

А.В. ТУРКОВ¹, К.А. ИВАНУШКИНА¹¹ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева», г. Орёл, Россия

ВЗАИМОСВЯЗЬ МАКСИМАЛЬНЫХ ПРОГИБОВ И ЧАСТОТ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ИЗОТРОПНЫХ КОЛЬЦЕВЫХ ПЛАСТИН ПРИ НЕОДНОРОДНЫХ УСЛОВИЯХ ОПИРАНИЯ ПО ВНЕШНЕМУ И ВНУТРЕННЕМУ КОНТУРУ

Аннотация. Рассматривается взаимосвязь максимальных прогибов от статической равномерно распределённой нагрузки W_0 и основной частоты собственных поперечных колебаний ω кольцевой изотропной пластинки при неоднородных условиях опирания по внешнему и внутреннему контуру в зависимости от соотношения радиуса внутреннего кольца к наружному радиусу пластинки. По результатам исследования построены графики зависимости максимального прогиба и частоты собственных колебаний пластинки от соотношения r/R . Показано, что для кольцевых пластинок при $r/R \leq 0,75$ коэффициент K с точностью до 4% совпадает с аналогичным коэффициентом для однопролётных балок с неоднородными граничными условиями.

Ключевые слова: кольцевая пластина, условия опирания, частота собственных колебаний, максимальный прогиб.

A. V. TURKOV¹, K. A. IVANUSHKINA¹¹Orel state University named after I. S. Turgenev, Orel, Russia

RELATIONSHIP OF MAXIMUM DEFLECTIONS AND NATURAL FREQUENCIES VIBRATIONS OF ISOTROPIC CIRCULAR PLATES WITH INHOMOGENEOUS RESISTANCE CONDITIONS ON THE OUTER AND INNER CONTOUR

Abstracts. We consider the relationship between the maximum deflections from a static uniformly distributed load W_0 and the basic frequency of proper transverse vibrations of an annular isotropic plate under inhomogeneous support conditions along the outer and inner contour, depending on the ratio of the radius of the inner ring to the outer radius of the plate. Based on the results of the study, graphs of the dependence of the maximum deflection and the frequency of natural vibrations of the plate on the R/R ratio are constructed. It is shown that for annular plates at $r/R = 0.75$, the K coefficient coincides with the same coefficient for single-span beams with non-uniform boundary conditions to an accuracy of 4%.

Keywords: ring plate, support conditions, natural vibration frequency, maximum deflection

Введение

Конструктивные элементы в виде пластин широко применяются в различных областях промышленности, в том числе в строительстве. Они работают при различных видах нагружений (статических и динамических) и при различных закреплениях как по внешнему, так и по внутреннему контуру. Применение в современных зданиях несущих элементов конструкций в виде круглых кольцевых пластин или приближенных к ним вызывает потребность в их диагностике и оценке качества.

В работах проф. В.И. Коробко [1] была установлена фундаментальная закономерность для изотропных пластин постоянного сечения, согласно которой независимо от вида граничных условий пластины произведение её максимального прогиба W_0 от действия равномерно распределенной нагрузки q на квадрат основной частоты колебаний в ненагруженном состоянии ω с точностью до размерного множителя q/m есть величина постоянная:

$$W_0 \cdot \omega^2 = K \frac{q}{m}, \quad (1)$$

где m – равномерно распределённая по площади масса пластины.

Исследованиями взаимосвязи максимальных прогибов и частот собственных колебаний двухслойных пластин занимались В.И. Коробко и О.В. Бояркина (Калашникова) [2, 3], А.В. Турков, К.А. Жупкина (Иванушкина) [2, 4, 5], К.В. Марфин [6]. Исследованиям колебаний составных пластин посвящены также работы А.Р. Ржаницына [7], В.В. Филатова [8, 9], Fabien Marchetti, Kerem Ege, Quentin Leclère, N. V. Roozen [10], Han-Gyu Kim, Richard Wiebe [11] и др. Чтобы подтвердить закономерность (1) для составных многослойных пластин, были проведены их численные исследования при различном количестве слоёв и переменной жесткости связей сдвига между слоями.

В отличие от изотропных сплошных пластин, для кольцевых пластин с неоднородными граничными условиями по внутреннему и внешнему контуру эта закономерность еще мало изучена. Чтобы подтвердить закономерность (1) проведены численные исследования с использованием программного комплекса SCAD для кольцевых пластин с неоднородными граничными условиями (жёсткое опирание по внешнему контуру и шарнирное опирание по внутреннему контуру; шарнирное опирание по внешнему контуру и жёсткое опирание по внутреннему контуру) по внутреннему и внешнему контуру (рисунок 1). В качестве расчетной пластины была принята 60-угольная пластина внешним радиусом $R = 0,5$ м. Изначально при внутреннем радиусе $r = 0$ пластина была разбита на 1200 конечных элементов. В дальнейшем внутренний контур кольцевой пластины образовывался путём удаления одного ряда конечных элементов пластины. Опоры по контурам плиты располагались в узлах конечных элементов конструкции.

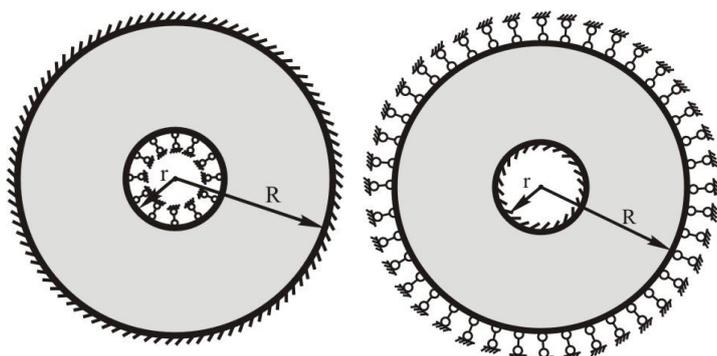


Рисунок 1 – Схемы опирания расчётных пластин по внешнему и внутреннему контуру

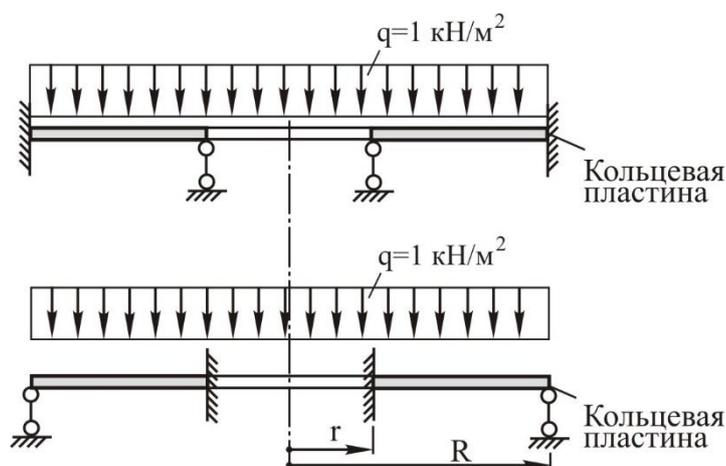


Рисунок 2 – Расчётные схемы кольцевых пластин

Опоры по контуру плиты располагались в узлах конечных элементов конструкции по внешнему и внутреннему контуру. Расчётные схемы пластин представлены на рисунке 2.

Пластина принята постоянного сечения толщиной $\delta = 8$ мм из древесно-стружечной плиты. Все характеристики приняты по паспорту изделия: толщина $\delta = 8$ мм, средняя плотность $\rho = 7,40$ кН/м³, модуль упругости при изгибе $E = 2600$ кН/м². Для динамического расчета массы в узлах собирались в соответствии с объемным весом и грузовой площадью узла. При статическом расчёте к верхнему слою прикладывалась равномерно распределённая нагрузка интенсивностью $1,0$ кН/м². Исследования проводились методом конечных элементов.

Расчеты выполнялись в программном комплексе SCAD. В результате расчёта определялся максимальный прогиб и частота основного тона поперечных колебаний пластин при изменении внутреннего радиуса r кольцевой пластины, которая изменялась от $r/R = 0$ (сплошная пластина с

опорой в центре) до $r/R = 0,9$. Результаты исследований пластины с комбинированными граничными условиями по внешнему и внутреннему контуру приведены в таблицах 1 и 2.

Таблица 1 – Результаты численных исследований кольцевой пластины с шарнирным опиранием по внешнему и жестким опиранием по внутреннему контурам

r/R	Круговая частота основного тона, ω (c^{-1})	Максимальный прогиб, W_0 (мм)	$K=W_0 \omega^2/(q/m)$	$K_{теор}=W_0 \omega^2/(q/m)$ на основе аналитических W_0 и ω	Отклонение K от $K_{теор}$ (%)
0	282,7025	2,625620	1,292	1,285	-0,54
0,05	303,9536	2,271060	1,292		-0,54
0,10	337,6576	1,830380	1,285		0,00
0,15	379,2564	1,453230	1,287		-0,16
0,20	429,6042	1,128200	1,282		0,23
0,25	490,6286	0,866069	1,284		0,08
0,30	565,3623	0,650100	1,280		0,39
0,35	658,1346	0,480663	1,282		0,23
0,40	775,1888	0,345031	1,277		0,62
0,45	925,7630	0,243031	1,283		0,16
0,50	1123,6820	0,163470	1,271		1,09
0,55	1390,9280	0,107715	1,283		0,16
0,60	1763,7980	0,065385	1,253		2,49
0,65	2305,6710	0,039059	1,279		0,47
0,70	3138,1950	0,020408	1,238		3,66
0,75	4516,9220	0,010045	1,262		1,79
0,80	7036,7040	0,004003	1,221		4,98
0,85	12518,3300	0,001233	1,190		7,39
0,90	27223,1700	0,000250	1,141		11,21

Таблица 2 – Результаты численных исследований кольцевой пластины с жестким опиранием по внешнему и шарнирным опиранием по внутреннему контуру

r/R	Круговая частота основного тона, ω (c^{-1})	Максимальный прогиб, W_0 (мм)	$K=W_0 \omega^2/(q/m)$	$K_{теор}=W_0 \omega^2/(q/m)$ на основе аналитических W_0 и ω	Отклонение K от $K_{теор}$ (%)
0	431,4723	1,163530	1,334	1,285	-3,81
0,05	411,8398	1,271080	1,328		-3,35
0,10	421,7641	1,208450	1,324		-3,04
0,15	452,1631	1,045300	1,316		-2,41
0,20	496,7357	0,865008	1,314		-2,26
0,25	554,8394	0,691608	1,311		-2,02
0,30	628,4426	0,533468	1,297		-0,93
0,35	721,3527	0,406413	1,302		-1,32
0,40	839,7525	0,298754	1,297		-0,93
0,45	993,0492	0,211748	1,286		-0,08
0,50	1195,8680	0,147272	1,297		-0,93
0,55	1470,7380	0,096412	1,284		0,08
0,60	1854,7650	0,060741	1,287		-0,16
0,65	2414,0150	0,035950	1,290		-0,39
0,70	3274,0520	0,018756	1,238		3,66
0,75	4693,9030	0,009436	1,280		0,39
0,80	7279,1670	0,003692	1,205		6,23
0,85	12335,8200	0,001170	1,096		14,71
0,90	28400,3100	0,000229	1,137		11,52

По результатам исследования кольцевой пластины построены графики изменения прогибов и частот колебаний в зависимости от соотношения внутреннего и внешнего радиуса r/R (рисунок 3). При постановке опоры в центр круглой пластины, а также при подкреплении внутреннего контура кольцевой пластины характер деформаций и форма поперечных колебаний соответствует деформированию однопролётной балки с соответствующими граничными условиями. Анализ данных показывает, что при соотношении $r/R \leq 0,8$ фундаментальная зависимость (1) выполняется.

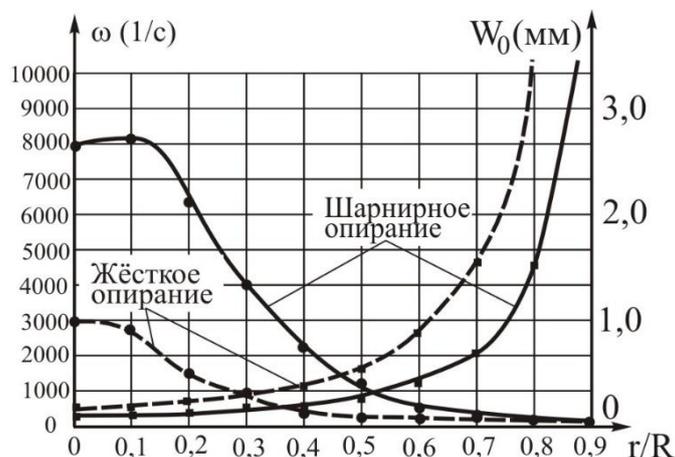


Рисунок 3 – Изменение частот собственных колебаний и прогибов кольцевой пластины в зависимости соотношения r/R

Выводы

В результате исследований подтверждена фундаментальная зависимость (1) для кольцевых изотропных пластин с однородными граничными условиями на внешнем и внутреннем контуре. Результаты численных исследований показали хорошее совпадение по коэффициенту K . Максимальное расхождение численных и аналитических значений достигает 5,53% при соотношении $r/R \leq 0,8$. В основном расхождения не превышают 3%, причём ошибка нарастает с уменьшением соотношения $r/R \leq 0,8$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Коробко В.И. Об одной "замечательной" закономерности в теории упругих пластинок // Известия вузов. Строительство и архитектура. 1989. № 11. С. 32-36.
2. Коробко В.И., Турков А.В., Калашникова О.В. Поперечные колебания, прогибы и усилия в однопролётных составных балках с различными граничными условиями слоев // Строительная механика и расчет сооружений. 2010. № 3. С. 65-68.
3. Коробко В.И., Бояркина О.В. Взаимосвязь задач поперечного изгиба и свободных колебаний треугольных пластинок // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Строительство и архитектура. 2007. № 22 (94). С. 24-26.
4. Турков А.В., Жупикова К.А. Взаимосвязь максимальных прогибов и частот собственных колебаний изотропных кольцевых пластин при шарнирном опирании по внешнему контуру // Актуальные проблемы строительства, строительной индустрии и архитектуры: сборник материалов XX международной научно-технической конференции. Тула, 28-29 июня 2019. Тульский государственный университет. С. 299-302. URL: http://dmitriy.chiginskiy.ru/publications/files/Materialy_XX_MNTK-2019_Tula.pdf (дата обращения: 21.05.2020).
5. Турков А.В., Жупикова К.А. Взаимосвязь максимальных прогибов и частот собственных колебаний изотропных кольцевых пластин при жестком закреплении по внешнему контуру // Актуальные проблемы современной когнитивной науки: сборник статей по итогам всероссийской научно-практической конференции. Волгоград. 30 июня 2019. Стерлитамак: АМИ, 2019. С. 70-72. URL: https://www.elibrary.ru/ip_restricted.asp?rpage=https%3A%2F%2Fwww%2Eelibrary%2Eru%2Fitem%2Easp%3Fid%3D38301055 (дата обращения: 21.05.2020).

6. Турков А.В., Марфин К.В., Баженова А.В. Прогибы и частоты собственных колебаний составных многослойных квадратных изотропных пластин с шарнирным опиранием по контуру при изменении жесткости связей сдвига // Строительство и реконструкция. 2019. № 4 (84). С. 64-69.
7. Ржаницын, А.Р. Составные стержни и пластинки. М.: Стройиздат, 1986. 316 с.
8. Филатов В.В. К расчету составных пластин по теории А.Р.Ржаницына. // Труды международной научно-технической конф. "Вычислительная механика деформируемого твердого тела". Москва: МИИТ, 2006. Том 2. С. 414-416.
9. Филатов В.В., Мусса Сали. Об учете податливости поперечных связей в расчетах составных пластин по теории // Промышленное и гражданское строительство. 2010. №2. С. 28-29.
10. Fabien Marchetti, Kerem Ege, Quentin Leclère, N. B. Roozen On the structural dynamics of laminated composite plates and sandwich structures; a new perspective on damping identification // Journal of Sound and Vibration. Volume 474, 26 May 2020, 115256
11. Han-Gyu Kim, Richard Wiebe Numerical investigation of stress states in buckled laminated composite plates under dynamic loading // Composite Structures. Volume 235, 1 March 2020, 111743

REFERENCES

1. Korobko V.I. Ob odnoi «zamechatelnoi» zakonomernosti v teorii uprugih plastinok [About one "remarkable" regularity in the theory of elastic plates]. *Izv. Vuzov. Stroitel'stvo i arhitektura*. 1989. No. 11. Pp. 32-36.
2. Korobko V.I., Turkov A.V., Kalashnikova O.V. [Shear vibrations, deflections and forces in single-span composite beams with different boundary conditions of layers]. *Structural mechanics and calculation of structures*. 2010. No. 3. Pp. 65-68.
3. Korobko V.I., Boyarkina O.V. Vzaimosvyaz' zadach poperechnogo izgiba i svobodnykh kolebanij treugol'nykh plastinok [The relationship between the problems of transverse bending and free vibrations of triangular plates]. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Building and architecture*. 2007. No. 22 (94). Pp. 24-26.
4. Turkov A.V., Zhupikova K.A. Vzaimosvyaz' maksimal'nykh progibov i chastot sobstvennykh kolebanij izotropnykh kol'tsevykh plastin pri sharnir-nom opiranii po vneshnemu konturu [The relationship of maximum deflections and natural vibration frequencies of isotropic annular plates with hinged support along the outer contour]. Actual problems of construction, construction industry and architecture: collection of materials of the XX international scientific and technical conference. Tula, June 28-29, 2019. Tula State University. Pp. 299-302. URL: http://dmitriy.chiginskiy.ru/publications/files/Materialy_XX_MNTK-2019_Tula.pdf (date accessed: 05/21/2020).
5. Turkov A.V., Zhupikova K.A. Vzaimosvyaz' maksimal'nykh progibov i chastot sobstvennykh kolebanij izotropnykh kol'tsevykh plastin pri zhestkom zakreplenii po vneshnemu konturu [The relationship between the maximum deflections and natural vibration frequencies of isotropic annular plates with rigid fastening along the outer contour]. Actual problems of modern cognitive science: collection of articles on the results of the All-Russian scientific-practical conference. Volgograd. June 30, 2019. Sterlitamak: AMI, 2019.S. 70-72. URL: https://www.elibrary.ru/ip_restricted.asp?rpage=https%3A%2F%2Fwww%2Eelibrary%2Eru%2Fitem%2Easp%3Fid%3D38301055 (date accessed: 05/21/2020).
6. Turkov A.V., Marfin K.V., Bazhenova A.V. [Deflections and natural frequencies of composite multilayer square isotropic plates with hinged support along the contour when the stiffness of shear links changes]. *Stroitel'stvo i rekonstruktsiya*. 2019. No. 4 (84). Pp. 64-69.
7. Rzhantsyn A.R. Sostavnyye stержni i plastinki [Composite rods and plates]. Moscow: Stroyizdat, 1986.316 p.
8. Filatov V.V. K raschetu sostavnykh plastin po teorii A.R. Rzhantsyna [To the calculation of composite plates according to the theory of A.R. Rzhantsyn]. Proceedings of the international scientific and technical conference. "Computational Mechanics of Deformable Solid". Moscow: MIIT, 2006.Vol. 2.P. 414-416.
9. Filatov V.V., Moussa Sali. Ob uchete podatlivosti poperechnykh svyazey v raschetakh sostavnykh plastin po teorii [On the account of the compliance of cross-links in the calculations of composite plates according to the theory]. *Promyshlennoe i grazhdanskoe stroitel'stvo*. 2010. No. 2. Pp. 28-29.
10. Fabien Marchetti, Kerem Ege, Quentin Leclère, N. B. Roozen On the structural dynamics of laminated composite plates and sandwich structures; a new perspective on damping identification. *Journal of Sound and Vibration*. Volume 474, 26 May 2020, 115256
11. Han-Gyu Kim, Richard Wiebe Numerical investigation of stress states in buckled laminated composite plates under dynamic loading. *Composite Structures*. Volume 235, 1 March 2020, 111743

Информация об авторах

Турков Андрей Викторович

ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева», Орёл, Россия,
доктор технических наук, профессор кафедры строительных конструкций и материалов.

E-mail: aturkov@bk.ru

Иванушкина Кристина Александровна

ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева», Орёл, Россия,
Студент магистратуры

E-mail: k.zhupikova@mail.ru

Information about authors

Turkov Andrey V.

Oryol state University named after I.S. Turgenev, Orel, Russia,
doctor of Technical Sciences, Department of "Construction structures and materials."

E-mail: aturkov@bk.ru

Ivanushkina Kristina A.

Oryol state University named after I.S. Turgenev, Orel, Russia,
master's degree student.

E-mail: k.zhupikova@mail.ru