УДК 539.3:620.193:669 DOI: 10.33979/2073-7416-2019-85-5-48-62

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ВЛИЯНИЯ НАВОДОРОЖИВАНИЯ НА НДС ПОЛОГОЙСФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ИЗ ТИТАНОВОГО СПЛАВА

ТРЕЩЁВ А.А., КУЗНЕЦОВА В.О.

Тульский Государственный Университет, Тула, Россия

Аннотация. *Рассмотрено построение математической модели, описывающей влияние наводороживания на напряжённо-деформированное состояние тонкой пологой сферической оболочки из титанового сплава, нагруженной равномерно-распределённой нагрузкой с использованием нелинейной модели, представленной в нормированных пространствах напряжений. Нагрузка принята таким образом, чтобы прогибы оболочки были большими. Закрепление оболочки жёсткое. Разработан алгоритм решения данного класса задач. Практическое решение производилось двухшаговым методом последовательных возмущений параметров с помощью пакета прикладных программ MatLab и Maple. Для решения системы разрешающих дифференциальных уравнений применён метод конечных разностей. Произведено сравнение полученных результатов с результатами классической теории и теории И.Г. Овчинникова.*

Ключевые слова: *пологая оболочка, титановый сплав, конечные разности, нелинейное деформирование, изотропный материал, большие прогибы.*

SIMULATION OF THE PROCESS OF INFLUENCE OF FLUIDING ON STRESS-STRANE STATE OF THE FLAG SPHERICAL SHELL MADE OF TITANIUM ALLOY

TRESCHEV A.A., KUZNETSOVA V.O.

Tula State University, Tula, Russia

Abstract. *The construction of a mathematical model describing the effect of flooding on the stress-strain state of a thin flat spherical shell of a titanium layer loaded with an equidistributed load using a nonlinear model is considered. By A.A. Treshchev. The load is adopted in such a way that the deflections of the shell are small. Fix of the shell is hard. An algorithm was developed to solve this class of problems. A practical solution was produced by the two-step method of sequential perturbation of parameters using the MatLab and Maple application software package. To derive and solve the system of resolving differential equations, the finite difference method was applied. A comparison of the results obtained with the results of the classical theory.*

Keywords: *flat shell, titanium alloy, finite differences, nonlinear characteristics, isotropic material, small deflections.*

Введение

В настоящее время всё чаще инженеры проектируют здания, детали машин и аппаратов, которым до сегодняшнего момента не было аналогов. К ним относят современные спортивные комплексы, концертные залы, уникальные небоскрёбы, торговые и развлекательные центры, детали летательных аппаратов, ракетные комплексы и т.д. Титан и его сплавы широко применяются для изготовления конструкций в авиационной, ракетной, химической отраслях, а также в строительстве. Это связано с большим набором ценных свойств, которыми являются: высокая коррозионная стойкость, малый удельный вес, довольно большая прочность и жаропрочность, достаточная пластичность при криогенных температурах, значительная распространенность титана в природе [1]. Титановые сплавы,

изначально обладая нечувствительностью к виду напряженного состояния, в процессе насыщения водородом (наводороживания) приобретают свойства разносопротивляемости, которые меняются в течение времени, что приводит к охрупчиванию и раннему разрушению.

Выбранный подход к решению задачи влияния наводороживания на НДС пологой сферической оболочки представляет собой численный метод, основанный на замене производных разностными схемами. Для решения задачи, обладающей тройной нелинейностью принят двухшаговый метод последовательных возмущений параметров [9], который способен линеаризовать исходные уравнения и обладает высокой точностью.

Для решения поставленной задачи методом конечных разностей на расчётной области строится сетка, затем выбирается разностная схема и для каждого узла сетки записывается разностное уравнение, затем производится учёт краевых условий (для краевых условий второго и третьего рода так же строится разностная схема). Получается система линеаризованных алгебраических уравнений, решая которую приходим к приближенным результатам расчета в дискретных узлах.

Модели и методы

Рассматриваются тонкие пологие оболочки, у которых отношение стрелы подъема в центре *f* к меньшему размеру *a (радиусу)* в плане составляет:

$$\frac{f}{a} \le \frac{1}{5},$$

а отношение толщины оболочки *h* к наименьшему радиусу кривизны

$$\frac{h}{R_{min}} \le \frac{1}{20} \tag{1}$$

Ввиду пологости оболочки геометрия ее поверхности отождествляется с геометрией на проектной плоскости, и криволинейная система координат заменяется полярной системой.

Рассмотрим упругое равновесие пологой сферической оболочки толщиной h под действием поперечной осесимметричной равномерно-распределенной нагрузки q и водородосодержащей среды с концентрацией λ. Срединная поверхность оболочки является частью сферы, характеризуемой радиусом R (м). Оболочка имеет жесткую заделку по контуру.

Примем кинетический потенциал деформаций в виде [11]:

$$\begin{aligned} W_1 = &(A_e(\lambda) + B_e(\lambda)\xi)\sigma^2 + (C_e(\lambda) + D_e(\lambda)\xi + E_e(\lambda)\eta Cos3\varphi)\tau^2 + \\ &+ [(A_p(\lambda) + B_p(\lambda)\xi)\sigma^2 + (C_p(\lambda) + D_p(\lambda)\xi + E_p(\lambda)\eta Cos3\varphi)\tau^2]^n, \end{aligned} \tag{2}$$

где $A_e(\lambda)$, $B_e(\lambda)$, $C_e(\lambda)$, $D_e(\lambda)$, $E_e(\lambda)$, $A_p(\lambda)$, $B_p(\lambda)$, $C_p(\lambda)$, $D_p(\lambda)$, $E_p(\lambda)$ – физические функции потенциала соответственно квазилинейной и нелинейной частей, зависящие от степени водородонасыщения. Функциональные зависимости механических характеристик материала определены в результате полиномиальной интерполяции значений конкретных констант при фиксированном уровне концентрации среды λ (0; 0,01; 0,03 и 0,05%) для сплава ВТ1-0 принимают вид:

$$\begin{gathered} V_{ek}(\lambda) = e_{0k} + e_{1k}\cdot\lambda + e_{2k}\cdot\lambda^2; V_{pk}(\lambda) = p_{0k} + p_{1k}\cdot(p_{2k})^{\lambda}; \\ A_e(\lambda) = V_{e1}(\lambda);\ B_e(\lambda) = V_{e3}(\lambda);\ C_e(\lambda) = V_{e2}(\lambda);\ D_e(\lambda) = V_{e4}(\lambda);\ E_e(\lambda) = V_{e5}(\lambda); \\ A_p(\lambda) = V_{p1}(\lambda);\ B_p(\lambda) = V_{p3}(\lambda);\ C_p(\lambda) = V_{p2}(\lambda);\ D_p(\lambda) = V_{p4}(\lambda);\ E_p(\lambda) = V_{p5}(\lambda); \end{gathered} \tag{3}$$

где e_{ik}, p_{ik} – коэффициенты полиномов i = 0..3; k = 1..3.

Оболочку принимаем достаточно тонкой, такой, чтобы можно было считать справедливыми гипотезы Кирхгофа-Лява (1).

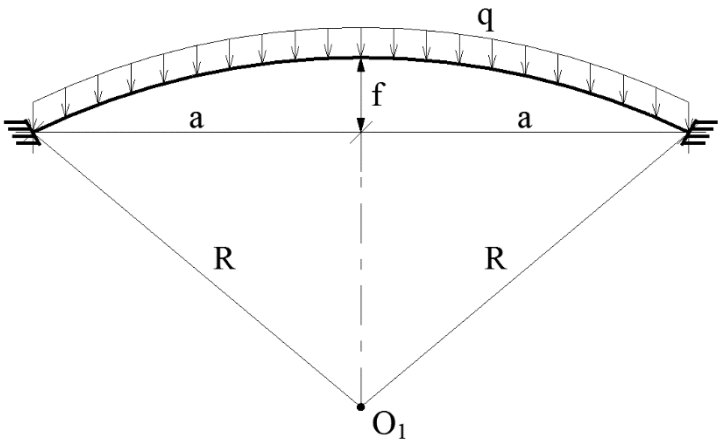


Рисунок 1 – Схема задачи

Для сферической оболочки справедливо постоянство главных радиусов кривизны её срединной поверхности в пределах плана: $R_1 = R_2 = R$

Тогда главные кривизны оболочки принимают значение $k_1 = k_2 = k = 1/R$. Далее рассматриваются пологие оболочки, в которых можно пренебречь разницей между длиной дуги срединной поверхности и ее проекцией на плоскость [1].

При этом используются следующие зависимости:

а) компоненты деформации в срединной поверхности:

$$\varepsilon_r = u,_r - kw + 0{,}5(w_{,r})^2; \;\; \varepsilon_\varphi = \frac{u}{r} - kw, \tag{4}$$

где $\varepsilon_r, \varepsilon_\varphi$ – радиальные и окружные относительные деформации в серединных поверхностях; u, w – радиальные перемещения и прогибы; k – главная кривизна; r – радиальная координата;

б) компоненты изгибной деформации (кривизны):

$$\chi_r = -w_{rr}; \;\; \chi_\varphi = -\frac{w,_r}{r} \tag{5}$$

в) выражения компонентов тензора деформаций через параметры деформации $\varepsilon_r, \varepsilon_\varphi$ и кривизны χ_r, χ_φ срединной поверхности:

$$e_r = \varepsilon_r + z\chi_r; \;\; e_\varphi = \varepsilon_\varphi + z\chi_\varphi \tag{6}$$

где z – вертикальная координата, отсчитываемая от срединной поверхности оболочки, направленная к центру кривизны.

Подставляя зависимости (4)-(5) в (6), получим выражения для компонентов тензора деформаций через перемещения и прогибы:

$$e_r = u,_r - kw + 0{,}5(w_{,r})^2 - zw_{,rr}; \;\; e_\varphi = \frac{u}{r} - kw - z\frac{w_{,r}}{r}. \tag{7}$$

Зависимости между деформациями и напряжениями получены путем применения формул Кастильяно к потенциалу W_1, которые принимают вид:

$$e_k = \frac{\partial W_1}{\partial \sigma_k};\ \gamma_{ij} = \frac{\partial W_1}{\partial \tau_{ij}};\ (i, j, k = 1,2,3), \tag{8}$$

$$e_{ij} = 2C_e(\lambda)\sigma_{ij}/3 + 2(A_e(\lambda) - C_e(\lambda))\sigma\delta_{ij}/3 + T_{ij}(\lambda); \tag{9}$$

где $T_{ij}(\lambda)$ - нелинейная составляющая уравнений состояния.

При этом $T_{ij}(\lambda)$ рассматривается как сумма двух слагаемых:

$$T_{ij}(\lambda) = T_{ij}^{e}(\lambda) + T_{ij}^{p}(\lambda); \tag{10}$$

где $T_{ij}^{e}(\lambda)$ - параметры, учитывающие чувствительность механических свойств материала к виду напряженного состояния на квазилинейном этапе деформирования, а $T_{ij}^{p}(\lambda)$ позволяет учесть явление разносопротивляемости конструкционного материала и нелинейность экспериментальных диаграмм деформирования.

Сами слагаемые $T_{ij}^{e}(\lambda)$ и $T_{ij}^{p}(\lambda)$ определяются соответственно следующим образом:

$$\begin{gathered} T_{ij}^{e}(\lambda) = 2\tau_{ij}(D_e(\lambda)\xi + E_e(\lambda)\eta\cos 3\varphi)/3 + \{(B_e(\lambda)\sigma^2 + \\ + D_e(\lambda)\tau^2)\xi,_{\tau_{ij}} + E_e(\lambda)\tau^2[\eta(\cos 3\varphi),_{\sigma_{kk}} + \eta,_{\sigma_{kk}}\cos 3\varphi]\}/2, \quad при \quad i \neq j; \\ T_{ij}^{p}(\lambda) = n\,[(A_p(\lambda) + B_p(\lambda)\xi)\sigma^2 + (C_p(\lambda) + D_p(\lambda)\xi + E_p(\lambda)\eta\cos 3\varphi)\tau^2]^{n-1} \times \\ \times\{2\tau_{ij}(\lambda)(C_p(\lambda) + D_p(\lambda)\xi + E_p(\lambda)\eta\cos 3\varphi)/3 + [(B_p(\lambda)\sigma^2 + D_p(\lambda)\tau^2)\xi,_{\tau_{ij}} + \\ + E_p(\lambda)\tau^2(\eta(\cos 3\varphi),_{\tau_{ij}} + \eta,_{\tau_{ij}}\cos 3\varphi)]/2\}, \quad при \quad i \neq j; \end{gathered} \tag{11}$$

где $\xi,_{\tau_{ij}} = -2\xi\eta^2 S_{ij}/3\tau^2;$ при $i \neq j;$; $\eta,_{\sigma_{ij}} = 2\xi^3 S_{ij}/3\sigma\tau;$ при $i \neq j;$

$\sigma = \delta_{ij}\sigma_{ij}/3$; $\tau = \sqrt{S_{ij}S_{ij}/3}$; $S_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma;$ δ_{ij} – символы Кронекера.

$$\begin{gathered} (\cos 3\varphi),_{\sigma_{ii}} = \sqrt{2}[(\sigma_{kk} - \sigma)(\sigma_{jj} - \sigma_{ii}) + (\sigma_{jj} - \sigma)(\sigma_{kk} - \sigma_{ii}) + \tau_{ij}^2 + \\ + \tau_{ik}^2 - 2\tau_{jk}^2]/(3\tau^3) - \cos 3\varphi(\sigma_{ii} - \sigma)/\tau^2; \\ (\cos 3\varphi),_{\tau_{ij}} = 2\sqrt{2}[\tau_{ik}\tau_{jk} - \tau_{ij}(\sigma_{kk} - \sigma)/\tau^3 - 2\cos 3\varphi\tau_{ij}/\tau^2; \end{gathered} \tag{12}$$

Связь между деформациями и напряжениями представим в виде:

$$\begin{Bmatrix} e_r \\ e_\theta \end{Bmatrix} = [A]\begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \end{Bmatrix}. \tag{13}$$

Обращая соотношения (13), получаем зависимость напряжений от деформаций:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \end{Bmatrix} = [B]\begin{Bmatrix} e_r \\ e_\theta \end{Bmatrix}, \tag{14}$$

где $[B]=[A]^{-1}$.

Здесь A_{11}, $A_{12}..A_{44}$ – компоненты симметричной матрицы [A] – функции, включающие константы потенциала W_1.

Усилия и моменты найдём через напряжения традиционным способом:

$$N_r=\int_{-h/2}^{h/2}\sigma_r dz;\ N_\varphi=\int_{-h/2}^{h/2}\sigma_\varphi dz;$$
$$M_r=\int_{-h/2}^{h/2}\sigma_r z dz;\ M_\varphi=\int_{-h/2}^{h/2}\sigma_\varphi z dz; \tag{15}$$

Связь моментов и усилий с компонентами деформаций оболочки приведём к виду:

$$M_r=K_{11}(\lambda)\varepsilon_r+K_{12}(\lambda)\varepsilon_\varphi+D_{11}(\lambda)\chi_r+D_{12}(\lambda)\chi_\varphi;$$
$$M_\theta=K_{21}(\lambda)\varepsilon_r+K_{22}(\lambda)\varepsilon_\varphi+D_{21}(\lambda)\chi_r+D_{22}(\lambda)\chi_\varphi;$$
$$N_r=C_{11}(\lambda)\varepsilon_r+C_{12}(\lambda)\varepsilon_\varphi+K_{11}(\lambda)\chi_r+K_{12}(\lambda)\chi_\varphi;$$
$$N_\theta=C_{21}(\lambda)\varepsilon_r+C_{22}(\lambda)\varepsilon_\varphi+K_{21}(\lambda)\chi_r+K_{22}(\lambda)\chi_\varphi, \tag{16}$$

С учётом влияния степени наводороживания материалов при концентрации λ материальные функции имеют вид:

$$C_{ij}(\lambda)=\int_{-h/2}^{h/2}B_{ij}(\lambda)dz;\ K_{ij}(\lambda)=\int_{-h/2}^{h/2}B_{ij}(\lambda)zdz;\ D_{ij}(\lambda)=\int_{-h/2}^{h/2}B_{ij}(\lambda)z^2dz;$$

где B_{ij} – функции, подлежащие определению из экспериментов по деформированию образцов материала при разных уровнях концентрации водорода λ.

Использование тех или иных определяющих соотношений не приводит к изменению уравнений статико-геометрической природы [2], поэтому, внутренние усилия и моменты оболочки при условии $zk<<1$ подчиняются уравнениям равновесия:

$$M_r,_{rr}-M_\varphi,_r/r+2M_r,_r/r+k\left(N_r+N_\varphi\right)+N_r w,_{rr}=-q;$$
$$N_r,_r+\left(N_r-N_\varphi\right)/r-k\left[M_r,_r+\left(M_r-M_\varphi\right)/r\right]=0. \tag{17}$$

Используя условия равновесия (17), а также выражения для усилий и моментов (16), получим систему двух нелинейных дифференциальных уравнений относительно функций u и w, связанных с уровнем наводороживания λ. Для линеаризации этих уравнений используем двухшаговый метод последовательных возмущений параметров [9, 10], согласно которому запишем выражения для приращений деформаций и кривизн срединной поверхности:

$$\delta e_r=\frac{\partial e_r}{\partial\sigma_r}\delta\sigma_r+\frac{\partial e_r}{\partial\sigma_\varphi}\delta\sigma_\varphi+\frac{\partial e_r}{\partial\lambda}\delta\lambda;\quad \delta e_\varphi=\frac{\partial e_\varphi}{\partial\sigma_\varphi}\delta\sigma_\varphi+\frac{\partial e_\varphi}{\partial\sigma_r}\delta\sigma_r+\frac{\partial e_\varphi}{\partial\lambda}\delta\lambda; \tag{18}$$

$$\delta\varepsilon_r=\delta u,_r-k\delta w+w,_r\delta w,_r;\quad \delta\varepsilon_\varphi=\frac{\delta u}{r}-k\delta w, \tag{19}$$

$$\delta\chi_r=-\delta w,_{rr};\quad \delta\chi_\varphi=-\frac{\delta w,_r}{r}; \tag{20}$$

Зависимости приращений деформаций в точке через приращения деформаций срединной поверхности $\delta\varepsilon_r$ и $\delta\varepsilon_\varphi$ и кривизн срединной поверхности $\delta\chi_r$ и $\delta\chi_\varphi$ представляются следующим образом:

$$\delta e_r = \delta\varepsilon_r + z\delta\chi_r;\ \ \delta e_\varphi = \delta\varepsilon_\varphi + z\delta\chi_\varphi, \tag{21}$$

Используя уравнения (18) – (20), получим выражения, связывающие приращения деформаций и перемещений:

$$\delta e_r = \delta u,_r - k\delta w + w,_r\,\delta w,_r - z\delta w,_{rr};\ \delta e_\varphi = \frac{\delta u}{r} - k\delta w - z\frac{\delta w,_r}{r}. \tag{22}$$

Далее рассматривается вариант задачи, когда процесс воздействия водородосодержащей среды на оболочку завершен и она наводорожена. Поэтому в выражениях приращений деформаций (18) дифференцировать по параметру λ не требуется. Это необходимо, когда процесс наводороживания сопровождается ростом нагрузки, а следовательно – увеличением напряжений. Зависимости приращений усилий и моментов от напряжений имеют вид:

$$\delta N_r = \int_{-h/2}^{h/2}\delta\sigma_r dz;\ \delta N_\varphi = \int_{-h/2}^{h/2}\delta\sigma_\varphi dz;$$

$$\delta M_r = \int_{-h/2}^{h/2}\delta\sigma_r z dz;\ \delta M_\varphi = \int_{-h/2}^{h/2}\delta\sigma_\varphi z dz; \tag{23}$$

где δN_r, δN_φ – приращения усилий в срединной поверхности оболочки, δM_r, δM_φ – приращения моментов.

Используя уравнения (16) и зависимости (23), получим зависимости приращений усилий и моментов от приращений перемещений:

$$\delta N_r = C_{11}(\lambda)(u,_r - k\delta w + w,_r\,\delta w,_r - z\delta w,_{rr}) -$$

$$- K_{11}(\lambda)\delta w,_{rr} + C_{12}(\lambda)(\frac{\delta u}{r} - k\delta w - z\frac{\delta w,_r}{r}) - K_{12}(\lambda)\frac{\delta w,_r}{r},$$

$$\delta N_\varphi = C_{12}(\lambda)(u,_r - k\delta w + w,_r\,\delta w,_r - z\delta w,_{rr}) -$$

$$- K_{12}(\lambda)\delta w,_{rr} + C_{22}(\lambda)(\frac{\delta u}{r} - k\delta w - z\frac{\delta w,_r}{r}) - K_{22}(\lambda)\frac{\delta w,_r}{r},$$

$$\delta M_r = K_{11}(\lambda)(u,_r - k\delta w + w,_r\,\delta w,_r - z\delta w,_{rr}) -$$

$$- D_{11}(\lambda)\frac{\delta w,_r}{r} + K_{11}(\lambda)(\frac{\delta u}{r} - k\delta w) - D_{12}(\lambda)\frac{\delta w,_r}{r},$$

$$\delta M_\varphi = K_{12}(\lambda)(u,_r - k\delta w + w,_r\,\delta w,_r - z\delta w,_{rr}) -$$

$$- D_{12}(\lambda)\delta w,_{rr} + K_{22}(\lambda)(\frac{\delta u}{r} - k\delta w) - D_{22}(\lambda)\frac{\delta w,_r}{r}. \tag{24}$$

Представим в приращениях уравнения равновесия пологой сферической оболочки, пренебрегая членами второго порядка малости и выше:

$$\delta M_r,_{rr} - \delta M_\varphi,_r / r + 2\delta M_r,_r / r + k(\delta N_r + \delta N_\varphi) + \delta N_r w,_{rr} + N_r \delta w,_{rr} = -\delta q,$$

$$\delta N_{r,r} + (\delta N_r - \delta N_\varphi)/r - k[\delta M_r,_r + (\delta M_r - \delta M_\varphi)/r] = 0. \tag{25}$$

Полученную систему разрешающих дифференциальных уравнений в приращениях (25) необходимо дополнить граничными условиями. Так как задача является

осесимметричной, в центре оболочки поворот нормали к срединной поверхности, радиальные перемещения и их приращения будут равны нулю ($w,_r = 0, u = 0, \delta w,_r = 0,$ $\delta u = 0,$). Что касается граничных условий по внешнему контуру оболочки, то они зависят от выбора закрепления. В случае жесткого защемления оболочки по периметру, принимаем радиальные перемещения, их приращения, прогибы и поворот нормали к срединной поверхности равными нулю ($u = 0, w = 0, w,_r = 0, \delta w,_r = 0, \delta u = 0,$).

Подставляя в уравнения равновесия (25) соотношения для приращений усилий и моментов (24), получим систему линеаризованных разрешающих дифференциальных уравнений относительно приращений прогибов и радиальных перемещений:

$$\frac{\delta u}{r}[K_{11}(\lambda)(u,_r - k\delta w + w,_r\,\delta w,_r - z\delta w,_{rr}) - D_{11}(\lambda)\frac{\delta w,_r}{r} + K_{11}(\lambda)(\frac{\delta u}{r} - k\delta w) -$$
$$- D_{12}(\lambda)\frac{\delta w,_r}{r}] - \delta w,_r\,[K_{12}(\lambda)(u,_r - k\delta w + w,_r\,\delta w,_r - z\delta w,_{rr}) - D_{12}(\lambda)\delta w,_{rr} +$$
$$+ K_{22}(\lambda)(\frac{\delta u}{r} - k\delta w) - D_{22}(\lambda)\frac{\delta w,_r}{r}] + 2\frac{\delta u}{r}[K_{11}(\lambda)(u,_r - k\delta w + w,_r\,\delta w,_r - z\delta w,_{rr}) -$$
$$- D_{11}(\lambda)\frac{\delta w,_r}{r} + K_{11}(\lambda)(\frac{\delta u}{r} - k\delta w) - D_{12}(\lambda)\frac{\delta w,_r}{r}] +$$
$$k(C_{11}(\lambda)(u,_r - k\delta w + w,_r\,\delta w,_r - z\delta w,_{rr}) - K_{11}(\lambda)\delta w,_{rr} + C_{12}(\lambda)(\frac{\delta u}{r} - k\delta w - z\frac{\delta w,_r}{r}) -$$
$$- K_{12}(\lambda)\frac{\delta w,_r}{r} + C_{12}(\lambda)(u,_r - k\delta w + w,_r\,\delta w,_r - z\delta w,_{rr}) -$$
$$- K_{12}(\lambda)\delta w,_{rr} + C_{22}(\lambda)(\frac{\delta u}{r} - k\delta w - z\frac{\delta w,_r}{r}) - K_{22}(\lambda)\frac{\delta w,_r}{r}) +$$
$$w,_{rr}\,[C_{11}(\lambda)(u,_r - k\delta w + w,_r\,\delta w,_r - z\delta w,_{rr}) - K_{11}(\lambda)\delta w,_{rr} +$$
$$+ C_{12}(\lambda)(\frac{\delta u}{r} - k\delta w - z\frac{\delta w,_r}{r}) - K_{12}(\lambda)\frac{\delta w,_r}{r}] + \delta w,_{rr}\,[C_{11}(\lambda)(u,_r - k\delta w + w,_r\,\delta w,_r - z\delta w,_{rr}) -$$
$$- K_{11}(\lambda)\delta w,_{rr} + C_{12}(\lambda)(\frac{\delta u}{r} - k\delta w - z\frac{\delta w,_r}{r}) - K_{12}(\lambda)\frac{\delta w,_r}{r}] = -\delta q, \qquad (26)$$

$$\frac{\delta u}{r}[C_{11}(\lambda)(u,_r - k\delta w + w,_r\,\delta w,_r - z\delta w,_{rr}) - K_{11}(\lambda)\delta w,_{rr} + C_{12}(\lambda)(\frac{\delta u}{r} - k\delta w - z\frac{\delta w,_r}{r}) -$$
$$- K_{12}(\lambda)\frac{\delta w,_r}{r}] + (C_{11}(\lambda)(u,_r - k\delta w + w,_r\,\delta w,_r - z\delta w,_{rr}) -$$
$$- K_{11}(\lambda)\delta w,_{rr} + C_{12}(\lambda)(\frac{\delta u}{r} - k\delta w - z\frac{\delta w,_r}{r}) - K_{12}(\lambda)\frac{\delta w,_r}{r} -$$
$$- C_{12}(\lambda)(u,_r - k\delta w + w,_r\,\delta w,_r - z\delta w,_{rr}) - K_{12}(\lambda)\delta w,_{rr} + C_{22}(\lambda)(\frac{\delta u}{r} - k\delta w - z\frac{\delta w,_r}{r}) -$$
$$K_{22}(\lambda)\frac{\delta w,_r}{r}) - k[\frac{\delta u}{r}[K_{11}(\lambda)(u,_r - k\delta w + w,_r\,\delta w,_r - z\delta w,_{rr}) - D_{11}(\lambda)\frac{\delta w,_r}{r} +$$
$$K_{11}(\lambda)(\frac{\delta u}{r} - k\delta w) - D_{12}(\lambda)\frac{\delta w,_r}{r} + (K_{11}(\lambda)(u,_r - k\delta w + w,_r\,\delta w,_r - z\delta w,_{rr}) - \qquad (27)$$

$$-D_{11}(\lambda)\frac{\delta w,_r}{r}+K_{11}(\lambda)(\frac{\delta u}{r}-k\delta w)-D_{12}(\lambda)\frac{\delta w,_r}{r}-K_{12}(\lambda)(u,_r-k\delta w+w,_r\,\delta w,_r-z\delta w,_{rr})-$$

$$-D_{12}(\lambda)\delta w,_{rr}+K_{22}(\lambda)(\frac{\delta u}{r}-k\delta w)-D_{22}(\lambda)\frac{\delta w,_r}{r})]=0\,.$$

При химической адсорбции молекулы водорода в конечном итоге распадаются на атомы, которые затем диффундируют вглубь материала [5, 6]. Плотность потока *J*, т.е. количество вещества, диффундирующего в единицу времени через единицу поверхности, перпендикулярную потоку вещества, пропорциональна пространственному градиенту концентрации λ. Как показал опыт [5], для не слишком больших перепадов концентрации применим так называемый первый закон Фика, согласно которому количество вещества, проходящее через воображаемое сечение, перпендикулярное направлению диффузии, пропорционально величине градиента концентрации в этом сечении, площади сечения и времени диффузии:

$$J=-Dgrad\lambda=-D\frac{\delta\lambda}{\delta z} \tag{28}$$

где *D* - коэффициент диффузии, *z* - координата в направлении диффузии.

В рассматриваемой задаче физически активная среда контактирует с оболочкой только по верхней или нижней поверхности, что приводит к одномерности процесса диффузии.

Для одномерной задачи уравнение (28) переходит в первый закон Фика, имеющий вид:

$$J=-D\delta\lambda,_z\,,$$

Для титановых сплавов коэффициент диффузии не зависит от концентрации, поэтому из первого закона Фика вытекает второй закон в виде:

$$\frac{\partial\lambda(z,t)}{\partial t}=D\frac{\partial^2\lambda(z,t)}{\partial z^2} \tag{29}$$

где *t* – текущее время.

Из уравнения (29) видно, что скорость изменения диффундирования во времени зависит только от одного физического параметра – коэффициента диффузии D. Величина, обратная коэффициенту диффузии, характеризует инерционные свойства тела в отношении распространения поля агрессивной среды [7].

Процесс диффузии водорода в тело подобен явлению теплопроводности. Принятое уравнение идентично дифференциальному уравнению теплопроводности для одномерного потока тепла с той лишь разницей, что в уравнении передачи тепла вместо коэффициента диффузии принимается коэффициент теплопроводности [8].

Для решения уравнения диффузии используем те же методы, что и для температурных задач. Воспользуемся методом разделения переменных, в основе которого лежит процесс нахождения совокупности частных решений, удовлетворяющих уравнению (29) начальными и граничными условиями. Далее рассматривается ряд решений по принципу наложения. Частное решение ищется в виде произведения двух функций, одна из которых зависит только от времени, а другая только от координаты. Для решения задач наводороживания целесообразно применять метод интегрального преобразования Фурье. Кроме этого, можно применять численные методы решения, используя, например, метод конечных разностей [6, 8].

В качестве решения уравнения (29) для процесса односторонней и двухсторонней диффузии примем известные аналитические решения, представленные в работе [9].

Для процесса односторонней диффузии решение имеет вид:

$$\lambda(z,t)=\lambda_1+(\lambda_2-\lambda_1)z/h+(2/\pi)\sum_{i=1}^{\infty}sin(i\cdot\pi\cdot z/h)exp(-F_o\pi^2 i^2)\times$$
$$\times[\lambda_2\,cos(i\cdot\pi)-\lambda_1]/i\,, \qquad (30)$$

где $F_O=Dt/h^2$ – число Фурье; i – число членов ряда; λ_1 и λ_2 – краевые условия для концентрации среды сверху и снизу оболочки; h – толщина оболочки; z – координата точки по толщине оболочки.

Краевые условия представлены следующим образом:

а) при воздействии среды со стороны приложения поперечной силовой нагрузки:

$$\lambda(-h/2,t)=\lambda_\infty=\lambda_1;\ \lambda(+h/2,t)=0=\lambda_2; \qquad (31)$$

б) при воздействии среды со стороны свободной от силового нагружения:

$$\lambda(-h/2,t)=0=\lambda_1;\ \lambda(+h/2,t)=\lambda_\infty=\lambda_2,$$

в) для процесса двухсторонней диффузии:

$$\lambda(-h/2,t)=\lambda_\infty=\lambda_1;\ \lambda(+h/2,t)=\lambda_\infty=\lambda_2.$$

здесь λ_∞ – равновесная концентрация водородосодержащей среды.

Начальные условия имеют вид

$$\lambda(z,0)=0. \qquad (32)$$

Добавив к уравнению (30) начальные (32) и граничные условия (31), получим модель воздействия активной водородосодержащей среды [10, 11].

Результаты исследования и их анализ

Заменив производные конечными разностями в программном комплексе MATLAB полученные разрешающие уравнения, и обработав вычислительный алгоритм, приходим к следующим результатам решения поставленной задачи при процессе односторонней диффузии со стороны приложения поперечной силовой нагрузки, которые приведены на рисунках 2-3.

На рисунке 2 показаны графики зависимости напряжений σ_r и σ_φ по толщине оболочки от степени концентрации агрессивной водородосодержащей среды. Рисунок 3 отражают графики прогибов и горизонтальных перемещений оболочки.

Сравним полученные результаты с результатами И.Г. Овчинникова и Л.А. Кирилловой [7], при получении которых использовались простейшие физические соотношения, в зависимости от степени концентрации λ [7]:

$$\sigma_r=k\frac{\psi}{1-\nu^2}(\varepsilon_r+\nu\varepsilon_\varphi)$$

$$\sigma_\varphi=k\frac{\psi}{1-\nu^2}(\varepsilon_\varphi+\nu\varepsilon_r)$$

$$\psi=\sigma_i/\varepsilon_i$$

где ψ – функция, учитывающая влияние вида и уровня напряжённого состояния, а также водородного воздействия на характер физических соотношений, k – главная кривизна

оболочки**,** σ_i.– интенсивность напряжений, ε_i – интенсивность деформаций, ν – к-т поперечной деформации.

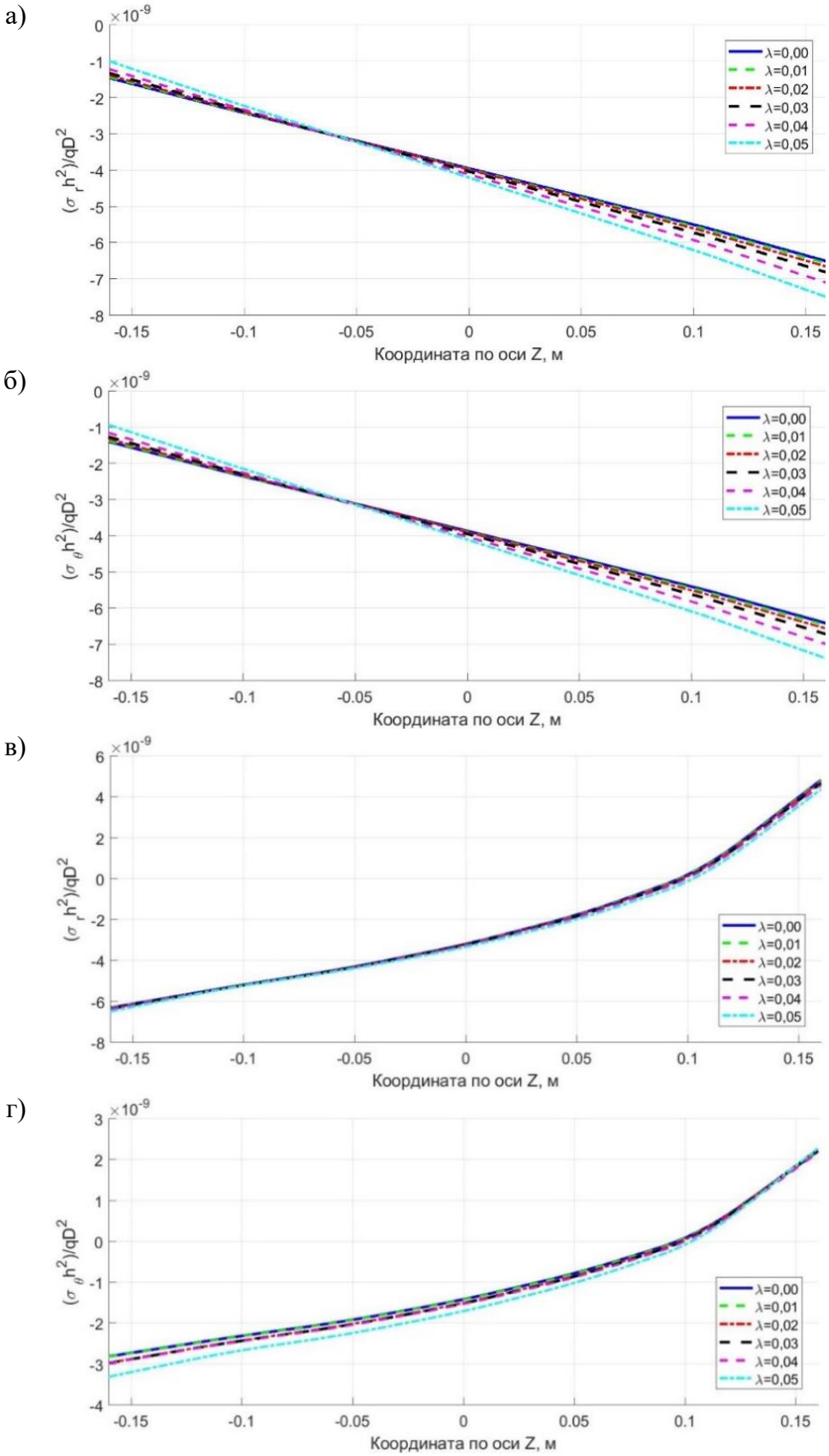
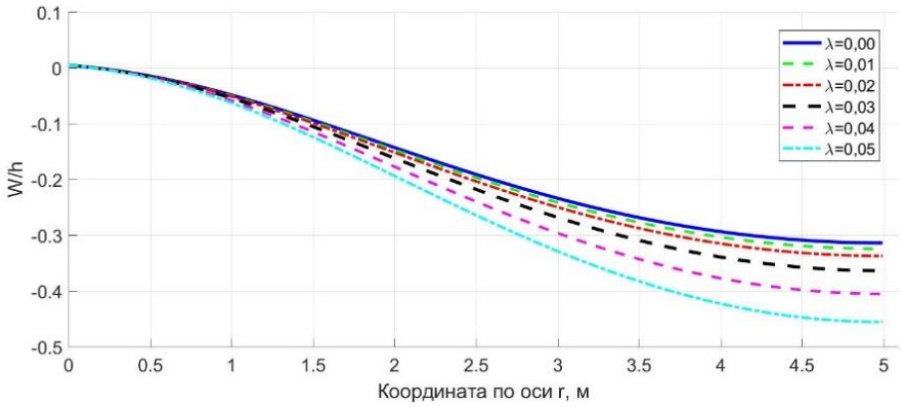


Рисунок 2 – Напряжения (по толщине): а) σ_r в точке 1/2 диаметра оболочки, б) σ_φ в точке 1/2 диаметра оболочки, в) σ_r в точке края оболочки, г) $\sigma\varphi$ в точке края оболочки

а)



б)

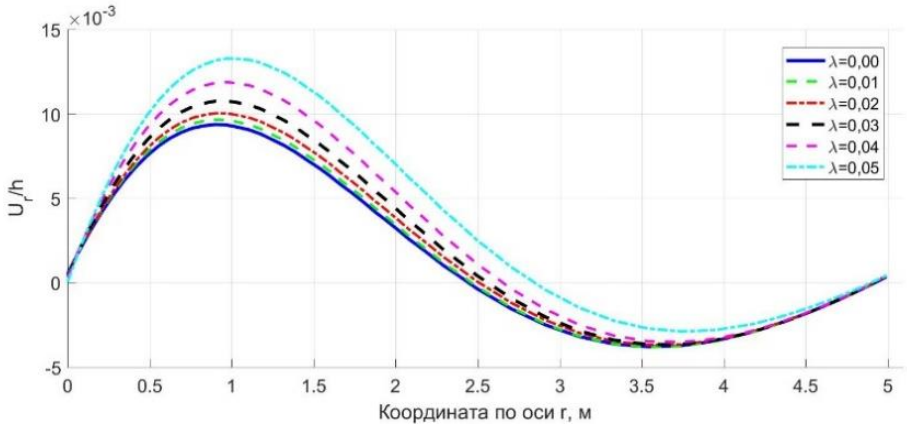


Рисунок 3 – Перемещения: а) прогибы W/h, б) горизонтальные вдоль радиуса U/h

Считая, что влияние среды не приводит к изменению вида уравнений состояния, а меняются лишь коэффициенты, которые становятся функциями параметров λ, ε, авторы [6-8] представляют диаграмму деформирования $\sigma - \varepsilon$ в виде:

$$\sigma_i = A\varepsilon_i - B(\lambda, \varepsilon_i)E^{m(\lambda,\varepsilon)};$$

где $\sigma_i = (\sigma_r^2 - \sigma_r\sigma_\varphi + \sigma_\varphi^2)^{1/2}$; $\varepsilon_i = \mu_1(\varepsilon_r^2 - \mu_2\varepsilon_r\varepsilon_\varphi + \varepsilon_\varphi^2)^{1/2}$;

$$\psi = (\lambda, \varepsilon) = \begin{cases} \psi^+ = A_0 - B(\lambda)\varepsilon_i^{m(\lambda)-1}, \varepsilon \geq \varepsilon_0 \\ \psi^- = A_0 - B_0\varepsilon_i^{m_0-1}, \varepsilon < \varepsilon_0 \end{cases}$$

ε_0 –критическое значение деформации при насыщении водородом; *A, B, A₀, B₀, m, m₀* – константы, определяемые по экспериментальным диаграммам деформирования, которые аппроксимируется функцией

$$\sigma_i = A\varepsilon_i^m - B\varepsilon_i^n,$$

где $\mu_1 = (1 - \nu + \nu^2)^{1/2}/(1 - \nu^2)$; $\mu_2 = 3\nu/(1 - \nu + \nu^2) - 1$.

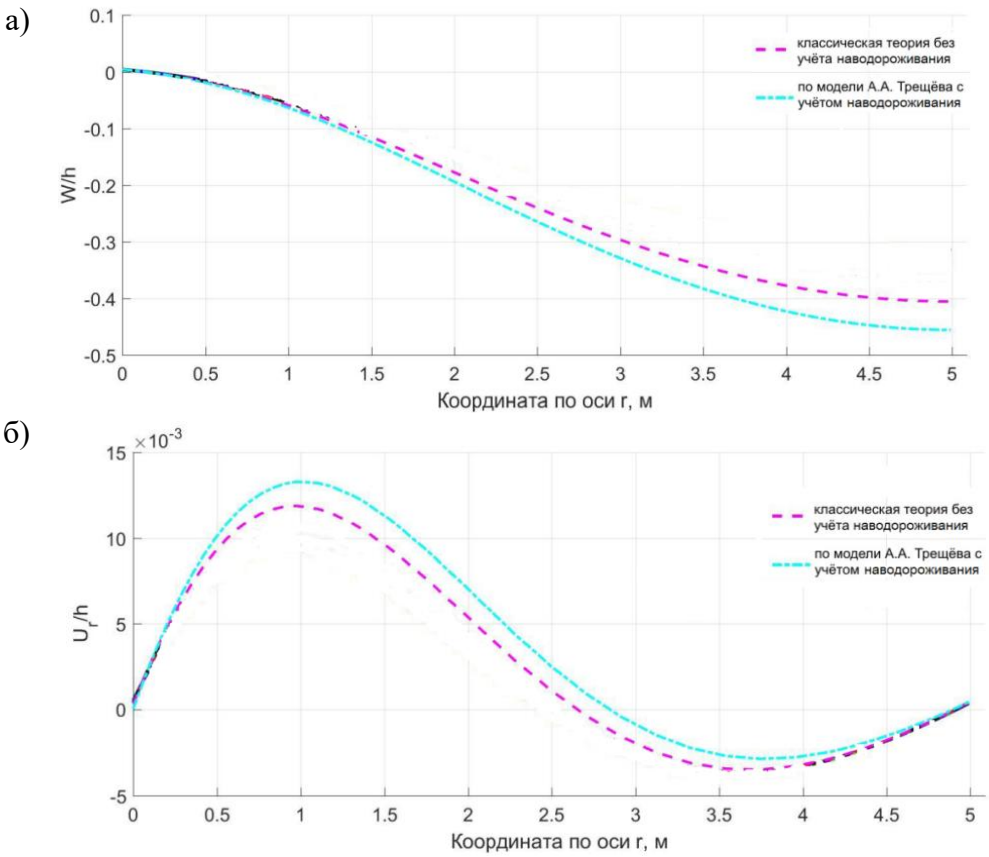


Рисунок 4 – Перемещения: а) прогибы W/h, б) горизонтальные вдоль радиуса U/h

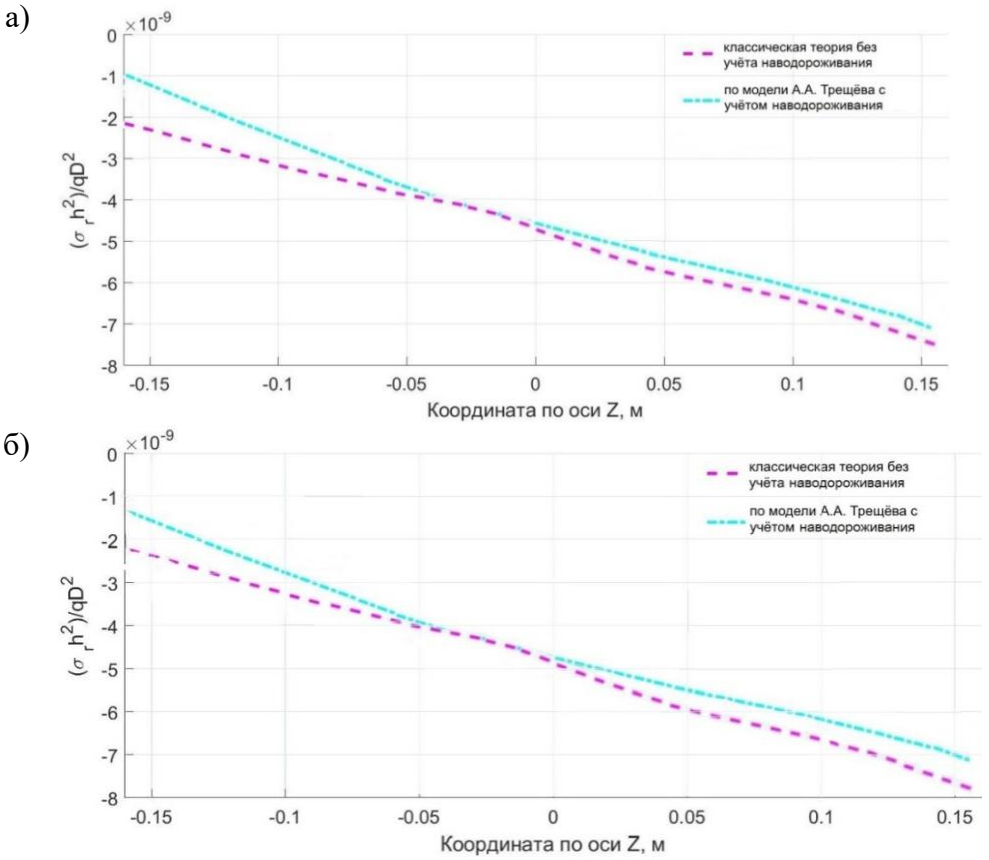


Рисунок 5 – Напряжения в точке 1/2 диаметра оболочки (по толщине): а) σ_r, б) σ_θ

Сравнивая в программном комплексе MATLAB полученные решения по разработанной модели [10-12] с результатами по теории И.Г. Овчинникова [6-8], можно произвести следующий анализ: результаты отличаются из-за того, что в теории И.Г. Овчинникова не учитывается влияние наводороживания при разных сложных видах напряжённого состояния.

На рисунках 4 показано, что расхождение в значениях максимальных прогибов и перемещений с учетом и без учета наводороживания значительное и составляет 16,5 %, напряжений – до 50%, что не допустимо, так как превышает предельное значение погрешности для строительных конструкций, равное 5% (см. рис. 4, 5).

Учет зависимости деформационных и прочностных характеристик от степени насыщения водородом вносит значительные поправки в результаты определения напряжённо-деформированного состояния сферических оболочек из титановых сплавов, а поэтому необходим для получения достоверных результатов расчета.

Выводы

Многочисленные экспериментальные исследования свидетельствуют о том, что воздействие водорода на ряд конструкционных материалов приводит к появлению в них наведенной неоднородности и разносопротивляемости, меняющейся с течением времени. Это обусловливает необходимость разработки новых моделей, описывающих напряженно-деформированное состояние тел, с учетом наведенной чувствительности свойств материалов к наводороживанию в широком диапазоне изменения видов напряжённого состояния.

Учет воздействия водородосодержащей среды в данной работе был построен на основе нелинейных определяющих соотношений, учитывающих наведённую чувствительность к наводороживанию в широком диапазоне изменения видов напряжённого состояния [10-12].

В данной работе произведено построение математической модели влияния наводороживания на НДС пологой сферической оболочки и приведено численное решение задачи с иллюстрацией прогибов, перемещений и напряжений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Астафьев В.И., Ширяева Л.К. Накопление повреждённости и коррозионное растрескивание металлов под напряжением. Самара: Изд-во Самарский университет, 1998. 123 с.

2. Баландин П.П. К вопросу о гипотезах прочности // Вестник инженеров и техников. 1937. №1. С. 37-41.

3. Гервиц Г.Я. Влияние газонасыщения на статическую прочность титановых сплавов // ФХММ. 1981. №2. С. 45-48.

4. Кириллова Л.А. Напряженно-деформированное состояние гибкой круглой пластины в водородосодержащей среде с учетом наведенной неоднородности. Дисс. к.т.н. Саратов, 1990. 163 с.

5. Колачев Б.А., Ливанов В.А., Буханова Л.А. Механические свойства титана и его сплавов. М.: Металлургия, 1974. 544 с.

6. Маркин А.А. К обоснованию теории оболочек // Работы по механике деформируемых сред. Тула: ТПИ. 1974. С. 121-129.

7. Овчинников И.И., Овчинников И.Г., ЧэньТао, Успанов А.М. Анализ экспериментальных данных по кинетике проникания сульфатосодержащих сред в железобетонные конструкции и влиянию их на механические характеристики компонентов железобетона. Часть 1. Эксперименты по изучению кинетики проникания // Интернет-журнал «Науковедение». Том 8, № 1 (2016). 14 с.

8. Овчинников И.Г., Кириллова Л.А. О деформировании гибкой круглой пластины из материала, чувствительного к водородному воздействию. Саратов, 1989. 15 с. Рукопись деп. в ВИНИТИ 7 февраля 1990, № 698 – В90.

9. Овчинников И.Г. Модифицированная модель деформирования и разрушения материала, подвергающегося облучению // Строительная механика и расчёт сооружений. 2014. №1. С. 29-35.

10. Овчинников И.Г., Рассада А.Б. Анализ экспериментальных данных по влиянию водорода при нормальных температурах на механические свойства металлов и сплавов и построению модели взаимодействия

конструктивных элементов с водородом. Ч.1. Проблема воздействия водорода на металлы и пути ее решения. Закономерности проникания водорода в конструктивные элементы. Саратов: Сарат. политехн. ин-т., 1989. 28 с.

11. Петров В.В., Иноземцев В.К., Синева Н.Ф. Теория наведенной неоднородности и ее приложения к проблеме устойчивости пластин и оболочек. Саратов: Сарат. госуд. технич. ун - т, 1996. 311 с.

12. Петров В.В., Кривошеин И.В. Методы расчёта конструкций из нелинейно-деформируемого материала. М.: Издательство Ассоциации строительных вузов, 2009. 208 с.

13. Трещев А.А. Теория деформирования и прочности материалов с изначальной и наведенной чувствительностью к виду напряженного состояния. Определяющие соотношения. М.; Тула: РААСН; ТулГУ, 2016. 236 с.

14. Сергеева С.Б., Трещев А.А. Расчет круглых пластин, выполненных из титановых сплавов, подверженных совместному воздействию нагрузки и водородосодержащей среды // Изв. ТулГУ. Серия: математика, механика, информатика. 2001. Т. 7. Вып. 2. С. 167 – 172.

15. Jones R.M., Nelson D.A.R. Material for nonlinear Deformation // AIAAJournal. 1976. Vol. 14. № 6. Pp. 709–716.

16. Maekawa K., Ishida T. Modeling of structural performances under coupled environmental and weather actions // Materials and Structures. 2002. № 35. Pp. 28 – 42.

17. Tabaddor F. Constitutive Equations for Bimodulus Elastic Materials // AIAA Journal. 1972. Vol. 10. № 4. Pp. 516-518.

REFERENCES

1. Astaf'yev V.I., Shiryayeva L.K. Nakopleniye povrezhdonnosti i korrozionnoye rastreskivaniye metallov pod napryazheniyem [Accumulation of damage and stress corrosion cracking of metals]. Samara: Publishing of Samara University, 1998. 123 p.

2. Balandin P.P. K voprosu o gipotezakh prochnosti [To the question of strength hypotheses]. *Vestnik inzhenerov i tekhnikov*. 1937. No 1. Pp. 37-41.

3. Gervits G.YA. Vliyaniye gazonacyshcheniya na staticheskuyu prochnost' titanovykh splavov [The effect of gas saturation on the static strength of titanium alloys]. *FKHMM*. 1981. No 2. Pp. 45-48.

4. Kirillova L.A. Napryazhenno-deformirovannoye sostoyaniye gibkoy krugloy plastiny v vodorodosoderzhashchey srede s uchetom navedennoy neodnorodnosti [The stress-strain state of a flexible round plate in a hydrogen-containing medium, taking into account the induced inhomogeneity]. Dissertation Candidate of Tech. Science. Saratov, 1990. 163 p.

5. Kolachev B.A., Livanov V.A., Bukhanova L.A. Mekhanicheskiye svoystva titana i yego splavov [Mechanical properties of titanium and its alloys]. Moscow: Metallurgiya, 1974. 544 p.

6. Markin A.A. K obosnovaniyu teorii obolochek [To the substantiation of the theory of shells]. *Raboty po mekhanike deformiruyemykh sred*. Tula: TPI. 1974. Pp. 121-129.

7. Ovchinnikov I.I., Ovchinnikov I.G., Chen'Tao, Uspanov A.M. Analiz eksperimental'nykh dannykh po kinetike pronikaniya sul'fatosoderzhashchikh sred v zhelezobetonnyye konstruktsii i vliyaniyu ikh na mekhaniche-skiye kharakteristiki komponentov zhelezobetona. Chast' 1. Eksperimenty po izucheniyu kinetiki pronikaniya [Analysis of experimental data on the kinetics of the penetration of sulfate-containing media into reinforced concrete structures and their influence on the mechanical characteristics of reinforced concrete components. Part 1. Experiments on the study of penetration kinetics]. *Internet-zhurnal "Naukovedeniye"*. 2016. Vol. 8. No 1. 14 p.

8. Ovchinnikov I.G., Kirillova L.A. O deformirovanii gibkoy krugloy plastiny iz materiala, chuv-stvitel'nogo k vodorodnomu vozdeystviyu [On the deformation of a flexible round plate made of a material sensitive to hydrogen exposure]. Saratov, 1989. 15 p. Paper dep. in VINITI February 7, 1990, No. 698 - B90.

9. Ovchinnikov I.G. Modifitsirovannaya model' deformirovaniya i razrusheniya materiala, podvergayushchegosya oblucheniyu [A modified model of deformation and fracture of a material exposed to irradiation]. *Stroitel'naya mekhanika i raschot sooruzheniy*. 2014. No 1. Pp. 29-35.

10. Ovchinnikov I.G., Rassada A.B. Analiz eksperimental'nykh dannykh po vliyaniyu vodoroda pri normal'nykh temperaturakh na mekhanicheskiye svoystva metallov i splavov i postroyeniyu modeli vzaimodeystviya konstruktivnykh elementov s vodorodom. CH.1. Problema vozdeystviya vodoroda na metally i puti yeye resheniya. Zakonomernosti pronikaniya vodoroda v konstruktivnyye elementy [Analysis of experimental data on the effect of hydrogen at normal temperatures on the mechanical properties of metals and alloys and the construction of a model for the interaction of structural elements with hydrogen. Part 1. The problem of the effect of hydrogen on metals and ways to solve it. Patterns of hydrogen penetration into structural elements]. Saratov: Sarat. politekhn. institute, 1989. 28 p.

11. Petrov V.V., Inozemtsev V.K., Sineva N.F. Teoriya navedennoy neodnorodnosti i yeye prilozheniya k probleme ustoychivosti plastin i obolochek [The theory of induced heterogeneity and its applications to the problem of stability of plates and shells]. Saratov: Sarat. gosud. tekhnich. universitet, 1996. 311 p.