УДК 539.374 DOI: 10.33979/2073-7416-2020-89-3-14-19

А.В. КОРОБКО[1], Н.Г. КАЛАШНИКОВА[1]
[1]ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева», г. Орёл, Россия

ЗАВИСИМОСТЬ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ЖЕСТКОСТИ КРУЧЕНИЯ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ СЕЧЕНИЙ ОТ ИХ КОЭФФИЦИЕНТА ФОРМЫ И ОТНОШЕНИЯ КОНФОРМНЫХ РАДИУСОВ

Аннотация. *Конструкции, испытывающие деформации кручения, широко распространены в строительстве, поэтому разработка и совершенствование методов расчета таких конструкций является одной из актуальных задач строительной механики и теории упругости. Точные решения могут быть получены лишь для стержней с эллиптическим и прямоугольным поперечным сечением, в остальных случаях приходится прибегать к использованию приближенных аналитических или численных методов, многие из которых являются достаточно трудоемкими. В связи с этим целью настоящей статьи является демонтрация новых возможностей применения методов интерполяции к решению задач свободного кручения призматических стержней. В статье приводится сопоставление значений приведенной геометрической жесткости прямоугольных сечений при свободном кручении стержня, полученных с использованием точного и приближенных решений. Точное решение представлено в зависимости от отношения сторон прямоугольника, а приближенные решения – в зависимости от геометрических аргументов – коэффициента формы и отношения конформных радиусов (внутреннего к внешнему). В первом случае для прямоугольных сечений в диапазоне* $1 \le a/b \le 8$ *погрешность получаемых решений составляет 2%, а во втором – 3,2%.*

Ключевые слова: *кручение упругих стержней, прямоугольное сечение, геометрическая жесткость кручения, коэффициент формы, отношение конформных радиусов.*

A.V. KOROBKO[1], N.G. KALASHNIKOVA[1]
[1]Orel state University named after I.S. Turgenev, Orel, Russia

DEPENDENCE OF GEOMETRICAL RIGIDITY OF TORSION RECTANGULAR SECTIONS FROM THEIR COEFFICIENT OF THE FORM AND RELATIONS OF CONFORMAL RADIUSES

Abstracts. *Structures experiencing torsion strains are widespread in construction, therefore, the development and improvement of methods for calculating such structures is one of the urgent problems of building mechanics and elasticity theory. Exact solutions can be obtained only for rods with an elliptical and rectangular cross-section; in other cases, it is necessary to resort to the use of approximate analytical or numerical methods, many of which are quite laborious. In this regard, the purpose of this article is the demontration of new possibilities of applying the interpolation methods to solving problems of free torsion of prismatic rods. The article compares the values of reduced geometric stiffness of straight-angle cross sections for free torsion of a rod, obtained using exact and approximate solutions. The exact solution is presented depending on the ratio of the sides of the rectangle, and the approximate solutions - depending on the geometric arguments - the shape factor and the ratio of the conformal radii (inner to outer). In the first case, for rectangular sections in the range* $1 < a/b < 8$*, the error of the solutions obtained is 2%, and in the second case, 3.2%.*

Keywords: *torsion of elastic rods, rectangular cross-section, geometric torsion stiffness, shape coefficient, the ratio of conformal radii.*

Введение

Конструкции, испытывающие деформации кручения, широко распространены в строительстве и машиностроении, поэтому разработка и совершенствование методов расчета таких конструкций является одной из актуальных задач строительной механики и теории упругости [1]. При расчете стержней на кручение в первую очередь определяется геометрическая жесткость кручения I_k стержня, а затем с её помощью исследуется его напряженно-деформированное состояние (НДС). В строительной механике известно лишь два точных решения рассматриваемой задачи – это стержни с эллиптическим и прямоугольным сечением. В остальных случаях используются различные приближенные аналитические и численные методы [1], которые являются достаточно трудоемкими.

В последние десятилетия к решению задач на кручение привлекаются геометрические методы – изопериметрический метод (ИЗПМ) [2] и метод интерполяции по коэффициенту формы (МИКФ) [3]. В основу этих методов положены изопериметрические свойства геометрической жесткости кручения сечений и интегральных геометрических характеристик – коэффициента формы K_f и отношения конформных радиусов (внутреннего к внешнему $\dot{r}/\bar{r}$) [3, …, 8]. Как показали проведенные исследования, указанные геометрические характеристики K_f и $\dot{r}/\bar{r}$ являются аналогами геометрической жесткости сечений I_k. Оказалось, что геометрическая жесткость прямоугольных сечений образует нижнюю границу для всего множества значений I_k для стержней в виде произвольных треугольников и четырехугольников с выпуклым внешним контуром.

Некоторые задачи о взаимосвязи I_k – K_f уже рассмотрены в научной литературе [3, 6, 7, 8], а к исследованию взаимосвязи I_k – $\dot{r}/\bar{r}$ еще практически не приступали. Известны лишь публикации [6…8], в которых использован аргумент $\dot{r}/\bar{r}$ при исследовании задач поперечного изгиба, свободных колебаний и устойчивости упругих пластинок с выпуклым контуром и комбинированными граничными условиями (комбинация условий жесткого защемления и шарнирного опирания). В связи с этим целью опубликования настоящей статьи является показать специалистам в области строительной механики новые открывающиеся возможности применения методов интерполяции к решению задач свободного кручения призматических стержней.

Представление геометрической жесткости прямоугольных сечений в зависимости от коэффициента формы и отношения конформных радиусов

В математической физике [9] известно решение для определения геометрической жесткости прямоугольных сечений I_k, представленное двойным тригонометрическим рядом:

$$I_к = \frac{256}{\pi^6} ab \sum_{k=1,3,5,...}^{\infty} \sum_{\ell=1,3,5,...}^{\infty} \frac{1}{k^2 \ell^2 \left(\dfrac{k^2}{a^2} + \dfrac{\ell^2}{b^2} \right)}, \tag{1}$$

где a и b – стороны прямоугольного сечения.

При $k = \ell = 1$ получаем лучшую нижнюю оценку I_k:

$$I_к > \frac{256}{\pi^6} ab \frac{1}{\left(\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} \right)} = \frac{256}{\pi^6} \frac{a^3 b^3}{a^2 + b^2} =$$

$$= \frac{1024}{\pi^6} \frac{A^2}{4(a/b + b/a)} = 1{,}065 \frac{A^2}{K_f}, \tag{2}$$

где $K_f = 4(a/b + b/a)$ – коэффициент формы прямоугольника.

Коэффициент формы для произвольной односвязной плоской области с выпуклым контуром представляется контурным интегралом

$$K_f = min\oint_L ds/h, \tag{3}$$

где L – контур области;

ds – элемент дуги контура;

h – перпендикуляр, опущенный из точки, взятой внутри области на касательную к переменной точке контура (рисунок 1).

Коэффициент формы является количественной характеристикой формы области: чем меньше K_f, тем более «правильнее» фигура, например, из всех прямоугольников наименьшее значение K_f имеет квадрат. Подробные сведения об этой интегральной геометрической характеристике, её изопериметрических свойствах и возможностях использования при решении задач теории упругости приведены в монографии [3].

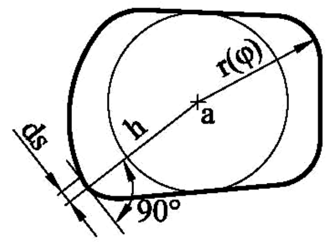

Рисунок 1 - Произвольная односвязная плоская область

Далее будем использовать приведенную геометрическую жесткость сечений $i_k = I_k/A^2$. В этом случае выражение (2) преобразуется к виду:

$$i_к > 1{,}065/K_f\,. \tag{4}$$

Это неравенство для квадратного сечения дает погрешность 5,33%, а для вытянутых прямоугольников – намного больше. Поэтому можно внести поправку в представленное решение, обратив неравенства (2) и (4) в равенства для квадратного сечения:

$$I_к \geq 1{,}1248\frac{A^2}{K_f} \text{ и } i_к \geq \frac{1{,}1248}{K_f}. \tag{5}$$

Решения, полученные по формуле (1) для различных прямоугольных сечений, приведены в таблице 1 (колонка 2, табл. 1). По этим данным построена аппроксимирующая функция с аргументом $1/K_f$ –

$$i_к = 0{,}006027 + 1{,}07659/K_f\,, \tag{6}$$

с помощью которой получены результаты, приведенные в колонке 5. Эти результаты отличаются от точного решения в пределах двух процентов для прямоугольных сечений, удовлетворяющих условию $1 \leq a/b \leq 8$ (см. колонка 6, табл. 1).

Таблица 1 - Анализ геометрической жесткости кручения прямоугольных сечений

a/b	i_k по (1)	K_f	$1/K_f$	i_k по (5)	Δ, %	$\dot{r}/\bar{r}$	i_k по (4)	Δ, %
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,0	0,1406	8,000	0,1250	0,1406	0	0,9139	0,1406	0
1,2	0,1384	8,133	0,1230	0,1384	0	0,8968	0,1379	0,36
1,5	0,1307	8,667	0,1154	0,1303	0,31	0,8363	0,1286	0,84
2,0	0,1144	10,000	0,1000	0,1137	0,61	0,7222	0,1111	2,88
2,5	0,0998	11,600	0,0862	0,0988	1,00	0,6281	0,0966	3,21
3,0	0,0878	13,333	0,0750	0,0868	1,14	0,5544	0,0853	2,85
3,5	0,0781	15,143	0,0660	0,0771	1,28	0,4965	0,0764	2,18
4,0	0,0703	17,000	0,0588	0,0684	1,14	0,4498	0,0692	1,56
4,5	0,0637	18,889	0,0529	0,0630	1,10	0,4112	0,0632	0,78
5,0	0,0583	20,800	0,0481	0,0578	0,86	0,3788	0,0583	0
6,0	0,0497	24,667	0,0405	0,0497	0	0,3277	0,0504	1,41
8,0	0,0384	32,500	0,0308	0,0393	2,08	0,2585	0,0398	3,65
10,0	0,0312	40,400	0,0248	0,0327	4,81	0,2137	0,0329	5,45
∞	0	∞	∞		–	0	0	–

В математической физике [9] приводятся исследования геометрической жесткости кручения сечений с применением конформного отображения. При этом использовались внутренний и внешний конформные радиусы. Однако функциональная зависимость геометрической жесткости сечений от отношения конформных радиусов (внутреннего $\dot{r}$ к внешнему $\bar{r}$) осталось авторами незамеченной. Нами установлена эта зависимость с помощью численного эксперимента.

В статье [10] авторами предложены формулы для определения внутреннего и внешнего конформных радиусов для прямоугольников. Внутренний конформный радиус определяется по формуле:

$$\dot{r} = \frac{2}{\pi} b \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} \right)^{-2}, \tag{7}$$

где a и b – стороны прямоугольника ($a \geq b$); $q = e^{-\pi a/b}$.

Для подсчета значений внешнего конформного радиуса, необходимо решить систему разрешающих уравнений Э.Б. Кристоффеля – Г.А. Шварца:

$$\begin{cases} \dfrac{a}{\bar{r}} = \pi cos^2 \alpha \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{((2k-1)!!)^2}{2^{2k}(k+1)!k!} cos^{2k} \alpha \\ \dfrac{b}{\bar{r}} = \pi sin^2 \alpha \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{((2k-1)!!)^2}{2^{2k}(k+1)!k!} sin^{2k} \alpha \end{cases} \tag{8}$$

относительно $\bar{r}$ и α, где α – аргумент комплексных чисел (точек окружности, образами которых при конформном отображении служат вершины прямоугольника, при этом, центр прямоугольника совпадает с началом координат, а стороны параллельны координатным осям; принято также (-1)!! = 1). После проведения вычислений по формулам (7) и (8) получены отношения $\dot{r}/\bar{r}$, которые представлены в таблице 1 (колонка 7). С учетом этих результатов в работе [11] построена аппроксимирующая функция для определения этого отношения для любых прямоугольников:

$$\dot{r}/\bar{r} = \frac{g + c\lambda + e\lambda^2}{1 + b\lambda + d\lambda^2 + f\lambda^3}, \tag{9}$$

где λ = a/b; g = 0,80307; b = –0,76171; c = –0,92186; d = 0,49197; e = 1,243; f = 0,49981. Погрешность этой функции не превышает 0,04%.

При использовании в качестве аргумента отношения конформных радиусов построена аппроксимирующая функция

$$i_к = 0{,}1538 \cdot \dot{r}/\bar{r}, \tag{10}$$

с помощью которой получены результаты, приведенные в колонке 8 таблицы 1. Эти результаты отличаются от точного решения в пределах (3, …, 3,5)% для прямоугольных сечений, удовлетворяющих условию $1 \leq a/b \leq 8$ (см. колонка 9, табл. 1).

Выражение (6) является линейной зависимостью i_k от аргумента $1/K_f$, а выражение (10) представляет собой прямую пропорциональность i_k от аргумента $\dot{r}/\bar{r}$. Ввиду очевидной простоты последнее выражение предпочтительнее, несмотря на то, что с его помощью получаемые решения имеют несколько большую погрешность.

Выводы

1. Точное решение задачи об определении приведенной геометрической жесткости кручения стержней с прямоугольным сечением представлено в зависимости от интегральной геометрической характеристики сечения – коэффициента формы. Получены численные значения приведенной геометрической жесткости сечений в виде прямоугольников с различны-

ми отношениями сторон. Аппроксимирующая функция $i_k - 1/K_f$ представлена линейной зависимостью (6) от аргумента $1/K_f$. Результаты, получаемые с использованием этой зависимости отличаются от точных решений в пределах двух процентов для прямоугольных сечений, удовлетворяющих условию $1 \leq a/b \leq 8$.

2. По этим же значениям приведенной геометрической жесткости прямоугольных сечений построена аппроксимирующая функция (10) с использованием геометрического аргумента – отношения конформных радиусов (внутреннего к внешнему). Эта аппроксимирующая функция представлена также линейной зависимостью, проходящей чрез начало координат (прямая пропорциональность). Расчеты, проведенные с её использованием, показали, что погрешность получаемых результатов в диапазоне $a/b < 6$ не превышает 3,2%. Несмотря на довольно высокую погрешность, зависимость (10) предпочтительнее, поскольку представляет решение сложной физической задачи элементарной формулой.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Арутюнян Н.Х., Абрамян В.Л. Кручение упругих тел. М.: Физматгиз, 1963. 686 с.
2. Коробко В.И. Изопериметрический метод в строительной механике: Теоретические основы изопериметрического метода. М.: Издательство АСВ, 1997. 390 с.
3. Коробко А.В. Геометрическое моделирование формой области в двумерных задачах теории упругости. М.: Издательство АСВ, 1999. 302 с.
4. Коробко В.И., Малых С.Г. Графическое представление границ изменения геометрической жесткости сечений в виде выпуклых фигур // Известия вузов. Машиностроение. 1986. №3. С. 2-7.
5. Korobko V.I., Korobko A.V., Savin S.Y., Chernyaev A.A. Isoperimetric Properties of the Torsion Rigidity of Convex Section // Procedia Ingineering, International on Conference on Industrial Ingineering, ICIE 2016. pp 1648-1656.
6. Коробко В.И., Хусточкин А.Н. Изопериметрический метод в задачах устойчивости пластинок. Ростов-на-Дону: Изд-во Северо-Кавказского научного центра высшей школы, 1994. 144 с.
7. Черняев А.А. Динамический расчет правильных n-угольных, треугольных и ромбических шарнирно опертых пластинок с использованием отношения конформных радиусов в качестве геометрического аргумента // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2012. № 2. С. 63-71.
8. Черняев А.А. Геометрическое моделирование пластинчатых конструкций из условия жесткости // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. 2012. V. 8. Issue 4. P. 66-77.
9. Полиа Г., Сёге Г. Изопериметрические неравенства в математической физике. М.: КомКнига, 2006. 336 с.
10. Казанцев В.П. Золотов О.А, Долгополова М.В. Электростатика на плоскости. Нормировка потенциала. Емкости уединенного проводника и линии относительно точки. Конформные радиусы // Вестник КрасГУ. Физико-математические науки. 2005. №1. С. 32-38.
11. Коробко В.И., Черняев А.А. Определение максимального прогиба прямоугольных пластинок с комбинированными граничными условиями с использованием отношения конформных радиусов // Строительство и реконструкция. 2011. № 6. С.24-29.

REFERENCES

1. Arutyunyan N.KH., Abramyan V.L. Krucheniye uprugikh tel [Torsion of elastic bodies]. Moscow: Fizmatgiz, 1963. 686 p.
2. Korobko V.I. Izoperimetricheskiy metod v stroitel'noy mekhanike: Teoreticheskiye osnovy izoperimetricheskogo metoda [Isoperimetric method in structural mechanics: Theoretical foundations of the isoperimetric method]. Moscow: Izdatel'stvo ASV, 1997. 390 p.
3. Korobko A.V. Geometricheskoye modelirovaniye formoy oblasti v dvumernykh zadachakh teorii uprugosti [Geometric modeling by the shape of a region in two-dimensional problems of the theory of elasticity]. Moscow: Izdatel'stvo ASV, 1999. 302 p.
4. Korobko V.I., Malykh S.G. Graficheskoye predstavleniye granits izmeneniya geometricheskoy zhestkosti se-cheniy v vide vypuklykh figure [A graphic representation of the boundaries of the change in the geometric stiffness of sections in the form of convex figures]. *Izvestiya vuzov. Mashinostroyeniye*. 1986. No 3. Pp. 2-7.
5. Korobko V.I., Korobko A.V., Savin S.Y., Chernyaev A.A. Isoperimetric Properties of the Torsion Rigidity of Convex Section. Procedia Ingineering, International on Conference on Industrial Ingineering, ICIE 2016. pp 1648-1656.
6. Korobko V.I., Khustochkin A.N. Izoperimetricheskiy metod v zadachakh ustoychivosti plastinok [Isoperimetric method in problems of plate stability]. Rostov-na-Donu: Izd-vo Severo-Kavkazskogo nauchnogo tsentra vysshey

shkoly, 1994. 144 p.

7. Chernyayev A.A. Dinamicheskiy raschet pravil'nykh n-ugol'nykh, treugol'nykh i rombicheskikh sharnirno opertykh plastinok s ispol'zovaniyem otnosheniya konformnykh radiusov v kachestve geometricheskogo argumenta [Dynamic calculation of regular n-coal, triangular and rhombic articulated supports using the ratio of conformal radii as a geometric argument]. Stroitel'naya mekhanika inzhenernykh konstruktsiy i sooruzheniy. 2012. No 2. Pp. 63-71.

8. Chernyayev A.A. Geometricheskoye modelirovaniye plastinchatykh konstruktsiy iz usloviya zhestkosti [Geometric modeling of plate constructions from stiffness conditions]. Inter-national Journal for Computational Civil and Structural Engineering. 2012. V. 8. Issue 4. P. 66-77.

9. Polia G., Soge G. Izoperimetricheskiye neravenstva v matematicheskoy fizike [Isoperimetric inequalities in mathematical physics]. Moscow: KomKniga, 2006. 336 p.

10. Kazantsev V.P. Zolotov O.A, Dolgopolova M.V. Elektrostatika na ploskosti. Normirovka potentsiala. Yemkosti uyedinennogo provodnika i linii otnositel'no tochki. Konformnyye radius [Electrostatics on the plane. Normalization of potential. Capacities of a solitary conductor and line relative to a point. Conformal radii]. Vestnik KrasGU. Fiziko-matematicheskiye nauki. 2005. No 1. P. 32-38.

11. Korobko V.I., Chernyayev A.A. Opredeleniye maksimal'nogo progiba pryamougol'nykh plastinok s kombinirovannymi granichnymi usloviyami s ispol'zovaniyem otnosheniya konformnykh radiusov [Determination of the maximum deflection of rectangular plates with combined boundary conditions using the ratio of conformal radii]. Stroitel'stvo i rekonstruktsiya. 2011. No 6. Pp. 24-29.

Информация об авторах

Коробко Андрей Викторович
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева», Орёл, Россия,
доктор технических наук, профессор кафедры мехатроники, механики и робототехники.
E-mail: ankor.66@mail.ru

Калашникова Наталья Григорьевна
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева», Орёл, Россия,
доктор технических наук, профессор кафедры мехатроники, механики и робототехники.
E-mail: naka.61@mail.ru

Information about authors

Andrey Korobko V.
Orel state University named after I.S. Turgeneva, Orel, Russia,
doctor of technical Sciences, Professor of the Department of mechatronics, mechanics and robotics.
E-mail: ankor.66@mail.ru

Kalashnikova Natalia G.
Orel state University named after I.S. Turgenev, Orel, Russia,
doctor of technical Sciences, Professor of the Department of mechatronics, mechanics and robotics.
E-mail: naka.61@mail.ru