

Е.Н. КУРБАЦКИЙ¹, Е.А. ПЕСТРЯКОВА¹, С.С. ХАРИТОНОВ¹¹Российский университет транспорта (МИИТ), г. Москва, Россия

СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ АМПЛИТУДНЫМИ СПЕКТРАМИ ФУРЬЕ И СПЕКТРАМИ МАКСИМАЛЬНЫХ РЕАКЦИЙ (СПЕКТРАМИ ОТВЕТОВ) НА ЗЕМЛЕТРЯСЕНИЯ

Аннотация. В работе отмечается актуальность вопроса введения в практику расчетов сооружений на сейсмические воздействия методически обоснованных исходных данных – спектров реакций. В ходе работы сформулированы понятия псевдоспектров ответов в перемещениях, скоростях и ускорениях. Приведены результаты определения соотношения между амплитудными спектрами Фурье и спектрами максимальных реакций систем с демпфированием, равном нулю. Получены соотношения между спектрами Фурье и спектрами ответов для систем с вязким демпфированием, аналогичных зависимостям между спектрами Фурье и спектром ответов для недемпфированных систем (Кавасуми, 1956; Рубин, 1961; Хадсон, 1962; Дженнингс, 1972). В отличие от работы «Демпфированный спектр Фурье и спектры отклика» (Идвадия и Трифунак, 1973) в нашей работе не используется функционал Демпфированный спектр Фурье. Используется классическое преобразование Фурье.

Ключевые слова: спектры Фурье, спектры ответов, демпфированные системы, недемпфированные системы.

E.N. KURBATSKIY¹, E.A. PESTRYAKOVA¹, S.S. KHARITONOV¹¹Russian University of Transport (MIIT), Moscow, Russia

RELATIONS BETWEEN AMPLITUDE FOURIER SPECTRA AND SPECTRA OF MAXIMUM REACTIONS (RESPONSE SPECTRA) TO EARTHQUAKES

Abstract. The paper notes the relevance of introducing into practice the calculations of structures on seismic effects of methodologically sound initial data - reaction spectra. In the course of the work, the concepts of pseudo-spectra of responses in displacements, speeds, and accelerations are formulated. The results of determining the relationship between the amplitude Fourier spectra and the spectra of the maximum reactions of systems with damping equal to zero are presented. Relations between the spectra Fourier and response spectra for systems with viscous damping are obtained, similar to the dependences between the Fourier spectra and the response spectrum for non-damped systems (Kawasumi, 1956; Rubin, 1961; Hudson, 1962; Jennings, 1972). In contrast to the work "Damped Fourier Spectrum and Response Spectra" (Idvadia and Trifunak, 1973), the functional Damped Fourier spectrum is not used in our work. The classic Fourier transform is used.

Keywords: Fourier spectra, response spectra, damped system, no damped systems.

Введение

С тех пор как сороковых годах прошлого столетия Бениофф [1] и Био [2] в 1934 году ввели концепцию спектров максимальных реакций на землетрясения, этот метод стал основным при анализе записей ускорений при землетрясениях во многих странах мира. Соотношения между максимальными спектрами реакций перемещений, скоростей и ускорений и спектрами Фурье было предметом многочисленных исследований и дискуссий.

Введение вместо спектров ответов разработчиками норм СССР и РФ не имеющих физического смысла понятий «динамических коэффициентов» практически исключило российских учёных из этих дискуссий и исследований. Была допущена серьёзная методическая

ошибка, когда при задании исходной сейсмической информации были использованы динамические коэффициенты, а не спектры реакций (ответов). Что такое спектры ответов (реакций) можно точно определить. Что такое «динамические коэффициенты» – непонятно! Определения, которые даются в разных источниках, либо неверны, либо неопределённые. Использование неудачных терминов может не только усложнить понимание явления, но и привести к неправильным решениям.

Для дальнейшего изложения понадобятся такие понятия как псевдоспектры ответов в перемещениях, скоростях и ускорениях. Так как эти удобные для анализа сейсмических воздействий пока ещё не используются российскими исследователями, приведём вывод, представленный в работе Д. Е. Хадсона [3].

1 Спектры максимальных ответов (реакций) на землетрясения в перемещениях скоростях и ускорениях

Относительные перемещения для системы с одной степенью свободы при сейсмическом воздействии можно определить, используя интеграл Дюамеля

$$u(t) = -\frac{1}{\omega_d} \int_0^t \ddot{u}_g(\tau) \sin \omega_d(t-\tau) e^{-\omega_n \xi(t-\tau)} d\tau \quad (1)$$

где $\ddot{u}_g(\tau)$ - ускорение колебаний грунта;

$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$ - частота собственных колебаний недемпфированной системы;

$\omega_d = \omega_n \sqrt{1-\xi^2}$ - частота собственных колебаний демпфированной системы;

ξ - коэффициент относительного демпфирования.

Тогда спектр максимальных перемещений для системы с одной степенью свободы определяется выражением:

$$S_d = \left[\frac{1}{\omega_d} \int_0^t \ddot{u}_g(\tau) \sin \omega_d(t-\tau) e^{-\omega_n \xi(t-\tau)} d\tau \right]_{\max} \quad (2)$$

Выражение для определения относительной скорости может быть получено путём дифференцирования уравнение (1):

$$\begin{aligned} \dot{u}_r(t) = & -\int_0^t \ddot{u}_g(\tau) \cos \omega_d(t-\tau) e^{-\omega_n \xi(t-\tau)} d\tau + \\ & + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \int_0^t \ddot{u}_g(\tau) \sin \omega_d(t-\tau) e^{-\omega_n \xi(t-\tau)} d\tau \end{aligned} \quad (3)$$

Дифференцирование уравнения (3) и не сложные алгебраические преобразования позволяют получить выражение для абсолютного ускорения массы:

$$\begin{aligned} \ddot{u}_a(t) = & \frac{\omega(1-\xi^2)}{\sqrt{1-\xi^2}} \int_0^t \ddot{u}_g(\tau) \sin \omega_d(t-\tau) e^{-\omega_n \xi(t-\tau)} d\tau + \\ & + 2\omega \xi \int_0^t \ddot{u}_g(\tau) \cos \omega_d(t-\tau) e^{-\omega_n \xi(t-\tau)} d\tau \end{aligned} \quad (4)$$

Учитывая малость параметра ξ , который для строительных конструкций с даже большим демпфированием не превышает 0,2, и полагая $\sqrt{1-\xi^2} \approx 1$, получим:

$$\begin{aligned} S_d &= \left[\frac{1}{\omega} \int_0^t \ddot{u}_g(\tau) \sin \omega(t-\tau) e^{-\omega\xi(t-\tau)} d\tau \right]_{\max} \\ S_v &= \left[\int_0^t \ddot{u}_g(\tau) \sin \omega(t-\tau) e^{-\omega\xi(t-\tau)} d\tau \right]_{\max} \\ S_a &= \left[\omega \int_0^t \ddot{u}_g(\tau) \sin \omega(t-\tau) e^{-\omega\xi(t-\tau)} d\tau \right]_{\max} \end{aligned} \quad (5)$$

В уравнении для скорости функция косинуса заменена на синус. Замена косинуса на синус не вносит существенных ошибок за исключением длинных периодов. Преимущество этой замены косинуса синусом состоит в том, что перемещения, скорость и ускорение могут тогда быть выражены через один и тот же интеграл.

Отсюда следует очень полезное соотношение:

$$\frac{S_a}{\omega} = S_v = \omega S_d. \quad (6)$$

Как показали многочисленные исследования, выполненные многими авторами, точные значения спектров ответов в скоростях и спектры, полученные умножением спектров ответов в перемещениях на частоту колебаний, для малых коэффициентов демпфирования практически не отличаются. Как и следовало ожидать при больших коэффициентах демпфирования (порядка 0,20) отличия могут достигать 20%.

Поскольку спектры, полученные с использованием соотношений (6) не являются в точности спектрами ответов, их принято называть псевдоспектрами и выражение (6) записывают в виде:

$$\frac{S_{pa}}{\omega} = S_{pv} = \omega S_d. \quad (7)$$

2 Метод

2.1 Соотношения между амплитудными спектрами Фурье и спектрами максимальных реакций систем с демпфированием, равном нулю

Амплитудный спектр Фурье ускорений грунта показывает распределение энергии по частотам, что представляет интерес для расчётчиков сооружений. Кстати, спектр Фурье имеет размерность скорости:

$$|\tilde{u}_r(\omega)| = \left| \int_0^T \ddot{u}_r e^{i\omega t} dt \right|.$$

Спектр откликов, определяющий реакцию сооружений на различные частоты более предпочтителен для инженеров, так как определяет основные параметры, необходимые для расчета сооружений. Естественно, учёных давно заинтересовало соотношение между спектрами Фурье и спектрами ответов. Как и следовало ожидать, существует тесная связь между выражением Фурье и спектром ответов в скоростях для систем без учёта демпфирования, т.е. при $\xi = 0$ [3] и [4].

Учитывая тот факт, что об этой связи в многочисленных и объёмных исследованиях по расчёту сооружений на сейсмические воздействия российских учёных даже не упоминается, приведём вывод соотношения между спектрами Фурье и спектрами ответов недемпфированной системы, как это представлено в работе [5].

Выражение для относительной скорости незатухающей системы может быть представлено интегралом:

$$\dot{u}_r(t) = \int_0^t \ddot{u}_g(\tau) \cos \omega(t - \tau) d\tau, \quad (8)$$

которое может быть переписано в виде:

$$\dot{u}_r(t) = \cos \omega t \int_0^t \ddot{u}_g(\tau) \cos \omega \tau d\tau + \sin \omega t \int_0^t \ddot{u}_g(\tau) \sin \omega \tau d\tau. \quad (9)$$

Максимум этого выражения определяет недемпфированный спектр ответов в скоростях:

$$(S_v)_{\xi=0} = \left\{ \sqrt{\left[\int_0^t \ddot{u}_g(\tau) \cos \omega \tau d\tau \right]^2 + \left[\int_0^t \ddot{u}_g(\tau) \sin \omega \tau d\tau \right]^2} \right\}_{\max}. \quad (10)$$

Предположим, что продолжительность землетрясения равно T и максимальная реакция возникает в конце воздействия землетрясения при $t=T$. Тогда выражение (10) принимает вид:

$$(S_v)_{\xi=0} = \sqrt{\left[\int_0^T \ddot{u}_g(\tau) \cos \omega \tau d\tau \right]^2 + \left[\int_0^T \ddot{u}_g(\tau) \sin \omega \tau d\tau \right]^2}. \quad (11)$$

Это, конечно, особый случай, так как максимальная реакция может произойти и до конца землетрясения.

Далее отметим, что спектр Фурье для финитной функции $\ddot{u}_g(t)$, отличной от нуля на интервале $0 < t < T$ будет определяться выражением:

$$F[\ddot{u}_g(t)] = \tilde{\ddot{u}}_g(\omega) = \int_0^T \ddot{u}_g(t) e^{i\omega t} dt. \quad (12)$$

Представляя экспоненту через тригонометрические функции, получим

$$\tilde{\ddot{u}}_g(\omega) = \int_0^T \ddot{u}_g(\tau) \cos \omega \tau d\tau - i \int_0^T \ddot{u}_g(\tau) \sin \omega \tau d\tau. \quad (13)$$

Амплитудный спектр Фурье можно представить квадратным корнем из суммы квадратов вещественной и мнимой частей $F(\omega)$:

$$|\tilde{\ddot{u}}_g(\omega)| = \sqrt{\left[\int_0^T \ddot{u}_g(\tau) \cos \omega \tau d\tau \right]^2 + \left[\int_0^T \ddot{u}_g(\tau) \sin \omega \tau d\tau \right]^2}. \quad (14)$$

Сравнивая уравнения (11) и (14) замечаем, что спектр ответов в скоростях для недемпфированных систем совпадает с модулем преобразования Фурье, если максимум реакции на землетрясение возникает в конце землетрясения

$$(S_v)_{\xi=0} = |\tilde{u}_g(\omega)| \quad (15)$$

Естественно возникает вопрос о влиянии используемой в расчётах продолжительности акселерограмм землетрясений. Было отмечено, что хотя существуют различия, но нет существенной разницы в общей картине распределении основных частот [6,7,8].

На рисунке 1 представлена акселерограмма землетрясения, спектр Фурье и спектр ответов в скоростях для недемпфированной системы ($\xi = 0$). Как и следовало ожидать, графики спектров Фурье ускорений и спектры ответов в скоростях практически не отличаются.

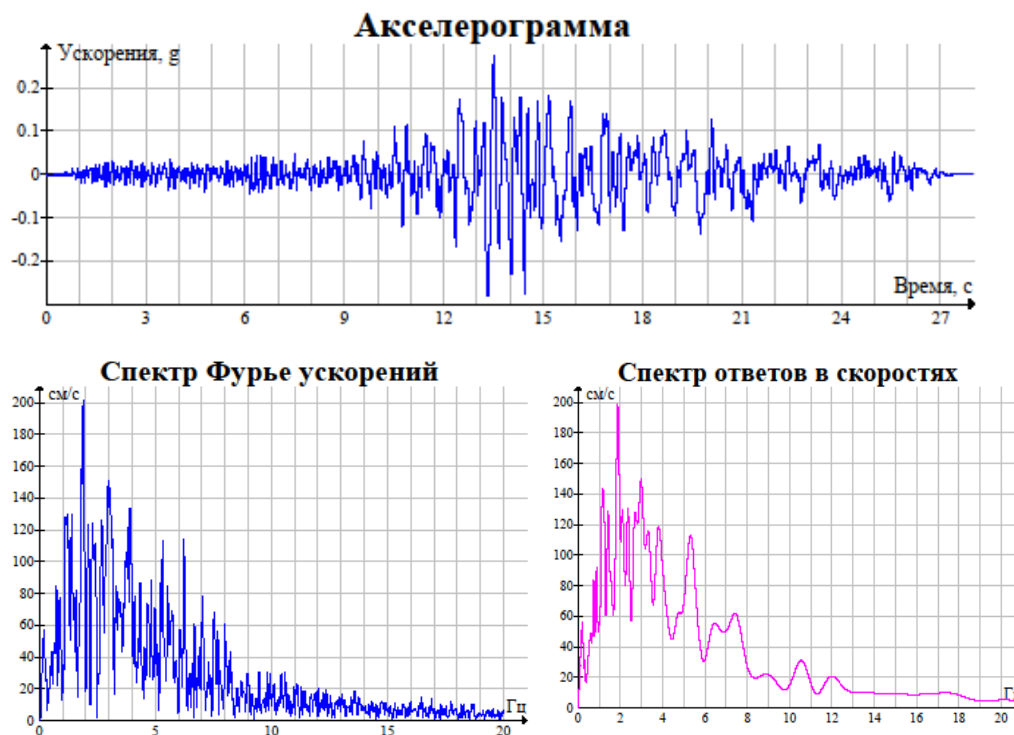


Рисунок 1 - Акселерограмма землетрясения (Калифорния 1993 г). Спектр Фурье и спектр ответов в скоростях для систем с демпфированием, равным нулю

Аналогичные соотношения можно получить для спектров Фурье скорости и спектров ответов в перемещениях. На рисунке 2 представлены графики, подтверждающие это утверждение. Доказательство приводить не будем, так оно полностью с выводом выражения (15).

Представим другой вывод равенства (15), который позже будет использоваться для систем с учётом демпфирования. Применим преобразование Фурье к уравнению вынужденных колебаний системы с одной степенью свободы без демпфирования:

$$m\ddot{u}_g(t) + ku_r(t) = 0 \Rightarrow \ddot{u}_r(t) + \omega_n^2 u_r(t) = -\ddot{u}_g(t) \quad (16)$$

Применив преобразование Фурье, получим:

$$\tilde{u}_r(\omega) [-\omega^2 + \omega_n^2] = -\tilde{\ddot{u}}_g(\omega) \rightarrow \tilde{u}_r(\omega) = \frac{\tilde{\ddot{u}}_g(\omega)}{\omega^2 - \omega_n^2} \quad (17)$$

Используя свойство преобразования Фурье [9,10] $F[D^k f] = (-i\omega)^k F[f]$, получим выражение для изображения Фурье скорости:

$$\tilde{\dot{u}}_r(\omega) = \frac{(-i\omega)\tilde{\ddot{u}}_g(\omega)}{\omega^2 - \omega_n^2} \quad (18)$$

Для определения функции относительной скорости необходимо выполнить обратное преобразование Фурье:

$$\dot{u}_r = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{i\omega \tilde{u}_g(\omega)}{\omega^2 - \omega_n^2} e^{-i\omega t} d\omega \quad (19)$$

Для вычисления интеграла используем теорию вычетов.



Рисунок 2 - Велосиграмма землетрясения (Калифорния 1993 г.).
Спектр Фурье функции скорости и спектр ответов в перемещения

Функция имеет две особые точки $\omega = \pm\omega_n$, которые являются простыми полюсами.

При $t > 0$ подынтегральная функция $\frac{i\omega \tilde{u}_g(\omega)}{\omega^2 - \omega_n^2} e^{-i\omega t}$ является аналитической функцией в нижней полуплоскости за исключением двух изолированных особых точек и равномерно стремиться к нулю при $|\omega| \rightarrow \infty$. При таких условиях формула для вычисления интеграла имеет вид:

$$\dot{u}_r(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{i\omega \tilde{u}_g(\omega)}{\omega^2 - \omega_n^2} e^{-i\omega t} d\omega = \frac{2\pi i}{2\pi} \left[\operatorname{Res}_{\omega=\omega_n} \frac{i\omega \tilde{u}_g(\omega)}{\omega^2 - \omega_n^2} e^{-i\omega t} + \operatorname{Res}_{\omega=-\omega_n} \frac{i\omega \tilde{u}_g(\omega)}{\omega^2 - \omega_n^2} e^{-i\omega t} \right]. \quad (20)$$

Таким образом,

$$\dot{u}_r(t) = \frac{2\pi i}{2\pi} \left\{ \frac{\tilde{u}_g(\omega_n)}{2} e^{-i\omega_n t} - \frac{\tilde{u}_g(-\omega_n)}{2} e^{i\omega_n t} \right\} = \tilde{u}_g(\omega_n) \frac{e^{i\omega_n t} - e^{-i\omega_n t}}{2}. \quad (21)$$

Для действительной функции $\ddot{u}_g(\omega_n) = \ddot{u}_g(-\omega_n)$,

$$\dot{u}_r(t) = \ddot{u}_g(\omega_n) \frac{e^{i\omega_n t} - e^{-i\omega_n t}}{2} = i\ddot{u}_g(\omega_n) \sin \omega_n t. \quad (22)$$

Тогда $|\dot{u}_r(t)|_{\max} = |\ddot{u}_g(\omega_n)|$ при $t = \frac{\pi}{2\omega_n}$

$$(S_v)_{\xi=0} = |\ddot{u}_g(\omega)|. \quad (23)$$

2.2 Соотношения между и амплитудными спектрами Фурье и спектрами максимальных реакций при неравном нулю демпфировании

В 1973 году американские учёные Удвадия Ф.Е. и Трифунак М.Д. опубликовали статью «Демпфированные спектры Фурье и спектры ответов», в которой для определения взаимосвязи между спектрами Фурье и спектрами ответов для систем с демпфированием использовали новый функционал, который назвали «Демпфированный спектр Фурье» [11]. Действительно применение нового функционала позволило установить связь аналогичную той, которая ранее была установлена для систем без демпфирования.

В настоящей работе взаимосвязь спектра Фурье и спектров ответов для систем с демпфированием (вязким сопротивлением) будет установлена с использованием классического преобразования Фурье.

Для определения взаимосвязи интеграла Фурье со спектрами ответов (максимальных реакций) демпфированной системы преобразуем исходное дифференциальное уравнение колебаний системы с одной степенью свободы при сейсмическом воздействии, определяемом ускорением грунта $\ddot{u}_g$

$$\ddot{u}_r + 2\xi\omega_n\dot{u}_r + \omega_n^2 u_r = -\ddot{u}_g, \quad (24)$$

где $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$ - частота собственных колебаний недемпфированной системы;

ξ - относительный коэффициент демпфирования.

Введём новую функцию $U(t) = u_r(t)e^{\omega_n \xi t}$. Выполнив необходимые преобразования, приведём уравнение (24) к виду:

$$\ddot{U}(t) + \omega_d^2 U(t) = -\ddot{u}_g(t)e^{\omega_n \xi t}, \quad (25)$$

где $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$ - частота собственных колебаний системы с относительным коэффициентом демпфирования, равном ξ . Кроме того, введем обозначения:

$$\beta = \xi / \sqrt{1 - \xi^2}; \quad \omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} \text{ и } \omega_n \xi = \frac{\omega_d \xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} = \beta \omega_d.$$

Учтём, что землетрясение имеет ограниченную во времени продолжительность, равную $t_{\text{кон}}$:

$$\ddot{U}(t) + \omega_d^2 U(t) = \ddot{u}_g(t)[H(t) - H(t - t_{\text{кон}})]e^{\omega_d \beta t},$$

где $H(t)$ - функция Хевисайда (функция единичного скачка).

Используя обозначение $U_g(t) = \ddot{u}_g(t)[H(t) - H(t - t_{\text{кон}})]e^{\omega_d \beta t}$, приведём уравнение (25) к виду:

$$\ddot{U}(t) + \omega_d^2 U(t) = -U_g(t). \quad (26)$$

Применив преобразование Фурье к обеим частям уравнения (26), получим

$$\tilde{U}(\omega) [-\omega^2 + \omega_d^2] = -\tilde{U}_g(\omega) \rightarrow \tilde{U}(\omega) = \frac{\tilde{U}_g(\omega)}{\omega^2 - \omega_d^2} \quad (27)$$

$$\text{где } \tilde{U}_g(\omega) = \int_0^T \ddot{u}_g(t) e^{\xi \omega_n t} e^{i \omega t} dt \quad (28)$$

Используя свойство преобразования Фурье $F[D^k f] = (-i\omega)^k F[f]$, получим выражение для изображения Фурье скорости:

$$\dot{\tilde{U}}(\omega) = \frac{(-i\omega) \tilde{U}_g(\omega)}{\omega^2 - \omega_d^2} \quad (29)$$

Функция $\tilde{U}(\omega)$ имеет две особые точки $\omega = \pm \omega_n$, которые являются простыми полюсами.

При $t > 0$ подынтегральная функция $\frac{i\omega \tilde{U}_g(\omega)}{\omega^2 - \omega_d^2} e^{-i\omega t}$ является аналитической функцией в нижней полуплоскости за исключением двух изолированных особых точек и равномерно стремится к нулю при $|\omega| \rightarrow \infty$.

При таких условиях формула для вычисления интеграла имеет вид:

$$\dot{U}_r(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{i\omega \tilde{U}_g(\omega)}{\omega^2 - \omega_d^2} e^{-i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \left\{ 2\pi i \left[\operatorname{Res}_{\omega=\omega_d} \frac{i\omega \tilde{U}_g(\omega)}{\omega^2 - \omega_d^2} e^{-i\omega t} + \operatorname{Res}_{\omega=-\omega_d} \frac{i\omega \tilde{U}_g(\omega)}{\omega^2 - \omega_d^2} e^{-i\omega t} \right] \right\} \quad (30)$$

Учитывая $\tilde{U}_g(\omega_d) = \tilde{U}_g(-\omega_d)$

$$\dot{U}_r(t) = \frac{2\pi i}{2\pi} \left\{ \left[\frac{\tilde{U}_g(\omega_d)}{2} e^{-i\omega_d t} - \frac{\tilde{U}_g(-\omega_d)}{2} e^{i\omega_d t} \right] \right\} = \tilde{U}_g(\omega_d) \frac{e^{i\omega_d t} - e^{-i\omega_d t}}{2} \quad (31)$$

Отметим, что при $\xi \neq 0$:

$$\left| \dot{U}_r(t) \right|_{\max} = \left| \tilde{U}_g(\omega_d) \right| \quad \text{при } t_k = \frac{\pi}{2\omega_d} \quad (32)$$

Учитывая выражение

$$\dot{U}(t) = \dot{u}(t) e^{\omega_n \xi t} + \omega_n \xi u(t) e^{\omega_n \xi t}, \quad (33)$$

и соотношение между спектрами ответов: $\frac{S_d}{\omega} = S_v = \omega S_a$ преобразуем выражение (32) к виду:

$$S_v(\omega, \xi) = \frac{1}{(1+\xi) e^{\omega_n \xi t_{\text{кон}}}} \left| \int_0^t \ddot{u}_g(t) e^{\omega_d \beta t} e^{\omega_d t} dt \right| \quad (34)$$

Отметим, что при выводе выражения (34) учтено, что $\xi \leq 0,2$. Тогда можно положить $\beta \approx \xi$. Кроме того, выражение (34) можно упростить, используя интегрирование по частям.

3 Результаты

Для сравнения спектров ответов в скоростях, полученных аналитическим методом и с помощью программного комплекса Nonline, были рассчитаны спектры ответов в скоростях с коэффициентами демпфирования 2,5% и 5% при воздействии землетрясения Кобе и Чи Чи. Результаты расчётов представлены на рисунках 3 и 4.

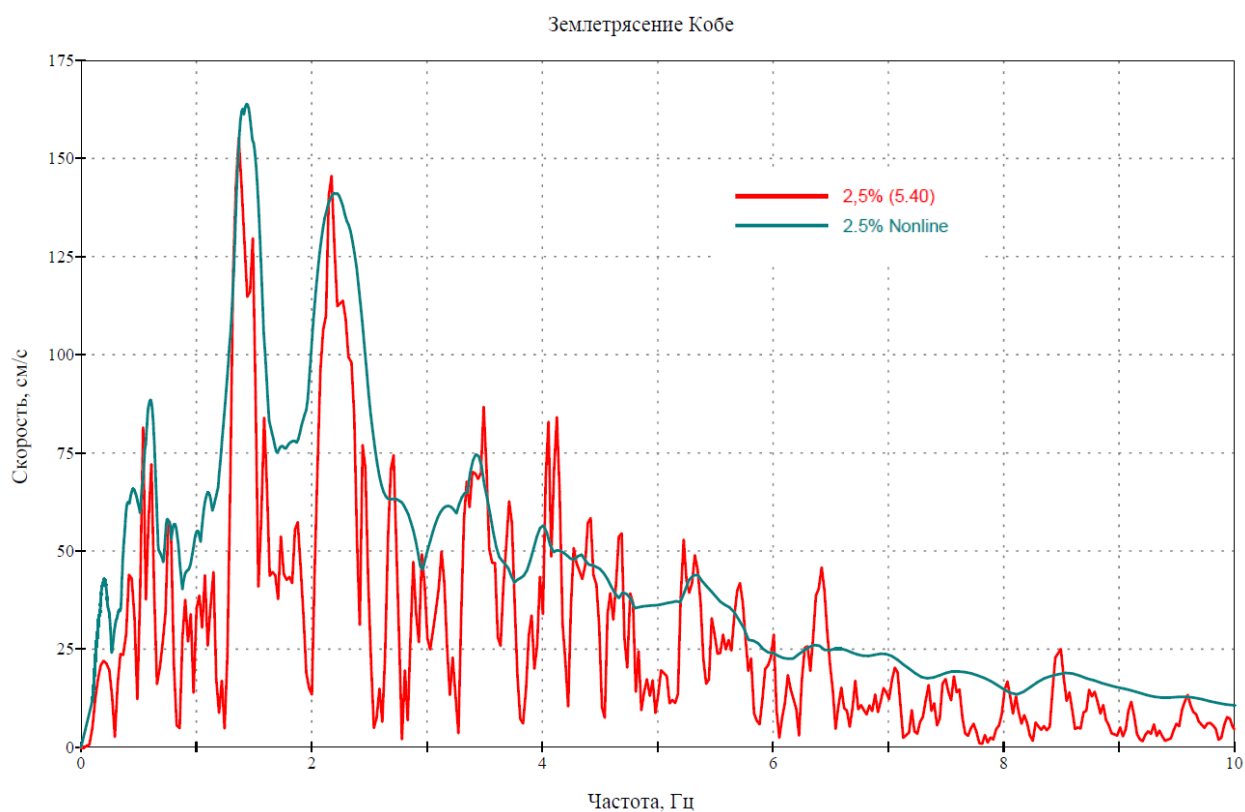


Рисунок 3 - Спектры ответов в скоростях при коэффициенте демпфирования 2,5%

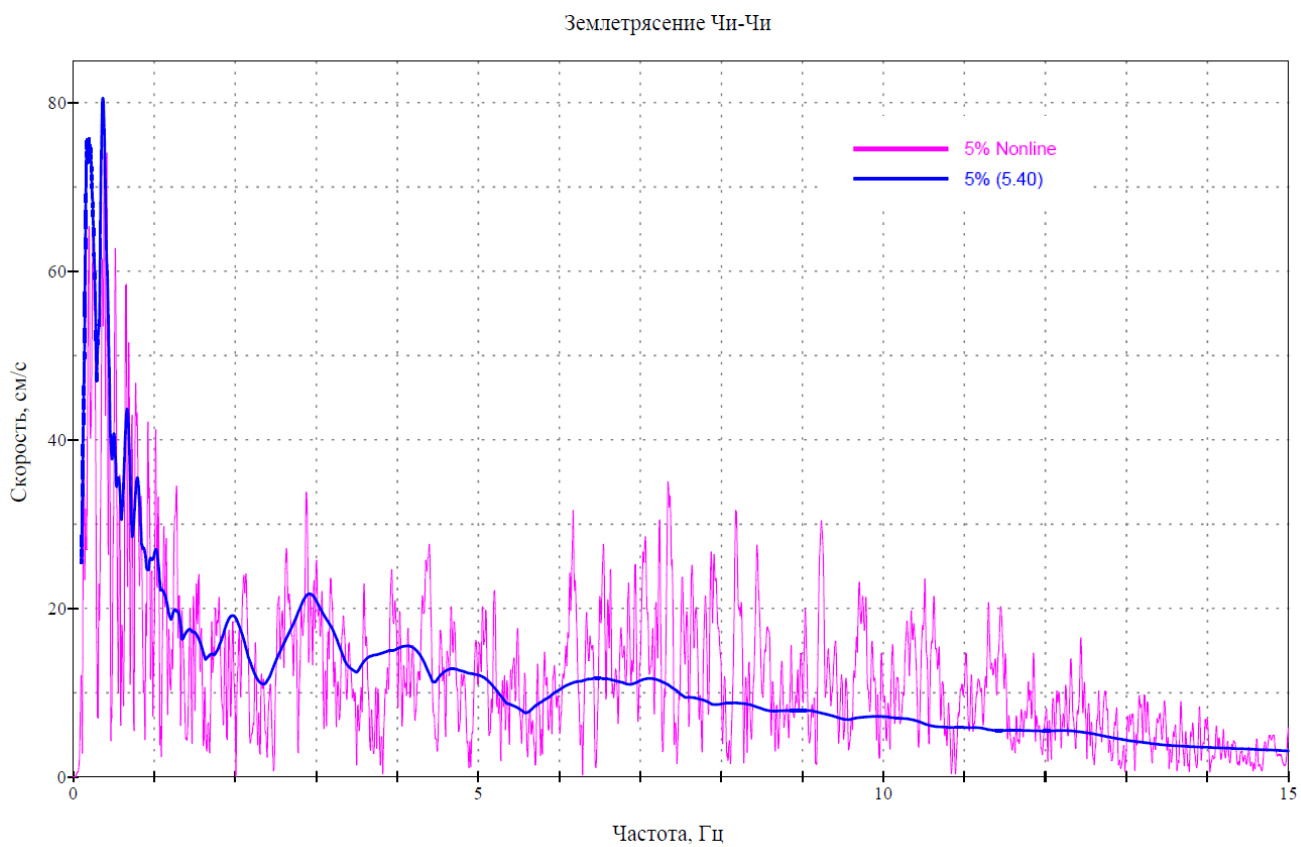


Рисунок 4 - Спектры ответов в скоростях при коэффициенте демпфирования 5%

Для построения спектров ответов использовалась приближённая формула (35), полученная из выражения (34):

$$S_v(\omega, \xi) = \frac{|F[\ddot{u}_g(t)]|}{2(1 + \xi)} \quad (35)$$

Спектры ответов, полученные с использованием приближенного выражения (35), превышают реальные спектры ответов. При малых коэффициентах демпфирования кривые практически совпадают. Для систем с большим коэффициентом демпфирования, точные значения спектров можно получить, используя выражение (34).

Выводы

Алгоритмом быстрого преобразования Фурье (Tukey, 1967), предоставил анализу Фурье неоспоримые преимущества при обработке объёмных данных, характеризующих сейсмические воздействия. Много лет назад была установлена связь между спектрами Фурье и спектрами ответов для недемпфированных систем, позволяющая быстро обрабатывать большие массивы данных. Позднее учёные Идвадия и Трифунак, (1973) распространили эту теорию на демпфированные системы, используя функционал, и понятие, которое они определили, как «Демпфированный спектр Фурье». Показали, что демпфированный спектр Фурье так же соответствует демпфированному спектру ответов, как классическое преобразование Фурье спектру ответов в скоростях при равном нулю демпфированию. В настоящей работе не используется понятие демпфированного спектра Фурье. Получены выражения для построения спектров ответов в скоростях и перемещениях для систем с отличным от нуля демпфированием.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Benioff H. The physical evaluation of seismic destructiveness // Bulletin of the Seismological Society of America. 1934. 24. Pp. 398-403.
2. Biot V.A Theory of vibration of building during earthquakes // Zeitschrift fur Angewandte Matematic und Mechanik 1934. 14(4). Pp. 213-233
3. Hudson D.E. Response spectrum techniques in engineering seismology // Proceedings of the First World Conference on Earthquake Engineering, Berkley, CA. 1956. 4-1. Pp. 4-12.
4. Kawasumi H. Notes on the Theory of Vibration Analyzer // Bull. Earthquake Res. Inst., Tokyo Univ. 1956. 34. Part 1.
5. Hudson D.E. Some Problems in the Application of Spectrum Techniques to Strong Motion Earthquake Analysis // Bull. Seismological Society of America. 1962. Vol. 52. No. 2, April.
6. Rubin S. Concepts in shock data analysis, Chap. 23 of Shock and Vibration Handbook (C.M. Harris and C. E. Crede, Editors), McGraw-Hill, New York, 1961.
7. Trifunac M.D. Tectonic stress and the source mechanism of the Imperial Valley, California, earthquake of 1940 // Bull. Seism. Soc. Am. 1972. Vol. 62, Pp. 1283-1302.
8. Jennings P.C. Rapid calculation of selected Fourier spectrum ordinates, Earthquake Engineering Research Laboratory, EERL 12-05, California Institute of Technology, Pasadena. 1972.
9. Гельфанд И.М., Шилов Г.Е. Обобщённые функции и действия над ними. М.: Добросвет, 2000. 400 с.
10. Шварц Л. Математические методы для физических наук. М.: Мир, 1965. 412 с.
11. Udawadia F.E., Trifunac M.D. The Fourier Transform, Response Spectra and their relationship through the statistics of oscillator response, Earthquake Engineering Research Laboratory, EERL 73-01, California Institute of Technology, Pasadena, 1973.

REFERENCES

1. Benioff H. The physical evaluation of seismic destructiveness. *Bulletin of the Seismological Society of America*. 1934. 24. P. 398-403.
2. Biot V.A Theory of vibration of building during earthquakes. *Zeitschrift fur Angewandte Matematic und Mechanik*. 1934. 14(4). P. 213-233

3. Hudson D.E. Response spectrum techniques in engineering seismology. Proceedings of the First World Conference on Earthquake Engineering, Berkley, CA. 1956. 4-1-4-12.
4. Kawasumi N. Notes on the Theory of Vibration Analyzer, Bull. Earthquake Res. Inst., Tokyo Univ. 34, Part 1, 1956.
5. Hudson D.E. Some Problems in the Application of Spectrum Techniques to Strong Motion Earthquake Analysis. *Bull. Seismological Society of America*. 1962. Vol. 52. No. 2, April.
6. Ru'in S. Concepts in shock data analysis, Chap. 23 of Shock and Vibration Handbook (S.M. Harris and S. E. Crede, Editors), McGraw-Hill, New York, 1961.
7. Trifunac M.D. Tectonic stress and the source mechanism of the Imperial Valley, California, earthquake of 1940. *Bull. Seism. Soc. Am.* 1972. 62, 1283-1302.
8. Jennings R.S. Rapid calculation of selected Fourier spectrum ordinates, Earthquake Engineering Research Laboratory, EERL 12-05, California Institute of Technology, Pasadena, 1972.
9. Gel'fand I.M., Shilov G.E. *Obobshchionnye funktsii i deystviya nad nimi* [Generalized functions and actions on them]. Moscow: Dobrosvet, 2000. 400 p.
10. Shvarts L. *Matematicheskie metody dlya fizicheskikh nauk* [Mathematical Methods for the Physical Sciences]. Moscow: Mir, 1965. 412 p.
11. Udvardi F.E., Trifunac M.D. The Fourier Transform, Response Spectra and their relationship through the statistics of oscillator response, Earthquake Engineering Research Laboratory, EERL 73-01, California Institute of Technology, Pasadena, 1973.

Информация об авторах

Курбацкий Евгений Николаевич

Российский университет транспорта (МИИТ), г. Москва, Россия,
профессор кафедры «Мосты и тоннели».
E-mail: usd.miit@gmail.com

Пестрякова Екатерина Алексеевна

Российский университет транспорта (МИИТ), г. Москва, Россия,
старший преподаватель кафедры «Мосты и тоннели»
E-mail: usd.miit@gmail.com

Харитонов Сергей Сергеевич

Российский университет транспорта (МИИТ), г. Москва, Россия,
аспирант кафедры «Мосты и тоннели».
E-mail: mr.kharitonov.94@mail.ru

Information about authors

Kurbatskiy Evgeniy N.

Russian University of Transport (MIIT), Moscow, Russia,
professor at the Bridges and Tunnels Department.
Email: usd.miit@gmail.com

Pestryakova Ekaterina A.

Russian University of Transport (MIIT), Moscow, Russia,
senior Lecturer at the Bridges and Tunnels Department.
Email: usd.miit@gmail.com

Kharitonov Sergey S.

Russian University of Transport (MIIT), Moscow, Russia,
postgraduate student of the department "Bridges and tunnels".
E-mail: mr.kharitonov.94@mail.ru