

Е.В. ЛЕОНТЬЕВ¹¹ФАУ «Главгосэкспертиза России», г. Москва, Россия

ПОПЕРЕЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ БАЛКИ СО СВОБОДНЫМИ КРАЯМИ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ ПРИ ДЕЙСТВИИ ДИНАМИЧЕСКОЙ НАГРУЗКИ

Аннотация. Известно, что в случае динамических воздействий важными динамическими характеристиками конструкций сооружения являются частоты и формы собственных колебаний, с которыми связана его реакция на динамическое воздействие. К числу таких конструкций, относятся конструкции, лежащие на грунте, которые можно рассматривать при их расчете как балки на упругом основании. Используя метод начальных параметров для балки со свободными краями, расположенной на упругом основании, решена задача по определению влияния присоединенной массы m_1 на круговую частоту собственных поперечных колебаний (без учета сил сопротивления), определены три первые частоты и формы собственных поперечных колебаний балки. Решена задача по определению усилий в балке с учетом собственного веса и динамической нагрузки (возмущающей силы) $F(t)$, с частотой вынужденных колебаний, соответствующей резонансной и межрезонансной зонам, приложенной в произвольной точке d .

Сформулированы условия, которые необходимо учитывать при анализе динамического поведения конструкции под действием переменных нагрузок в различных расчетных ситуациях.

Ключевые слова: грунтовое основание, балка на упругом основании, метод начальных параметров, свободные колебания, вынужденные колебания, динамический анализ.

E.V. LEONTIEV¹¹Main State Expertise of Russia, Moscow, Russia

TRANSVERSE VIBRATIONS OF A BEAM WITH FREE EDGES ON AN ELASTIC BASE UNDER DYNAMIC LOAD

Abstracts. It is known that in the case of dynamic influences, the important dynamic characteristics of the structures of a structure are the frequencies and forms of natural vibrations, with which its response to dynamic effects is associated. These structures include structures lying on the ground, which can be considered when calculating them as beams on an elastic foundation. Using the method of initial parameters for a beam with free edges located on an elastic base, the problem of determining the influence of the attached mass m_1 on the circular frequency of natural transverse vibrations (without taking into account the resistance forces) is solved, the first three frequencies and forms of natural transverse vibrations of the beam are determined. The problem of determining the efforts in the beam, taking into account its own weight and dynamic load (perturbing force) $F(t)$, with the frequency of forced vibrations corresponding to the resonance and interresonance zones applied at an arbitrary point d , was solved.

The conditions are formulated that must be taken into account when analyzing the dynamic behavior of a structure under the action of variable loads in various design situations.

Keywords: soil foundation, beam on an elastic foundation, initial parameter method, free vibrations, forced vibrations, dynamic analysis.

Введение

В настоящее время разработаны различные методы расчетов конструктивных систем совместно с основанием при статических, динамических и др. воздействиях в целях обеспечения надёжности и долговечности сооружений. Основная часть таких расчетных методов

апробирована на практике, широко освещена в научной литературе и регламентирована в соответствующих нормативных документах [1-3].

Существует большое количество готовых программных продуктов для решения статических и динамических задач в области строительства, позволяющих описывать напряженно-деформированное состояние (НДС) более приближенно к реальному и учитывать особенности распределения напряжений и деформирования на различных этапах нагружения.

Известно, что в случае динамических воздействий важными динамическими характеристиками конструкций сооружения являются частоты и формы собственных колебаний, с которыми связана его реакция на динамическое воздействие. К числу таких конструкций, относятся конструкции, лежащие на грунте, которые можно рассматривать при их расчете как балки на упругом основании.

Представляет интерес задача расчета и анализа собственных частот и форм поперечных колебаний балки со свободными краями, расположенной на упругом основании, в случае действия присоединенной массы m_1 и динамической нагрузки (возмущающей силы) $F(t)$, приложенной в произвольной точке d .

Модели и методы

Дифференциальное уравнение вынужденных поперечных колебаний балки постоянного сечения с учетом сил сопротивления при любом законе изменения возмущающей силы $q(x, t)$ имеет вид [9-11]:

$$EI \frac{\partial^4 y(x, t)}{\partial x^4} + \mu \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} + 2\alpha \frac{\partial^5 y(x, t)}{\partial x^4 \partial t} = q(x, t), \quad (1)$$

где E – модуль упругости материала балки; I – момент инерции поперечного сечения балки, $y(x)$ – поперечное перемещение оси балки в сечении x ; $q(x, t)$ – возмущающая нагрузка, изменяющаяся во времени t ; $\mu = q/g$; q – равномерно распределенная нагрузка (собственный вес и т. п.) на единицу длины балки; g – ускорение силы тяжести; α – коэффициент, характеризующий внутреннее трение материала.

Отметим, что в областях, удаленных от резонансных отношений частот, влияние затухания на амплитуды вынужденных колебаний незначительно, и в этих областях расчет можно производить без учета затухания [10-12].

Решение задачи выполнено в три этапа. На первом этапе определены собственные поперечные колебания балки с учетом собственного веса. На втором этапе определены собственные поперечные колебания балки с учетом собственного веса и присоединенной массой m_1 . На третьем этапе выполнено решение задачи с учетом возмущающей силы – вертикальной динамической нагрузки, которая изменяется во времени t по гармоническому закону $F(t) = F \sin \gamma t$ и приложена в произвольной точке d по длине балки.

Здесь: F – амплитудное значение возмущающей силы; γ – угловая частота изменения возмущающей силы.

При решении задачи использован метод начальных параметров.

Первый этап. Определим круговую частоту и формы собственных поперечных колебаний с учетом собственного веса балки (рисунок 1) со свободными краями длиной L с изгибной жесткостью EI , расположенной на упругом основании Винклера с коэффициентом жесткости r_0 .

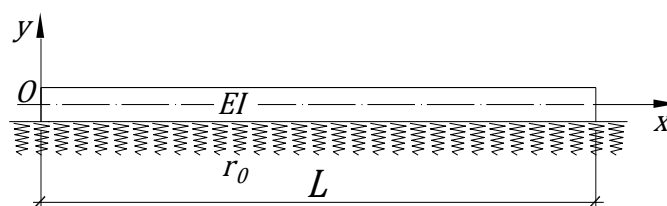


Рисунок 1 – Балка со свободными краями на упругом основании

Определение частоты и форм собственных поперечных колебаний балки выполним без учета сил сопротивления. При выполнении расчета балки будем учитывать в ней лишь деформацию изгиба.

Собственные поперечные колебания балки постоянного сечения с равномерно распределенной нагрузкой $q = \mu g$ при отсутствии сил сопротивления описываются дифференциальным уравнением:

$$EI \frac{\partial^4 y(x,t)}{\partial x^4} + \mu \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = 0, \quad (2)$$

Уравнение статического изгиба балки на упругом основании в соответствии с гипотезой Винклера (1867) имеет вид [4-6]:

$$EI y^{IV}(x) = -ry(x) + q(x). \quad (3)$$

где $r(x) = r_0 b y(x)$, а $r(x)$ - изменяющаяся по длине балки интенсивность реакции упругого основания; r_0 - коэффициент отпора основания или коэффициент «постели»; b - ширина балки; $y(x)$ - величина осадки (перемещения).

Простым периодическим решением уравнения собственных колебаний балки (2) является главное колебание, которое изменяется по гармоническому закону:

$$y(x, t) = \varphi(x) \sin(\omega t + \alpha) \quad (4)$$

где $\varphi(x)$ - функция, устанавливающая закон распределения максимальных отклонений точек оси балки от равновесного расположения; ω - круговая частота собственных поперечных колебаний балки (рад/сек); α - начальная фаза колебаний.

Для определения собственных частот и форм колебаний, подставляя уравнение (4) в уравнение (2), включив реакцию упругого основания (3), и сократив на $\sin(\omega t + \alpha)$, получим уравнение собственных форм однородной задачи:

$$EI \varphi^{IV}(x) - \omega^2 \mu \varphi(x) + r \varphi(x) = 0, \quad (5)$$

где обозначим:

$$\kappa^4 = \frac{\mu \omega^2 - r}{EI}. \quad (6)$$

Решение уравнения (5) удобно представить в виде системы частных решений функций Крылова S, T, U, V :

$$\left. \begin{aligned} S(x) &= \frac{1}{2}(ch \kappa x + cosh \kappa x), \\ T(x) &= \frac{1}{2}(sh \kappa x + sinh \kappa x), \\ U(x) &= \frac{1}{2}(ch \kappa x - cosh \kappa x), \\ V(x) &= \frac{1}{2}(sh \kappa x - sinh \kappa x). \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Используя метод начальных параметров, составим уравнение функции прогибов $\varphi(x)$, присоединив к нему первую, вторую и третью производные функции и получим четыре однородных уравнения, с помощью которых решим уравнение для определения собственных частот.

Обозначим прогиб балки $y(x)$, угол поворота $\theta = \frac{dy}{dx}$, изгибающий момент $M(x) = -EI \frac{d^2 y}{dx^2}$, поперечную силу $Q(x) = \frac{dM}{dx} = -EI \frac{d^3 y}{dx^3}$

Значения этих величин в начале координат - y_0, θ_0, M_0 и Q_0 .

Запишем значения начальных параметров и известных граничных условий:

$$\left. \begin{aligned} x = 0: M(0) = Q(0) = 0 \\ x = L: M(L) = Q(L) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Для произвольного сечения балки $0 \leq x \leq L$ составим систему уравнений, используя (7):

$$\left. \begin{aligned} y_i(x) &= y_0 S(\kappa_i x) + \frac{\theta_0}{\kappa_i} T(\kappa_i x) \\ \theta_i(x) &= y_0 \kappa_i V(\kappa_i x) + \theta_0 S(\kappa_i x) \\ M_i(x) &= -EJ y_0 \kappa_i^2 U(\kappa_i x) - EJ \theta_0 \kappa_i V(\kappa_i x) \\ Q_i(x) &= -EJ y_0 \kappa_i^3 T(\kappa_i x) - EJ \theta_0 \kappa_i^2 U(\kappa_i x) \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Здесь $i=1, 2, 3$, и т.д. – порядковый номер частоты.

Используя граничные условия на правом краю (8), получим из (9):

$$\begin{cases} M_i(L) = -EJ y_0 \kappa_i^2 U(\kappa_i L) - EJ \theta_0 \kappa_i V(\kappa_i L) = 0 \\ Q_i(L) = -EJ y_0 \kappa_i^3 T(\kappa_i L) - EJ \theta_0 \kappa_i^2 U(\kappa_i L) = 0 \end{cases} \quad (10)$$

Для нетривиального решения уравнений (10), т.е. решения, при котором все произвольные постоянные не были одновременно равны нулю, необходимо, чтобы определитель D был равен нулю:

$$D = U^2(\kappa_i L) - V(\kappa_i L) T(\kappa_i L) = -\frac{1}{2} \operatorname{ch} \kappa_i L \cos \kappa_i L = 0 \quad (11)$$

Корни уравнения (11) различны. Каждому значению корня будет соответствовать определенная круговая частота собственных поперечных колебаний. Из условий ортогональности нормальных функций [7-8] следует, что собственные колебания, вызванные любыми начальными условиями, можно легко разложить в ряд нормальных колебаний. Определим численно множество значений корней κ_i уравнения (11). Используя выражение (6) получим формулу для определения ω_i круговых частот собственных поперечных колебаний балки на упругом основании:

$$\omega_i = \sqrt{\frac{EI \lambda_i^4}{\mu L^4} + \frac{r}{\mu}}, \quad (12)$$

где $\lambda_i = \kappa_i L$, а $i=1, 2, 3$ и т.д. – порядковый номер частоты.

Определим собственные круговые частоты поперечных колебаний балки с учетом собственного веса, которые образуют спектр $\omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_n$. Каждой собственной частоте будет соответствовать определенная форма колебаний.

Для определения форм собственных колебаний значения корней κ_i подставим в решение первого уравнения (9), которое определит значения относительных ординат i -той формы собственных колебаний.

Второй этап. Определим собственные круговые частоты и формы поперечных колебаний с учетом собственного веса и присоединенной массы m_1 (рисунок 2) для балки со свободными краями длиной L с изгибной жесткостью EI , расположенной на упругом основании Винклера с коэффициентом жесткости r_0 .

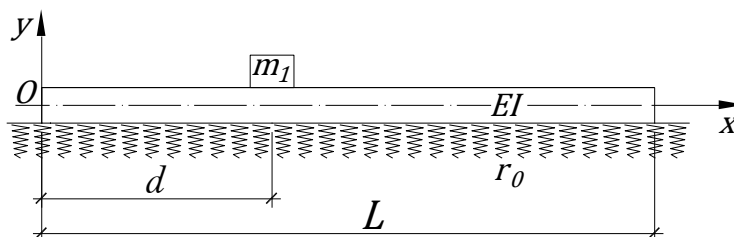


Рисунок 2 - Балка на упругом основании с присоединенной массой m_1

При статическом приложении массы, которая медленно возрастает от нуля до полной величины, колебания не возникают. Если же к системе, которая находится в покое, приложить массу сразу полной величиной и оставить её на системе, предоставленной самой себе, то она вызовет колебания системы. В этом случае уравнения колебания системы составляются на основе принципа Даламбера, согласно которому уравнения динамического равновесия можно получить из уравнений статического равновесия добавлением инерционных сил. Сила инерции I по величине равна произведению массы на ускорение:

$$I = -m\ddot{y} = -m \frac{d^2 y}{dt^2}$$

и направлена в противоположную ускорению сторону. Здесь m – масса; y – перемещение; $\ddot{y} = \frac{d^2 y}{dt^2}$ – ускорение. Дальнейшие вычисления позволяют получить уравнения скорости $\dot{y}$ и ускорения $\ddot{y}$ массы при свободных незатухающих колебаниях и далее определить силу инерции I :

$$\dot{y} = -\omega A \sin(\omega t - \alpha); \quad \ddot{y} = -\omega^2 A \cos(\omega t - \alpha);$$

$$I = m\omega^2 A \cos(\omega t - \alpha) \quad (13)$$

Используем значения начальных параметров и известных граничных условий на левом и правом краю балки (10).

Для первого участка балки $0 \leq x \leq d$ составим систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} y_{1i}(x) &= y_0 S(\kappa_i x) + \frac{\theta_0}{\kappa_i} T(\kappa_i x) \\ \theta_{1i}(x) &= y_0 \kappa_i V(\kappa_i x) + \theta_0 S(\kappa_i x) \\ M_{1i}(x) &= -EJ y_0 \kappa_i^2 U(\kappa_i x) - EJ \theta_0 \kappa_i V(\kappa_i x) \\ Q_{1i}(x) &= -EJ y_0 \kappa_i^3 T(\kappa_i x) - EJ \theta_0 \kappa_i^2 U(\kappa_i x) \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

В случае приложения массы m_1 в точке d значение прогиба балки имеет вид: $y_{1i}(d) = y_0 S(\kappa_i d) + \frac{\theta_0}{\kappa_i} T(\kappa_i d)$. Свободные колебания балки происходят с учетом инерционной силы, которая в точке d может быть определена по (13):

$$I = m_1 \omega_i^2 y_{1i}(d) = m_1 \omega_i^2 \left[y_0 S(\kappa_i d) + \frac{\theta_0}{\kappa_i} T(\kappa_i d) \right], \quad (15)$$

где ω_i – круговая собственная частота i -той формы колебаний балки; $y_{1i}(d)$ – значение ординаты i -той формы колебаний в точке d .

Для второго участка балки $d \leq x \leq L$ составим систему уравнений, учитывая силу инерции I (17):

$$\left. \begin{aligned} y_{2i}(x) &= y_0 S(\kappa_i x) + \frac{\theta_0}{\kappa_i} T(\kappa_i x) + \frac{I}{\kappa_i^3 EI} V(\kappa_i(x-d)) \\ \theta_{2i}(x) &= y_0 \kappa_i V(\kappa_i x) + \theta_0 S(\kappa_i x) + \frac{I}{\kappa_i^2 EI} U(\kappa_i(x-d)) \\ M_{2i}(x) &= -EJ y_0 \kappa_i^2 U(\kappa_i x) - EJ \theta_0 \kappa_i V(\kappa_i x) - \frac{I}{\kappa_i} T(\kappa_i(x-d)) \\ Q_{2i}(x) &= -EJ y_0 \kappa_i^3 T(\kappa_i x) - EJ \theta_0 \kappa_i^2 U(\kappa_i x) - IS(\kappa_i(x-d)) \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Далее, подставив (15) в уравнения (18) и упростив выражения, получим формулы для определения прогибов, углов поворота, моментов и поперечных сил для второго участка балки:

$$\left. \begin{aligned} y_{2i}(x) &= y_0 \left[S(\kappa_i x) + \frac{m_1 \omega_i^2 S(\kappa_i d)}{\kappa_i^3 EI} V(\kappa_i(x-d)) \right] + \\ &+ \theta_0 \left[\frac{1}{\kappa_i} T(\kappa_i x) + \frac{m_1 \omega_i^2 + \frac{\theta_0}{\kappa_i} T(\kappa_i d)}{\kappa_i^3 EI} V(\kappa_i(x-d)) \right], \\ \theta_{2i}(x) &= y_0 \left[\kappa_i V(\kappa_i x) + \frac{m_1 \omega_i^2 y_0 S(\kappa_i d)}{\kappa_i^2 EI} U(\kappa_i(x-d)) \right] + \\ &+ \theta_0 \left[S(\kappa_i x) + \frac{m_1 \omega_i^2 + \frac{1}{\kappa_i} T(\kappa_i d)}{\kappa_i^2 EI} U(\kappa_i(x-d)) \right], \\ M_{2i}(x) &= -y_0 \left[\kappa_i^2 U(\kappa_i x) + \frac{m_1 \omega_i^2 S(\kappa_i d)}{EJ\kappa_i} T(\kappa_i(x-d)) \right] - \\ &- \theta_0 \left[\kappa_i V(\kappa_i x) + \frac{m_1 \omega_i^2 \frac{1}{\kappa_i} T(\kappa_i d)}{EJ\kappa_i} T(\kappa_i(x-d)) \right] \\ Q_{2i}(x) &= -y_0 \left[\kappa_i^3 T(\kappa_i x) + \frac{m_1 \omega_i^2}{EJ} S(\kappa_i d) S(\kappa_i(x-d)) \right] - \\ &- \theta_0 \left[\kappa_i^2 U(\kappa_i x) + \frac{m_1 \omega_i^2}{EJ\kappa_i} T(\kappa_i d) S(\kappa_i(x-d)) \right] \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Используя граничные условия на правой опоре (10), получим:

$$\left\{ \begin{aligned} M_{2i}(L) &= -y_0 \left[\kappa_i^2 U(\kappa_i L) + \frac{m_1 \omega_i^2 S(\kappa_i d)}{EJ\kappa_i} T(\kappa_i(L-d)) \right] - \\ &- \theta_0 \left[\kappa_i V(\kappa_i L) + \frac{m_1 \omega_i^2}{EJ\kappa_i^2} T(\kappa_i d) T(\kappa_i(L-d)) \right] = 0 \\ Q_{2i}(L) &= -y_0 \left[\kappa_i^3 T(\kappa_i L) + \frac{m_1 \omega_i^2}{EJ} S(\kappa_i d) S(\kappa_i(L-d)) \right] - \\ &- \theta_0 \left[\kappa_i^2 U(\kappa_i L) + \frac{m_1 \omega_i^2}{EJ\kappa_i} T(\kappa_i d) S(\kappa_i(L-d)) \right] = 0 \end{aligned} \right. \quad (18)$$

Приравнявая определитель матрицы, составленный из коэффициентов системы уравнений (18), нулю, получим трансцендентное уравнение:

$$\begin{aligned} D &= U^2(\kappa_i L) - V(\kappa_i L) T(\kappa_i L) + \frac{m_1 \kappa_i}{\mu} \left(1 + \frac{r}{\kappa_i^4 EJ} \right) [S(\kappa_i d) T(\kappa_i(L-d)) U(\kappa_i L) + \\ &+ T(\kappa_i d) S(\kappa_i(L-d)) U(\kappa_i L) - T(\kappa_i d) T(\kappa_i(L-d)) T(\kappa_i L) - \\ &- S(\kappa_i d) S(\kappa_i(L-d)) V(\kappa_i L)] = 0 \end{aligned} \quad (19)$$

Каждому значению корня κ_i трансцендентного уравнения соответствует определенная круговая частота собственных колебаний. Определив численно множество значений корней κ_i уравнения (19), определим круговые частоты собственных колебаний балки на упругом основании по формуле (17). Минимальный положительный корень κ_i определит первую круговую частоту собственных поперечных колебаний балки.

Для определения форм собственных колебаний значения корней κ_i подставляем в решение первого уравнения (17), которое определит значения относительных ординат i -той формы собственных колебаний.

Третий этап. Для балки (рисунок 3) со свободными краями длиной L с изгибной жесткостью EI , расположенной на упругом основании Винклера с коэффициентом жесткости r_0 определим усилия при действии динамической нагрузки (возмущающей силы) $F(t) = F \sin \gamma t$, приложенной в произвольной точке d .

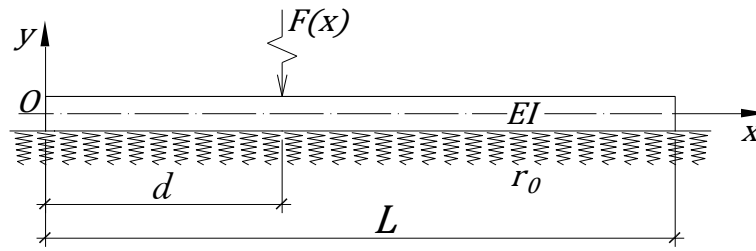


Рисунок 3 - Балка с динамической силой $F(t)$

Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний балки постоянного сечения с равномерно распределенной массой при отсутствии сил сопротивления имеет общий вид:

$$EI \frac{\partial^4 y(x,t)}{\partial x^4} + \mu \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = q(x,t), \quad (20)$$

где: $q(x,t)$ – возмущающая нагрузка, изменяющаяся во времени t . Если возмущающая нагрузка равномерно распределена по всей длине балки, то $q(x,t) = q(t)$ и не зависит от x .

В общем случае действия возмущающей нагрузки $q(x,t) = q(x) \sin \gamma t$ при установившихся вынужденных колебаниях балки и без учета неупругих сил сопротивления фазы колебаний и возмущающей нагрузки совпадают. Положив, что вынужденные колебания также изменяются по гармоническому закону:

$$y(x,t) = \varphi(x) \sin(\gamma t), \quad (21)$$

получим неоднородное дифференциальное уравнение вынужденных колебаний балки на упругом основании:

$$EI \varphi^{IV}(x) - \gamma^2 \mu \varphi(x) + r \varphi(x) = q(x), \quad (22)$$

где обозначим:
$$\kappa^4 = \frac{\mu \gamma^2 - r}{EI}. \quad (23)$$

Общее решение неоднородного уравнения (22) получим как сумму общего решения однородного уравнения и частного решения, которое зависит от вида нагрузки. Далее, используя метод начальных параметров, получим универсальные формулы для определения прогибов, углов поворота, моментов и поперечных сил для произвольного участка балки в общем случае действия возмущающей нагрузки $q(x,t)$.

Используем известные значения начальных параметров и известных граничных условий на левом и правом краю балки (8).

Для первого участка балки $0 \leq x \leq d$ составим систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} y_1(x) &= y_0 S(\kappa x) + \frac{\theta_0}{\kappa} T(\kappa x) \\ \theta_1(x) &= y_0 \kappa V(\kappa x) + \theta_0 S(\kappa x) \\ M_1(x) &= -EJ y_0 \kappa^2 U(\kappa x) - EJ \theta_0 \kappa V(\kappa x) \\ Q_1(x) &= -EJ y_0 \kappa^3 T(\kappa x) - EJ \theta_0 \kappa^2 U(\kappa x) \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Уравнение собственных колебаний балки с инерционными силами и уравнение вынужденных колебаний балки от возмущающей силы, несмотря на существенные различия между свободными колебаниями и вынужденными колебаниями, можно рассматривать совместно, относя инерционные действия масс на балку к возмущающим силам [11].

Составим систему уравнений для второго участка балки $d \leq x \leq L$, учитывая возмущающую силу F :

$$\left. \begin{aligned} y_2(x) &= y_0 S(\kappa x) + \frac{\theta_0}{\kappa} T(\kappa x) + \frac{F}{\kappa^3 EI} V(\kappa(x-d)) \\ \theta_2(x) &= y_0 \kappa V(\kappa x) + \theta_0 S(\kappa x) + \frac{F}{\kappa^2 EI} U(\kappa(x-d)) \\ M_2(x) &= -EJ y_0 \kappa^2 U(\kappa x) - EJ \theta_0 \kappa V(\kappa x) - \frac{F}{\kappa} T(\kappa(x-d)) \\ Q_2(x) &= -EJ y_0 \kappa^3 T(\kappa x) - EJ \theta_0 \kappa^2 U(\kappa x) - FS(\kappa(x-d)) \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Используя граничные условия для правого края балки (8), получим:

$$\begin{cases} M_2(L): -EJy_0 \kappa^2 U(\kappa x) - EJ \theta_0 \kappa V(\kappa x) = \frac{F}{\kappa} T(\kappa(x-d)) \\ Q_2(L): -EJy_0 \kappa^3 T(\kappa x) - EJ \theta_0 \kappa^2 U(\kappa x) = FS(\kappa(x-d)) \end{cases} \quad (26)$$

Используя (23), при заданной частоте вынужденных колебаний γ , определим κ :

$$\kappa = \sqrt[4]{\frac{\mu \gamma^2 - r}{EJ}}. \quad (27)$$

Применяя уравнения (25) с учетом определенного значения κ (26), соответствующего заданной частоте γ вынужденных колебаний и значения $F(t)$, определим усилия в балке при вынужденных колебаниях.

Результаты исследования и их анализ

Исходные данные принятые для расчетов: балки длиной: $L_1=12,0$ м и $L_2=20,0$ м, каждая из которых имеет модули упругости: $E_1=10^6$ т/м²; $E_2=2,1 \times 10^6$ т/м²; $E_3=3,6 \times 10^6$ т/м² и расположена на основании с коэффициентом постели: $r_0^1=3200$ т/м³, $r_0^2=5000$ т/м³, $r_0^3=10000$ т/м³. Ширина балки $b=1,25$ м, высота $h=1,5$ м. Сила $F=10,0$ т, масса $m_1=F/g=1,0194$ т.

На первом этапе по результатам расчетов для балок длиной 12 и 20 м без присоединенной массы m_1 численно получены первые три корня уравнения (11): $\kappa_1 L = 1,57$; $\kappa_2 L = 4,73$; $\kappa_3 L = 7,853$. На втором этапе для вышеуказанных балок с присоединенной массой m_1 получены первые три корня уравнения (18) при расположении m_1 в середине балки $d=L/2$: $\kappa_1 L = 4,44$; $\kappa_2 L = 7,854$; $\kappa_3 L = 10,610$ и при расположении m_1 в четверти балки $d=L/4$: $\kappa_1 L = 4,71$; $\kappa_2 L = 7,63$; $\kappa_3 L = 10,723$. Определены собственные круговые частоты и формы поперечных колебаний балки для первых трех форм.

Результаты расчетов представлены в таблицах 1 и 2. В таблицах в числителе указаны значения частот для материала плотностью 2,1 т/м³, в знаменателе - 2,5 т/м³.

Таблица 1 - Собственные круговые частоты поперечных колебаний балок длиной 12,0 м

	$L_1=12,0$ м								
	$E_1 = 10^6$ т/м ²			$E_2 = 2,1 \times 10^6$ т/м ²			$E_3 = 3,6 \times 10^6$ т/м ²		
	$r_0^1=3200$ т/м ³	$r_0^2=5000$ т/м ³	$r_0^3=10000$ т/м ³	$r_0^1=3200$ т/м ³	$r_0^2=5000$ т/м ³	$r_0^3=10000$ т/м ³	$r_0^1=3200$ т/м ³	$r_0^2=5000$ т/м ³	$r_0^3=10000$ т/м ³
Собственная круговая частота колебаний ω балки без массы m_1 , рад/сек									
1-ая форма	<u>101,1</u> 92,7	<u>125,8</u> 115,3	<u>177,2</u> 162,4	<u>102,5</u> 93,4	<u>126,9</u> 116,3	<u>178</u> 163,1	<u>104,4</u> 95,7	<u>128,5</u> 117,7	<u>179,1</u> 164,1
2-ая форма	<u>176,4</u> 161,7	<u>191,6</u> 175,6	<u>228,7</u> 209,6	<u>233,2</u> 213,7	<u>244,9</u> 224,5	<u>274,9</u> 251,9	<u>293,4</u> 268,9	<u>302,8</u> 277,6	<u>327,7</u> 300,2
3-ая форма	<u>413,0</u> 378,5	<u>419,7</u> 384,4	<u>437,9</u> 401,4	<u>589,9</u> 540,1	<u>594,0</u> 544,5	<u>607,0</u> 556,3	<u>766,9</u> 702,9	<u>770,6</u> 706,3	<u>780,6</u> 715,5
Собственная круговая частота колебаний ω балки с массой m_1 в точке $d=L/2$, рад/сек									
1-ая форма	<u>162,4</u> 148,9	<u>178,8</u> 163,9	<u>218,1</u> 199,9	<u>210,8</u> 193,2	<u>223,7</u> 205,0	<u>256,2</u> 234,8	<u>262,8</u> 240,9	<u>273,3</u> 250,4	<u>300,4</u> 275,3
2-ая форма	<u>413,2</u> 378,9	<u>419,9</u> 384,8	<u>438,0</u> 401,5	<u>589,5</u> 540,3	<u>594,2</u> 544,6	<u>607,2</u> 556,5	<u>767,2</u> 703,1	<u>770,8</u> 706,5	<u>780,9</u> 715,7
3-ая форма	<u>738,4</u> 676,8	<u>742,2</u> 680,2	<u>752,6</u> 689,8	<u>1064,9</u> 976,0	<u>1067,6</u> 978,4	<u>1074,8</u> 985,1	<u>1391,8</u> 1275,1	<u>1393,8</u> 1277,4	<u>1399,3</u> 1282,5
Собственная круговая частота колебаний балки ω с массой m_1 в точке $d=L/4$, рад/сек									
1-ая форма	<u>175,4</u> 160,7	<u>190,7</u> 174,8	<u>227,9</u> 208,9	<u>231,6</u> 212,2	<u>243,4</u> 223,0	<u>273,5</u> 250,7	<u>291,2</u> 266,9	<u>300,7</u> 275,6	<u>325,5</u> 298,4
2-ая форма	<u>391,3</u> 358,6	<u>398,4</u> 365,2	<u>417,5</u> 382,6	<u>557,3</u> 510,8	<u>562,3</u> 515,4	<u>576,0</u> 527,9	<u>724,8</u> 664,3	<u>728,7</u> 667,8	<u>739,3</u> 677,6
3-ая форма	<u>753,9</u> 691,0	<u>757,6</u> 694,4	<u>767,9</u> 703,8	<u>1087,5</u> 996,7	<u>1090,1</u> 999,1	<u>1097,2</u> 1005,6	<u>1421,4</u> 1302,7	<u>1423,4</u> 1304,6	<u>1428,8</u> 1309,6

Таблица 2 - Собственные круговые частоты поперечных колебаний балок длиной 20,0 м

	$L_2=20,0$ м								
	$E_1 = 10^6$ т/м ²			$E_2 = 2,1 \times 10^6$ т/м ²			$E_3 = 3,6 \times 10^6$ т/м ²		
	$r_0^1=3200$ т/м ³	$r_0^2=5000$ т/м ³	$r_0^3=10000$ т/м ³	$r_0^1=3200$ т/м ³	$r_0^2=5000$ т/м ³	$r_0^3=10000$ т/м ³	$r_0^1=3200$ т/м ³	$r_0^2=5000$ т/м ³	$r_0^3=10000$ т/м ³
Собственная круговая частота колебаний ω балки без массы m_1, рад/сек									
1-ая форма	99,9 91,6	124,9 114,5	176,6 161,8	100,2 91,8	125,1 114,6	176,7 161,9	100,4 92,0	125,3 114,8	176,8 162,1
2-ая форма	112,7 103,3	135,3 124,0	184,1 168,7	125,4 114,9	146,0 133,8	192,0 176,0	140,8 129,0	159,5 146,2	202,5 185,6
3-ая форма	175,5 160,8	190,7 174,8	227,9 208,9	231,7 212,3	243,5 223,2	273,6 250,8	291,4 267,1	300,9 275,7	325,7 298,5
Собственная круговая частота колебаний балки ω с массой m_1 в точке $d=L/2$, рад/сек									
1-ая форма	110,0 100,8	133,0 121,9	182,4 167,2	120,1 110,1	141,6 129,7	188,7 173,0	132,8 121,7	152,4 139,7	197,0 180,5
2-ая форма	175,5 160,8	190,8 174,9	228,0 208,9	231,8 212,4	243,5 223,2	273,7 250,8	291,5 267,1	300,9 275,8	325,8 298,6
3-ая форма	281,7 258,2	291,5 267,1	317,0 290,6	394,5 361,6	401,6 368,0	420,5 385,4	509,6 467,1	515,1 472,1	530,0 485,7
Собственная круговая частота колебаний балки ω с массой m_1 в точке $d=L/4$, рад/сек									
1-ая форма	112,5 103,1	135,2 123,9	183,9 168,6	125,0 114,6	145,7 133,5	191,8 175,8	140,2 128,5	159,0 145,7	202,1 185,2
2-ая форма	168,9 154,8	184,7 169,3	222,9 204,3	221,2 202,7	233,5 214,0	264,8 242,7	277,1 253,9	287,0 263,0	312,9 286,8
3-ая форма	287,0 263,0	296,6 271,8	321,7 294,9	402,4 368,8	409,3 375,2	427,9 392,2	520,1 476,7	525,5 481,6	540,1 495,0

На первом этапе построены очертания первых трех форм колебаний балок без присоединенной массы (рисунки 4 и 5), соответствующие собственным частотам.

Собственные формы колебаний балки $L=12$ м

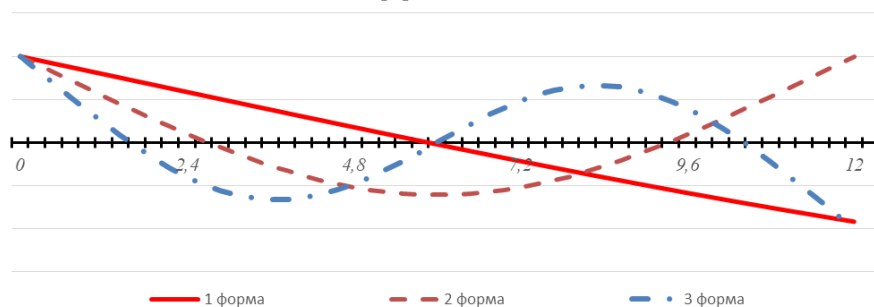


Рисунок 4 - Собственные формы колебаний балки $L=12$ м без присоединенной массы m_1

Собственные формы колебаний балки $L=20$ м

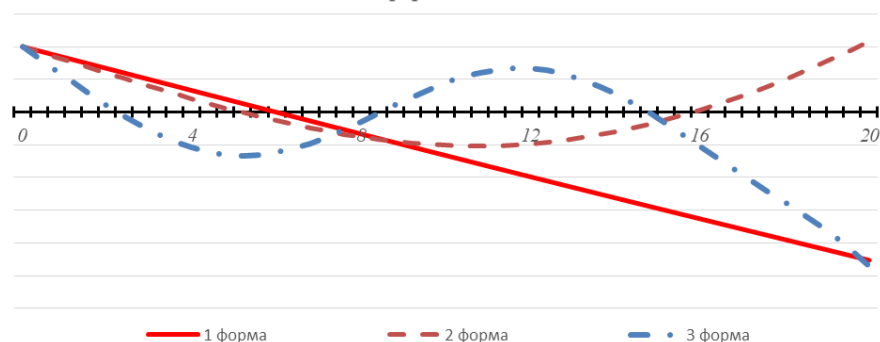


Рисунок 5 - Собственные формы колебаний балки $L=20$ м без присоединенной массы m_1

Далее, на втором этапе построены очертания первых трех форм колебаний балок с присоединенной массой, расположенной в точке $d=L/2$ (рисунки 6 и 7).

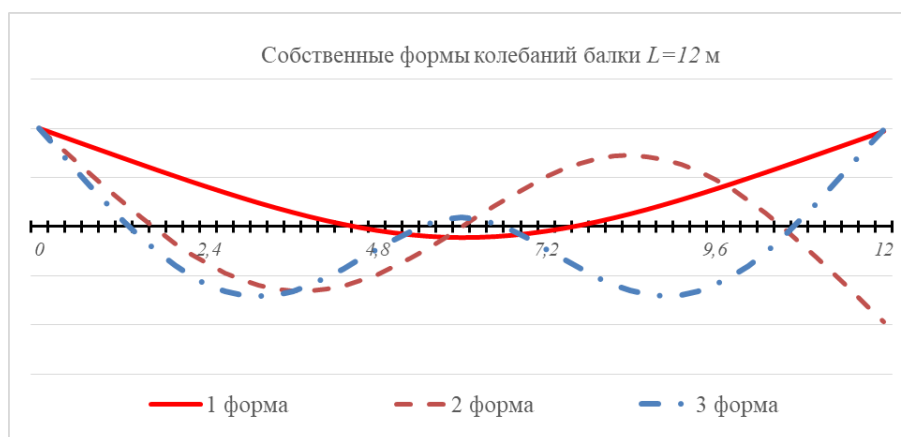


Рисунок 6 - Собственные формы колебаний балки $L=12$ м с присоединенной массой m_1

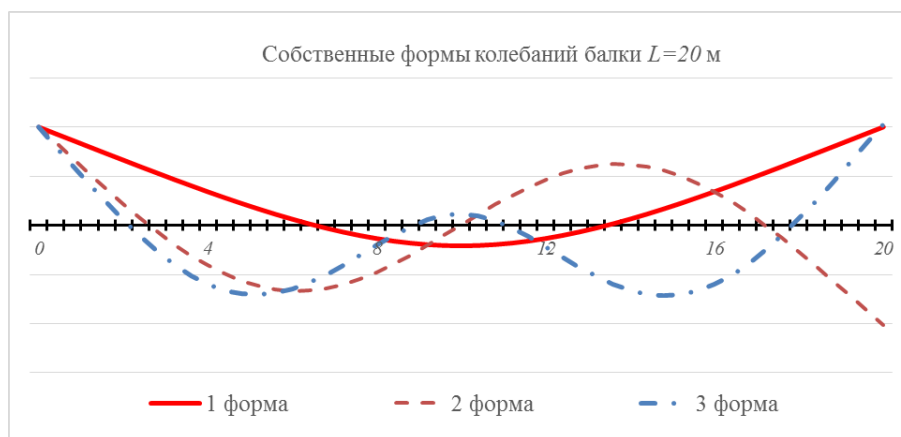


Рисунок 7 - Собственные формы колебаний балки $L=20$ м с присоединенной массой m_1

Полученные результаты расчетов позволяют сделать следующие выводы:

- 1) с приложением в точке балки дополнительной массы m_1 изменяются частоты колебаний. Если увеличивается масса системы, то уменьшаются частоты колебаний системы и наоборот (без учета первой (крутильной) формы собственных колебаний балки);
- 2) с изменением точки приложения дополнительной массы m_1 изменяются частоты колебаний. Масса, приложенная в середине балки, увеличивает частоту колебаний для второй формы больше, чем для первой или третьей формы. Масса, приложенная в четверти длины балки, увеличивает частоту колебаний для первой или третьей форм больше, чем для второй формы;
- 3) для балок на упругом основании без присоединенной массы m_1 первая форма колебаний соответствует вращательному движению балки как твердого тела. Так как первой формой изгибных колебаний является вторая форма, это следует учитывать при динамическом анализе. Для балки на упругом основании с присоединенной массой m_1 расположенной в точке $d=L/2$ первая, вторая, третья формы колебаний являются изгибными.

По результатам расчета третьего этапа определены значения ω от вынужденных частот колебаний $\gamma_1=220$ рад/сек и $\gamma_2=400$ рад/сек для балки длиной 12,0 м с возмущающей силой $F=10,0$ т, приложенной в точках $d=L/2$ и $d=L/4$ и значения ω от вынужденных частот колебаний $\gamma_1=140$ рад/сек и $\gamma_2=400$ рад/сек для балки длиной 20,0 м соответственно. Балки с модулем упругости $E=2,1 \times 10^6$ т/м² расположены на основании с коэффициентом постели

$r_0=5000 \text{ т/м}^3$. С учетом указанных исходных данных определены перемещения и усилия в балках. Эпюры изгибающих моментов приведены на рисунках 8-11.

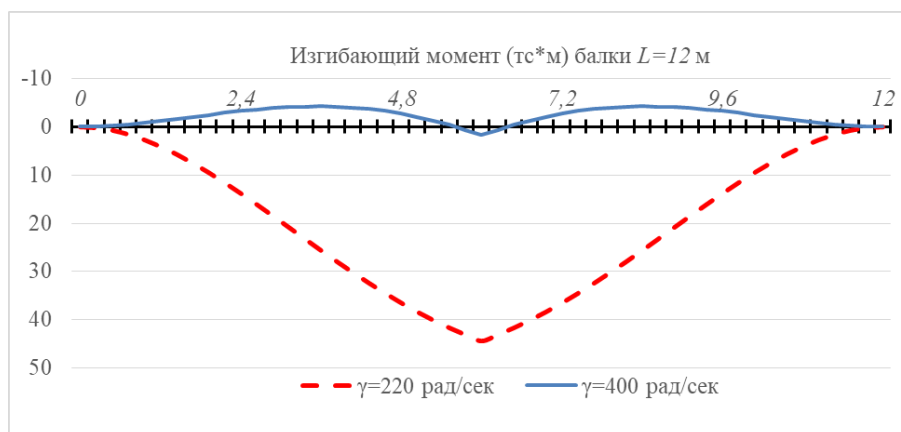


Рисунок 8 - Эпюры изгибающих моментов балки $L=12 \text{ м}$ при действии силы $F(t)$ в точке $d=L/2$

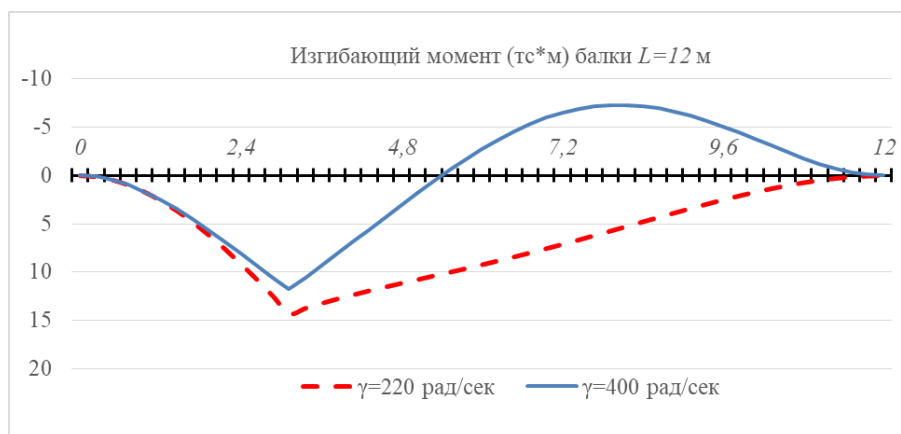


Рисунок 9 - Эпюры изгибающих моментов балки $L=12 \text{ м}$ при действии силы $F(t)$ в точке $d=L/4$

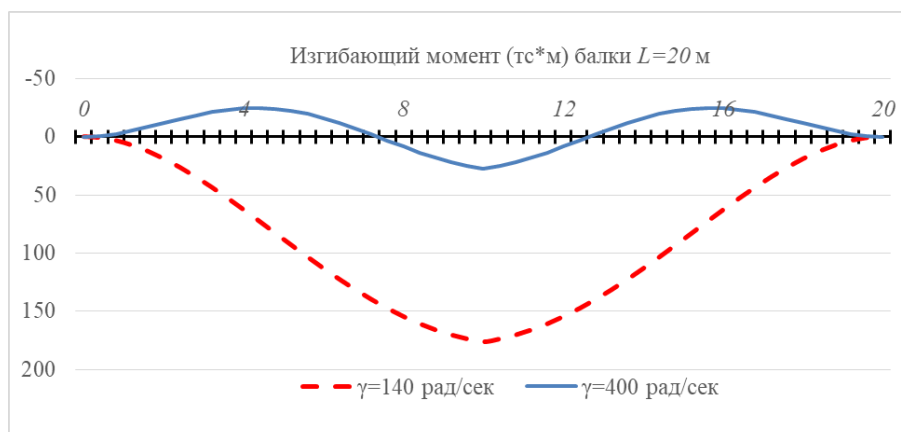


Рисунок 10 - Эпюры изгибающих моментов балки $L=20 \text{ м}$ при действии силы $F(t)$ в точке $d=L/2$

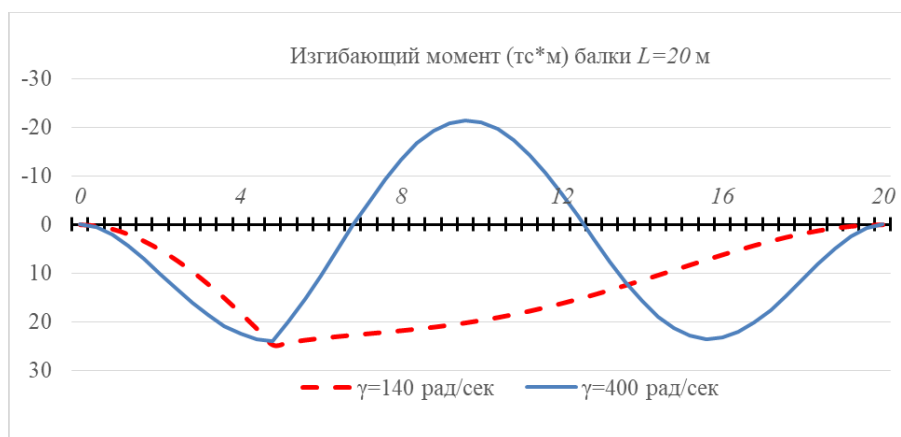


Рисунок 11 - Эпюры изгибающих моментов балки $L=20$ м при действии силы $F(t)$ в точке $d=L/4$

Анализ результатов расчетов третьего этапа позволяет сделать следующие выводы. В случае приложения в середине балки ($d=L/2$) возмущающей силы с частотой вынужденных колебаний, близкой к частоте собственных колебаний для первой изгибной формы ($\gamma_1/\omega_1=220/244,9$ рад/сек и $\gamma_1/\omega_1=140/146,0$ рад/сек для балок длиной 12 и 20 м соответственно), перемещения и усилия в сечениях балки увеличиваются многократно, что соответствует резонансным колебаниям при действии периодической нагрузки. Действие возмущающей силы с частотой вынужденных колебаний $\gamma_2=400$ рад/сек находится в межрезонансной зоне отношения частот, с соответствующими амплитудами и усилиями.

Случай приложения в четверти балки ($d=L/4$) возмущающей силы с частотой вынужденных колебаний, близкой к частоте собственных колебаний, не приводит к резонансным колебаниям по сравнению со случаем приложения нагрузки в середине балки ($d=L/2$). Усилия в балках при действии возмущающей силы с вынужденными частотами колебаний $\gamma_1=220$ (140) рад/сек и $\gamma_2=400$ рад/сек для балок длиной 12 и 20 м соответственно, близки по значениям.

Выводы

Результаты расчетов собственных поперечных колебаний системы (балка-основание) позволяют сделать следующие выводы:

1) изменение жесткости системы связано с изменением потенциальной энергии. Если жесткость системы увеличивается без изменения кинетической энергии, то частоты системы увеличиваются или по крайней мере не уменьшаются. Изменение массы системы связано с изменением её кинетической энергии. Если масса системы увеличивается без изменения потенциальной энергии, то частоты системы убывают или по крайней мере не возрастают;

2) при выполнении динамического расчета необходимо рассматривать все возможные варианты приложения масс с учетом точек их расположения. Число определяемых частот и форм собственных колебаний для балок на упругом основании не должно составлять менее двух;

3) число учитываемых форм колебаний следует определять с учетом частоты возмущающей силы. В случае, если $\gamma = \omega$, т.е. частота вынужденных колебаний совпадает с частотой собственных колебаний, конструкция попадает в резонанс, что приводит к многократному увеличению амплитуды вынужденных колебаний на определенных частотах внешних воздействий. Частота собственных колебаний для принятой в расчет наименьшей формы колебаний должна превышать частоту вынужденных колебаний. При этом главный вклад вносит резонирующая форма колебаний. Увеличение амплитуды и усилий зависит от точки приложения возмущающей силы.

Данные условия необходимо учитывать при анализе динамического поведения конструкции под действием переменных нагрузок в различных расчетных ситуациях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Федеральный закон от 30.12.2010 № 384-ФЗ «Технический регламент о безопасности зданий и сооружений» (вступил в силу с 1 июля 2010 года). Новосибирск: Сиб. Унив. Изд-во, 2010. 31 с.
2. ГОСТ 27751-2014 «Надежность строительных конструкций и оснований. Основные положения». Москва, Стандартинформ, 2015.
3. СП 385.1325800.2018 «Защита зданий и сооружений от прогрессирующего обрушения. Правила проектирования. Основные положения» / Минстрой России, 2018.
4. Александров А.В., Потапов В.Д., Державин Б.П. Сопротивление материалов. 8-е изд., испр. М.: Студент, 2012. 560 с: ил.
5. Крылов А.Н. О расчете балок, лежащих на упругом основании. Изд. 3-е. Ленинград: Изд-во АН СССР, 1930. 154 с. (Справочно-техническая литература). [На обл.: 1931 г.]
6. Горбунов-Посадов М.И., Маликова Т.А. Расчет конструкций на упругом основании. М.:Стройиздат, 1973. 627 с.
7. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле. М.: Наука, 1967.
8. Строительная механика. Динамика и устойчивость сооружений // А.Ф. Смирнов, А.В. Александров, Б.Я. Лященко, Н.Н. Шапошников М.: Стройиздат, 1984. 416 с.
9. Киселев В.А. Строительная механика: специальный курс (динамика и устойчивость сооружений). М. Стройиздат, 1980.
10. Динамический расчет зданий и сооружений / М.Ф. Барштейн, В.А. Ильичев, Б.Г. Коренев и др. – 2-е изд., перераб. и доп. М.:Стройиздат, 1984. 303 с., ил. – (Справочник проектировщика).
11. Бабаков И.М. Теория колебаний. М.: Наука, 1965. 560 с.
12. Клепиков С.Н. Расчет конструкций на упругом основании. Киев: Будівельник, 1967. 184 с.

REFERENCES

1. Federal Law of 30.12.2010 No. 384-FZ "Tekhnicheskiy reglament o bezopasnosti zdaniy i so-oruzheniy" ["Technical Regulations on the Safety of Buildings and Structures"] (entered into force on July 1, 2010). Novosibirsk: Sib. Univ. Publishing house, 2010.31 p.
2. GOST 27751-2014 "Nadezhnost' stroitel'nykh konstruktсий i osnovaniy. Osnovnyye polozheniya" ["Reliability of building structures and foundations. Basic provisions"]. Moscow, Standartinform, 2015.
3. SP 385.1325800.2018 "Zashchita zdaniy i sooruzheniy ot progressiruyushchego obrusheniya. Pravila proyektirovaniya. Osnovnyye polozheniya" ["Protection of buildings and structures against progressive collapse. Design rules. Basic provisions"] / Ministry of Construction of Russia, 2018.
4. Alexandrov A.V., Potapov V.D., Derzhavin B.P. Soprotivleniye materialov [Strength of materials]. 8th ed., Rev. Moscow: Student, 2012. 560 p.
5. Krylov A.N. O raschete balok, lezhashchikh na uprugom osnovanii [About the calculation of beams on an elastic foundation]. Ed. 3rd. Leningrad: Publishing house of the Academy of Sciences of the USSR, 1930.154 p. (Reference and technical literature). [On the region: 1931]
6. Gorbunov-Posadov M.I., Malikova T.A. Raschet konstruktсий na uprugom osnovanii [Calculation of structures on an elastic foundation]. Moscow: Stroyizdat, 1973. 627 p.
7. Timoshenko S.P. Kolebaniya v inzhenernom dele [Oscillations in engineering]. Moscow: Nauka, 1967.
8. Stroitel'naya mekhanika. Dinamika i ustoychivost' sooruzheniy [Construction mechanics. Dynamics and stability of structures] / A.F. Smirnov, A.V. Alexandrov, B. Ya. Lyaschennikov, N.N. Shaposhnikov. Moscow : Stroyizdat, 1984. 416 p.
9. Kiselev V.A. Stroitel'naya mekhanika: spetsial'nyy kurs (dinamika i ustoychivost' sooruzheniy) [Structural Mechanics: Special Course (Dynamics and Stability of Structures)]. Moscow: Stroyizdat, 1980.
10. Dinamicheskiy raschet zdaniy i sooruzheniy [Dynamic calculation of buildings and structures] / M.F. Barshtein, V.A. Ilyichev, B.G. Korenev et al. - 2nd ed., Revised. and add. M.: Stroyizdat, 1984.303 p., Ill. - (Designer handbook).
11. Babakov I.M. Teoriya kolebaniy [Oscillation theory]. Moscow : Nauka, 1965.560 p.
12. Klepikov S.N. Raschet konstruktсий na uprugom osnovanii [Calculation of structures on an elastic foundation]. Kiev: Budivelnik, 1967.184 p.

Информация об авторах

Леонтьев Евгений Владимирович

ФАУ «Главгосэкспертиза России», Москва, Россия,

заместитель начальника Управления – начальник отдела конструктивной надежности и безопасности объектов Управления строительных решений.

E-mail: e.leontyev@gge.ru

Information about authors

Leontiev Evgeny V.

FAU "Main State Expertise of Russia", Moscow, Russia,

Deputy Head of the Department - Head of the Department of Structural Reliability and Safety of Facilities of the Building Solutions Department.

E-mail: e.leontyev@gge.ru