плоскости изгиба, что приводит к увеличению значений перемещений и значительному увеличению внутренних усилий. Также, изменяется распределение внутренних усилий по длине балки.

При заданных условиях статической задачи максимальное значение изгибающего момента на сплошном основании составило $M_{max} = 6,7$ т*м, а при исключении основания справа $M_{max} = -33,0$ т*м, т.е. увеличилось в 4,9 раза.

Решение динамической задачи выполнено с использованием вышеназванных исходных данных.

При определении частот и форм собственных поперечных колебаний с учётом собственного веса балки особенностью расчёта является необходимость определения значений двух корней при решении одного частотного уравнения - для участка на основании и для участка без основания. Это возможно выполнить, используя соотношения корней с постоянной величиной ε_i , значения которой приняты равными 0,5; 1,0 и 2,0. Также, значение величины ε_i принято из условия равенства собственных частот поперечных колебаний $\omega_i^* = \omega_i^k$ двух частей балки – на основании и без основания. Результаты расчётов представлены в таблице 1.

Таблица 1 – Корни частотного уравнения и собственные круговые частоты (рад/сек) поперечных колебаний при $\alpha L = \delta L = \gamma L$.

		ε_i			
		0,5	1,0	$\omega_{i*} = \omega_{ik}$	2,0
1	2	3	4	5	6
1 форма	κ_1	0,3453	0,2626	0,2318	0,1892
	k_1	0,1726		0,3264	0,3784
	ω_1^*	187,2	142,9	132,4	122,7
	ω_1^k	37,0	85,7		178,0
2 форма	κ_2	0,5234	0,4363	0,4266	0,3356
	k_2	0,2617		0,4516	0,6712
	ω_2^*	359,2	262,8	253,5	180,8
	ω_2^k	85,1	236,6		560,0
3 форма	κ_3	0,7232	0,6109	0,6076	0,4498
	k_3	0,3617		0,6169	0,8995
	ω_3^*	660,1	477,8	472,9	276,3
	ω_3^k	162,6	463,9		1005,7

При действии вибрационных нагрузок определены перемещения и внутренние усилия балки в случае сплошного упругого основания и при изменении условий опирания балки на упругое основание справа. Вибрационная нагрузка принята $F(t) = F \sin \gamma t = 10,0$ т.

По результатам двух расчётов эпюры моментов совмещены (рисунок 5) и построены сплошной линией для балки на сплошном основании, штриховой линией - для балки без основания справа.

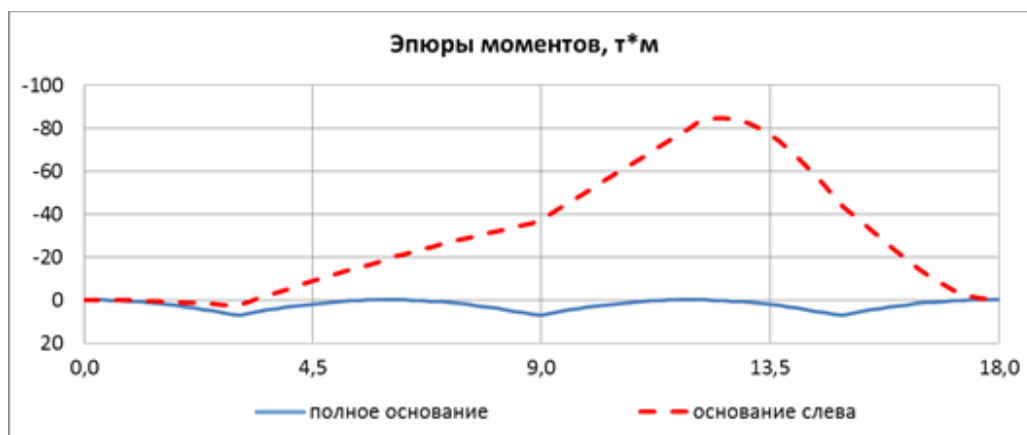


Рисунок 5 - Эпюры моментов по результатам динамического расчёта

Вычислены $K_{дин}$ коэффициенты динамичности, определяющие увеличение изгибающего момента при динамическом воздействии по сравнению со статическим.

В случае сплошного основания при действии вибрационных нагрузок значение момента внутренних усилий увеличилось незначительно, значение коэффициента динамичности составило $K_{дин} = 1,09$.

В случае изменения условий опирания балки на упругое основание справа при тех же условиях значение момента внутренних усилий увеличилось значительно, значение коэффициента динамичности составило $K_{дин} = 2,6$.

Выводы

Результаты расчётов собственных и вынужденных поперечных колебаний системы «балка-основание» при изменении условий опирания позволяют сделать следующие выводы:

1) по результатам вычисления корней частотного уравнения при различных условиях опирания системы «балка-основание» разным частям одной балки могут соответствовать разные частоты собственных колебаний. Собственная частота поперечных колебаний части балки на основании больше или равна собственной частоте колебаний части балки без основания;

2) при различных условиях опирания системы «балка-основание» значения собственных частот поперечных колебаний могут быть равны для разных форм колебаний двух разных частей балки. В этом случае, действие возмущающей силы с частотой вынужденных колебаний равной частоте собственных колебаний, приведёт к образованию резонанса для каждой из двух разных форм колебаний каждой части балки;

3) для балки, расположенной на сплошном упругом основании, при исключении части основания справа изменяется положение в плоскости изгиба, увеличиваются значения перемещений, изменяется распределение внутренних усилий по длине балки и увеличиваются их значения при статическом и динамическом расчётах.

Данные условия необходимо учитывать при анализе динамического поведения конструкции под действием вибрационных нагрузок в случае изменения условий опирания на упругое основание.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Федеральный закон от 30.12.2010 № 384-ФЗ «Технический регламент о безопасности зданий и сооружений» (вступил в силу с 1 июля 2010 года). Новосибирск: Сиб. Унив. Изд-во, 2010. 31 с.
2. СП 385.1325800.2018 «Защита зданий и сооружений от прогрессирующего обрушения. Правила проектирования. Основные положения» // Минстрой России, 2018.

3. Travush V.I., Gordon V.A., Kolchunov V.I., Leontiev E.V. The response of the system "beam - foundation" on sudden changes of boundary conditions // В сборнике: IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. 2018. С. 120-130.
4. Травуш В.И., Гордон В.А., Колчунов В.И., Леонтьев Е.В. Динамические эффекты в балке на упругом основании, вызванные внезапным преобразованием условий опирания // Международный журнал по расчету гражданских и строительных конструкций. 2018. Т. 14. № 4. С. 27-41.
5. Травуш В.И., Гордон В.А., Колчунов В.И., Леонтьев Е.В. Динамическое деформирование балки при внезапном структурном изменении упругого основания // Инженерно-строительный журнал. 2019. № 7 (91). С. 129-144
6. Травуш В.И., Гордон В.А., Колчунов В.И., Леонтьев Е.В. Математическая модель балки, частично опертой на упругое основание // Международный журнал по расчету гражданских и строительных конструкций. 2019. Т. 15. № 2. С. 144-158.
7. Александров А.В., Потапов В.Д., Державин Б.П. Соппротивление материалов. 8-е изд., испр. М.: Студент, 2012. 560 с: ил.
8. Крылов А.Н. О расчёте балок, лежащих на упругом основании. Изд. 3-е. Ленинград: Изд-во АН СССР, 1930. 154 с. (Справочно-техническая литература). [На обл.: 1931 г.]
9. Динамический расчет зданий и сооружений / М.Ф. Барштейн, В.А. Ильичев, Б.Г. Коренев и др. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Стройиздат, 1984. 303 с., ил. (Справочник проектировщика).
10. Бабаков И.М. Теория колебаний. М.: Наука, 1965. 560 с., с илл.

REFERENCES

1. Federal Law of 30.12.2010 No. 384-FZ "Tekhnicheskiiy reglament o bezopasnosti zdaniy i sooruzheniy" ["Technical Regulations on the Safety of Buildings and Structures"] (entered on July 1, 2010). Novosibirsk: Sib. Univ. Publishing house, 2010. 31 p.
2. Russian Building Code SP 385.1325800.2018 "Zashchita zdaniy i sooruzheniy ot progressiruyushchego obrusheniya. Pravila proyektirovaniya. Osnovnyye polozheniya" ["Protection of buildings and structures from progressive collapse. Design rules. Basic provisions"]. Ministry of Construction of Russia, 2018.
3. Travush V.I., Gordon V.A., Kolchunov V.I., Leontiev E.V. The response of the system "beam - foundation" on sudden changes of boundary conditions // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. 2018. Vol. 456. Pp. 120-130.
4. Travush V.I., Gordon V.A., Kolchunov V.I., Leontiev E.V. Dynamic effects in the beam on an elastic foundation caused by the sudden transformation of supporting conditions // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. 2018. Vol. 14. No. 4. Pp. 27-41.
5. Travush V.I., Gordon V.A., Kolchunov V.I., Leontiev E.V. Dynamic deformation of a beam with a sudden structural change in an elastic foundation // Magazine of Civil Engineering. 2019. No. 7 (91). Pp. 129-144
6. Travush V.I., Gordon V.A., Kolchunov V.I., Leontiev E.V. Mathematical model of a beam partially supported on elastic foundation // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. 2019. Vol. 15. No. 2. Pp. 144-158.
7. Aleksandrov A.V., Potapov V.D., Derzhavin B.P. Soprotivleniye materialov [Strength of materials]. 8th ed., Rev. Moscow: Student, 2012.- 560 p.
8. Krylov A.N. O raschote balok, lezhashchikh na uprugom osnovanii [On the calculation of beams lying on an elastic foundation]. Ed. 3rd.- Leningrad: Publishing house of the Academy of Sciences of the USSR, 1930. 154 p.
9. Dinamicheskiiy raschet zdaniy i sooruzheniy [Dynamic calculation of buildings and structures]. Barshtein MF, Ilyichev VA, Korenev BG et al. 2nd ed., Revised. and add. Moscow: Stroyizdat, 1984. 303 p.
10. Babakov I.M. Teoriya kolebaniy [Theory of oscillations]. Moscow: Nauka, 1965. 560 p.

Информация об авторе:

Леонтьев Евгений Владимирович

ФАУ «Главгосэкспертиза России», Управление строительных решений, г. Москва, Россия, начальник отдела, отдел конструктивной надежности и безопасности объектов.
E-mail: e.leontyev@gge.ru

Information about author:

Leontiev Evgeny V.

FAU "Glavgosexpertiza of Russia", Construction Solutions Department, Moscow, Russia, head of department, department of structural reliability and safety of facilities.
E-mail: e.leontyev@gge.ru