УДК 624.072.225 DOI: 10.33979/2073-7416-2019-85-5-11-16

ОЦЕНКА ВЕРОЯТНОСТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ПЛОТНОСТИ ВЕРОЯТНОСТИ ПРЕДЕЛЬНОЙ ПОПЕРЕЧНОЙ СИЛЫ В ИЗГИБАЕМЫХ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ ЭЛЕМЕНТАХ

ДЁМИНОВ П.Д.
Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, г. Москва, Россия

Аннотация. *Прочностные параметры, определяющие предельную несущую изгибаемого железобетонного элемента по наклонному сечению от действия поперечной силы, носят явный случайный характер. Для того чтобы построить плотность распределения вероятности предельной поперечной силы, нужно найти параметры этого распределения. Если предположить, что распределение предельной поперечной силы близко к гауссовому закону, то достаточно знать математическое ожидание и дисперсию этого распределения плотности вероятности. Построены вероятностные характеристики предельной поперечной силы в железобетонном изгибаемом элементе. Предельная поперечная сила является нелинейной функцией прочности бетона и арматуры, которые рассматриваются как случайные нормально распределенные величины. Показано, что нелинейная функция предельной поперечной силы может быть линеаризована путем разложения в ряд Тейлора в окрестностях математических ожиданий прочности бетона на растяжение и предела текучести арматуры с достаточной для практических расчетов точностью. Плотность распределения предельной поперечной силы при этом можно считать подчиняющейся нормальному закону.*

Ключевые слова: *математическое ожидание, дисперсия, предельная поперечная сила, плотность распределения вероятности, железобетонный элемент.*

ESTIMATION OF THE PROBABILISTIC CHARACTERISTICS OF THE PROBABILITY DENSITY OF THE ULTIMATE TRANSVERSE FORCE IN BENDING CONCRETE ELEMENTS

DEMINOV P.D.
National Research Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russia

Abstract. *Strength parameters that determine the ultimate load-bearing of a bent reinforced concrete element along an oblique section from the action of a transverse force are clearly random. In order to construct the probability density distribution of the ultimate transverse force, it is necessary to find the parameters of this distribution. If we assume that the distribution of the ultimate transverse force is close to the Gaussian law, then it suffices to know the mathematical expectation and variance of this probability density distribution. The probabilistic characteristics of the ultimate transverse force in a reinforced concrete bending element are constructed. The ultimate transverse force is a nonlinear function of the strength of concrete and reinforcement, which are considered as random, normally distributed quantities. It is shown that the nonlinear function of the ultimate transverse force can be linearized by expanding in a Taylor series near the mathematical expectations of the tensile strength of concrete and the yield strength of the reinforcement with sufficient accuracy for practical calculations. The distribution density of the ultimate transverse force in this case can be considered obeying the normal law.*

Keywords: *expected value, dispersion, ultimate transverse force, probability density, reinforced concrete element.*

Введение

Для обеспечения надёжной и безопасной работы железобетонных конструкций необходимо знать распределения параметров, необходимые для оценки несущей способности. В ряде работ представлены подходы для определения надёжности и риска [1-4].

В работе [5] были получены статистические характеристики распределения предельных изгибающих моментов в железобетонной балке со случайными прочностными характеристиками материалов; в данной работе рассмотрены вероятностные характеристики распределения предельной поперечной силы.

Прочностные параметры, определяющие предельную несущую изгибаемого железобетонного элемента по наклонному сечению от действия поперечной силы, носят явный случайный характер. Для того чтобы построить плотность распределения вероятности предельной поперечной силы, нужно найти параметры этого распределения. Если предположить, что распределение предельной поперечной силы близко к гауссовому закону, то достаточно знать математическое ожидание и дисперсию этого распределения плотности вероятности.

Методика

Из условия равновесия железобетонного изгибаемого элемента в сечении с наклонной трещиной, имеющей проекцию с наименьшей несущей способностью, получаем несущую способность изгибаемого элемента по поперечной силе, обеспечиваемую сопротивлением бетона сжатой зоны и сопротивлением хомутов, пересекаемых трещиной, в виде:

$$Q_{sw} = 2\sqrt{\frac{\varphi_b b h_0^2 \tilde{R}_{bt} \varphi_{sw} R_{sw} A_{sw}}{s_w}}, \quad (1)$$

где $\varphi_b = 1{,}5$, φ_{sw}= 0,75 - коэффициенты, если походить строго, являющиеся случайными величинами, чем в дальнейших выкладках мы пренебрежём, чтобы упростить расчётный аппарат, и будем считать их детерминированными величинами; остальные обозначения в (1) и далее соответствуют [6].

Несущая способность железобетонного изгибаемого элемента является функцией двух случайных нормально распределённых аргументов: прочности бетона на растяжения $\tilde{R}_{bt}$ с математическим ожиданием $< R_{bt} >$ и дисперсией $D_{R_{bt}}$ и прочности арматуры хомутов $\tilde{R}_{sw} = \gamma_{s1}\tilde{\sigma}_{т}$ с математическим ожиданием предела текучести арматуры $< \sigma_{т} >$ и его дисперсией $D_{\sigma_{т}}$.

Перепишем выражение (1) следующим образом:

$$Q_{sw}(\tilde{R}_{bt}, \tilde{\sigma}_{т}) = 2\sqrt{\frac{\varphi_b b h_0^2 \tilde{R}_{bt} \gamma_{s1} \tilde{\sigma}_{т} \varphi_{sw} A_{sw}}{s_w}}, \quad (2)$$

Как видно из выражения (2) зависимость несущей способности железобетонного элемента по наклонному сечению от прочностей бетона и арматуры носит нелинейный характер. Для того чтобы найти вероятностные характеристики нелинейной функции двух случайных переменных $f(x, y)$, воспользуемся линеаризацией этой функции путём разложения её в ряд Тейлора [7] в окрестности некоторой точки x_0, y_0, тогда в операторной форме без учета остаточного члена разложение запишется в виде [8]:

$$f(x, y) \approx \sum_{k=0}^{n} \frac{T^{\{k\}} f(x_0, y_0)}{k!}, \quad (3)$$

где T – дифференциальный оператор вида

$$T = (x - x_0)\frac{\partial}{\partial x} + (y - y_0)\frac{\partial}{\partial y}. \qquad (4)$$

В нашем случае будем линеаризовать функцию предельной поперечной силы $Q_{sw}(\tilde{R}_{bt}, \tilde{\sigma}_{\text{т}})$ в окрестностях математических ожиданий прочностей бетона и арматуры, сохраняя в разложении (3) члены не выше второго порядка:

$$\begin{gathered} Q_{sw} \approx Q_{sw}(<R_{bt}>, <\sigma_{\text{т}}>) + \\ + \frac{\partial Q_{sw}(<R_{bt}>, <\sigma_{\text{т}}>)}{\partial R_{bt}}(R_{bt} - <R_{bt}>) + \frac{\partial Q_{sw}(<R_{bt}>, <\sigma_{\text{т}}>)}{\partial \sigma_T}(\sigma_{\text{т}} - <\sigma_{\text{т}}>) + \\ + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 Q_{sw}(<R_{bt}>, <\sigma_{\text{т}}>)}{\partial R_{bt}^2}(R_{bt} - <R_{bt}>)^2 + \frac{\partial^2 Q_{sw}(<R_{bt}>, <\sigma_{\text{т}}>)}{\partial \sigma_{\text{т}}^2}(\sigma_{\text{т}} - <\sigma_{\text{т}}>)^2\right] + \\ + \frac{\partial^2 Q_{sw}(<R_{bt}>, <\sigma_{\text{т}}>)}{\partial R_{bt}\partial \sigma_{\text{т}}}(R_{bt} - <R_{bt}>)(\sigma_{\text{т}} - <\sigma_{\text{т}}>). \qquad (5) \end{gathered}$$

Применив способы определения числовых характеристик линейных функций [9], для математического ожидания предельной поперечной силы будем иметь:

$$\begin{gathered} <Q_{sw}> \approx Q_{sw}(<R_{bt}>, <\sigma_{\text{т}}>) + \\ + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 Q_{sw}(<R_{bt}>, <\sigma_{\text{т}}>)}{\partial R_{bt}^2}D_{R_{bt}} + \frac{\partial^2 Q_{sw}(<R_{bt}>, <\sigma_{\text{т}}>)}{\partial \sigma_{\text{т}}^2}D_{\sigma_{\text{т}}}\right] + \\ + \frac{\partial^2 Q_{sw}(<R_{bt}>, <\sigma_{\text{т}}>)}{\partial R_{bt}\partial \sigma_{\text{т}}}K_{R_b\sigma_{\text{т}}}. \qquad (6) \end{gathered}$$

Здесь $K_{R_b\sigma_{\text{т}}}$ – корреляционный момент случайных величин $\tilde{R}_{bt}$ и $\tilde{R}_{sw}$; т.к. прочность бетона и прочность арматуры являются не только некоррелированными случайными величинами, но и независимыми, то в дальнейшем принимаем $K_{R_b\sigma_{\text{т}}} = 0$.

Подставляя в уравнение (6) функцию поперечной силы (2), получаем для математического ожидания предельной поперечной силы:

$$\begin{gathered} <Q_{sw}> \approx 2\sqrt{\frac{\varphi_b b h_0^2 <R_{bt}> \gamma_{s1} <\sigma_{\text{т}}> \varphi_{sw} A_{sw}}{s_w}} - \\ - \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\varphi_b b h_0^2 \varphi_{sw} A_{sw}}{s_w}}\left(\sqrt{\frac{\gamma_{s1} <\sigma_{\text{т}}>}{<R_{bt}>^3}}D_{R_{bt}} + \sqrt{\frac{<R_{bt}>}{\gamma_{s1} <\sigma_{\text{т}}>^3}}D_{\sigma_{\text{т}}}\right). \qquad (7) \end{gathered}$$

Дисперсия предельной поперечной силы запишется в виде:

$$\begin{gathered} D_{Q_{sw}} \approx \left[\frac{\partial Q_{sw}(<R_{bt}>, <\sigma_{\text{т}}>)}{\partial R_{bt}}\right]^2 D_{R_{bt}} + \left[\frac{\partial Q_{sw}(<R_{bt}>, <\sigma_{\text{т}}>)}{\partial \sigma_{\text{т}}}\right]^2 D_{\sigma_{\text{т}}} + \\ + \frac{1}{4}\left\{\left[\frac{\partial^2 Q_{sw}(<R_{bt}>, <\sigma_{\text{т}}>)}{\partial R_{bt}^2}\right]^2 \left[\mu_4(R_{bt}) - D_{R_{bt}}\right] + \right. \\ \left. + \left[\frac{\partial^2 Q_{sw}(<R_{bt}>, <\sigma_{\text{т}}>)}{\partial \sigma_{\text{т}}^2}\right]^2 \left[\mu_4(\sigma_{\text{т}}) - D_{\sigma_{\text{т}}}\right]\right\} + \left[\frac{\partial^2 Q_{sw}(<R_{bt}>, <\sigma_{\text{т}}>)}{\partial R_{bt}\partial \sigma_{\text{т}}}\right]^2 D_{R_{bt}} D_{\sigma_{\text{т}}} + \\ + \frac{\partial Q_{sw}(<R_{bt}>, <\sigma_{\text{т}}>)}{\partial R_{bt}} \cdot \frac{\partial^2 Q_{sw}(<R_{bt}>, <\sigma_{\text{т}}>)}{\partial {R_{bt}}^2}\mu_3(R_{bt}) + \\ + \frac{\partial Q_{sw}(<R_{bt}>, <\sigma_{\text{т}}>)}{\partial \sigma_{\text{т}}} \cdot \frac{\partial^2 Q_{sw}(<R_{bt}>, <\sigma_{\text{т}}>)}{\partial {\sigma_{\text{т}}}^2}\mu_3(\sigma_{\text{т}}), \qquad (8) \end{gathered}$$

где $\mu_3(R_{bt})$, $\mu_3(\sigma_т)$ и $\mu_4(R_{bt})$, $\mu_4(\sigma_т)$ – третий и четвертый центральные моменты случайных величин – прочности бетона на растяжения $\tilde{R}_{bt}$ и предела текучести арматуры $\tilde{\sigma}_т$.

Учитывая, что $\tilde{R}_{bt}$ и $\tilde{\sigma}_т$ распределены нормально, то третьи центральные моменты будут равны нулю:

$$\mu_3(R_{bt}) = \mu_3(\sigma_т) = 0, \tag{9}$$

а четвертые центральные моменты будут равны:

$$\mu_4(R_{bt}) = 3D_{R_{bt}} \text{ и } \mu_4(\sigma_т) = 3D_{\sigma_т}. \tag{10}$$

Подставляя выражения (9) и (10) в выражение (8) получаем после несложных упрощений дисперсию предельной поперечной силы в следующем виде:

$$D_{Q_{sw}} \approx \left[\frac{\partial Q_{sw}(<R_{bt}>,<\sigma_т>)}{\partial R_{bt}}\right]^2 D_{R_{bt}} + \left[\frac{\partial Q_{sw}(<R_{bt}>,<\sigma_т>)}{\partial \sigma_т}\right]^2 D_{\sigma_т} +$$
$$+\frac{1}{2}\left\{\left[\frac{\partial^2 Q_{sw}(<R_{bt}>,<\sigma_т>)}{\partial R_{bt}^2}\right]^2 D_{R_{bt}}{}^2 +\right.$$
$$\left.+\left[\frac{\partial^2 Q_{sw}(<R_{bt}>,<\sigma_т>)}{\partial \sigma_т^2}\right]^2 D_{\sigma_т}{}^2\right\} + \left[\frac{\partial^2 Q_{sw}(<R_{bt}>,<\sigma_т>)}{\partial R_{bt}\partial \sigma_т}\right]^2 D_{R_{bt}} D_{\sigma_т}. \tag{11}$$

Подставляя в выражение (11) выражение для поперечной силы (2), получаем для дисперсии предельной поперечной силы следующее выражение:

$$D_{Q_{sw}} \approx \frac{\varphi_b b h_0^2 A_{sw}\gamma_{s1}\varphi_{sw}}{s_w}\left[\frac{<\sigma_т>}{<R_{bt}>}D_{R_{bt}} + \frac{<R_{bt}>}{<\sigma_т>}D_{\sigma_т} +\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}\left(\frac{<\sigma_т>}{<R_{bt}>^3}D_{R_{bt}}{}^2 + \frac{<R_{bt}>}{<\sigma_т>^3}D_{\sigma_т}{}^2\right) + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{<R_{bt}><\sigma_т>}D_{R_{bt}}D_{\sigma_т}\right]. \tag{12}$$

Оценим влияние нелинейных членов в выражениях (7) и (12) на точность вычисления математического ожидания и дисперсии предельной поперечной силы.

Действующие нормативные документы допускают принимать прочность бетона и арматуры, распределёнными по нормальному закону. Тогда, как показано в [10], математические ожидания $<R_{bt}>$, $<\sigma_т>$, дисперсии $D_{R_{bt}}$, $D_{\sigma_т}$, коэффициенты вариации $\nu_{R_{bt}}$, $\nu_{\sigma_т}$ прочности бетона на растяжение и предела текучести арматуры можно записать в следующем виде:

$$<R_{bt}> = R_{bt,n}\frac{\gamma_{R_{bt}}^p - \dfrac{\gamma_{R_{bt}}^n}{\gamma_{bt}}}{\gamma_{R_{bt}}^p - \gamma_{R_{bt}}^n}, \qquad D_{R_{bt}} = \left(R_{bt,n}\frac{1-\dfrac{1}{\gamma_{bt}}}{\gamma_{R_{bt}}^p - \gamma_{R_{bt}}^n}\right)^2,$$

$$<\sigma_т> = R_{sn}\frac{\gamma_{\sigma_т}^p - \dfrac{\gamma_{\sigma_т}^n}{\gamma_s}}{\gamma_{\sigma_т}^p - \gamma_{\sigma_т}^n}, \qquad D_{\sigma_т} = \left(R_{sn}\frac{1-\dfrac{1}{\gamma_s}}{\gamma_{\sigma_т}^p - \gamma_{\sigma_т}^n}\right)^2,$$

$$\nu_{R_{bt}} = \frac{1-\dfrac{1}{\gamma_{bt}}}{\gamma_{R_{bt}}^p - \dfrac{\gamma_R^n}{\gamma_{bt}}}, \qquad \nu_{\sigma_т} = \frac{1-\dfrac{1}{\gamma_s}}{\gamma_{\sigma_т}^p - \dfrac{\gamma_{\sigma_т}^n}{\gamma_s}}, \tag{11}$$

где $R_{bt,n}$, $R_{s,n}$ – нормативное значение кубиковой прочности бетона и нормативное сопротивление арматуры;

$\gamma_{R_{bt}}^{n}, \gamma_{R_{bt}}^{p}, \gamma_{\sigma_т}^{n}, \gamma_{\sigma_т}^{p},$ – число средних квадратических отклонений кубиковой прочности бетона и предела текучести арматуры, позволяющих достичь требуемых обеспеченностей нормативных и расчетных значений прочностей. Для нормального распределения вероятностей для нормативных значений прочностных характеристик $\gamma_{R_{bt}}^{n} = \gamma_{\sigma_т}^{n} = 1{,}645$, а для расчетных значений $\gamma_{R_{bt}}^{p} = \gamma_{\sigma_т}^{p} = 3$;

γ_{bt}, γ_s - коэффициенты надёжности по бетону и арматуре, они принимаются в соответствии с действующими нормативными документами [5].

Для примера рассмотрим железобетонную балку размером $b = 0{,}2$ м, $h_0 = 0{,}365$ м, $A_{sw} = 0{,}566 \cdot 10^{-4}$м^2, $s_w = 0{,}15$ м, $a_1 = 1{,}5$; бетон В20 с $R_{bt,n} = 1{,}35$ МПа, $\gamma_{bt} = 1{,}3$, $< R_{bt} >= 1{,}76$ МПа, $D_{R_{bt}} = 0{,}058$ МПа^2; арматура А300 с $R_{sn} = 300$ МПа, $\gamma_{s1} = 0{,}8$, $\gamma_s = 1{,}1$, $< \sigma_т >= 341{,}9$ МПа, $D_{\sigma_т} = 403$ МПа^2. Тогда для линейного члена математического ожидания предельной поперечной силы имеем $< Q_{sw} > = 128$ кН, нелинейные члены равны 0,419 кН, что составляет 0,33%. Для дисперсии предельной поперечной силы имеем: только линейные члены равны $D_{Q_{sw}} = 133$ кН^2, нелинейные члены равны 1,15 кН^2, что составляет 0,86%.

Таким образом, для практических целей нелинейными членами разложения можно пренебречь и оставить только линейные члены ряда Тейлора, тогда математическое ожидание предельной поперечной силы приобретает вид:

$$< Q_{sw} >= 2\sqrt{\frac{\varphi_b b h_0^2 < R_{bt} > \gamma_{s1} < \sigma_т > \varphi_{sw} A_{sw}}{s_w}}, \tag{12}$$

а дисперсия предельной поперечной силы будет иметь вид:

$$D_{Q_{sw}} = \frac{\varphi_b b h_0^2 \gamma_{s1} \varphi_{sw} A_{sw}}{s_w}\left(\frac{< \sigma_т >}{< R_{bt} >} D_{R_{bt}} + \frac{< R_{bt} >}{< \sigma_т >} D_{\sigma_т}\right). \tag{13}$$

Учитывая, что для любой линейной функции случайных аргументов, имеющих нормальные распределения, на выходе получается случайная величина, распределённая тоже нормально, то после линеаризации плотность распределения предельной поперечной силы в изгибаемом элементе можно принять гауссовой и записать в виде:

$$p_{Q_{sw}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi D_{Q_{sw}}}} exp\left[-\frac{(Q_{sw} - < Q_{sw} >)^2}{2D_{Q_{sw}}}\right]. \tag{14}$$

Выводы

Получены статистические параметры распределения предельной поперечной силы в изгибаемом железобетонном элементе, прочности бетона и арматуры которой являются случайными величинами. Показано, что функцию предельной поперечной силы в изгибаемом железобетонном элементе можно линеаризировать без ущерба для точности вероятностных расчетов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тамразян А.Г., Фаликман В.Р. Основные требования к проектированию железобетонных конструкций по модельному кодексу ФИБ // Строительство и реконструкция. 2016. № 3 (65). С. 71-77.

2. Тамразян А.Г. Оценка риска и надежности несущих конструкций и ключевых элементов - необходимое условие безопасности зданий и сооружений // Вестник ЦНИИСК им. В.А. Кучеренко "Исследования по теории сооружений". 2009. № 1. С. 160-171.

3. Тамразян А. Г. [и др.] Снижение рисков в строительстве при чрезвычайных ситуациях природного и техногенного характера. под общ. ред. Тамразяна А. Г. М.: Издательство АСВ, 2012. 304 с.

4. Тамразян А.Г. Расчет элементов конструкций при заданной надежности и нормальном распределении нагрузки и несущей способности // Вестник МГСУ. 2012. № 10. С. 109-115.

5. Деминов П.Д. К оценке статистических параметров железобетонной балки на упругом основании, имеющем стохастические характеристики // Строительство и реконструкция. № 5. 2018. С. 5-12.

6. СП 52-101-2003 Бетонные и железобетонные конструкции без предварительного напряжения арматуры, М.: ГУП "НИИЖБ", ФГУП ЦПП, 2004.

7. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление. В 2 т. СПб.: Мифрил., Гл. ред. физ.-мат.лит., 1996. Т.1, С. 128-131.

8. Кудрявцев Л.Д. Краткий курс математического анализа. В 2 т. Т.2. Дифференциальное и интегральное исчисление функций многих переменных. Гармонический анализ. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. С. 172-173.

9. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1969. С. 255-262.

10. Рекомендации по оценке и обеспечению надежности транспортных сооружений. М.: ЦНИИС Минтрансстроя СССР, 1989.

REFERENCES

1. Tamrazyan A.G., Falikman V.R. Osnovnyye trebovaniya k proyektirovaniyu zhelezobetonnykh konstruktsiy po model'nomu kodeksu FIB [Basic requirements for the design of reinforced concrete structures according to the FIB model code]. *Stroitel'stvo i rekonstruktsiya*. 2016. No. 3 (65). Pp. 71-77.

2. Tamrazyan A.G. Otsenka riska i nadezhnosti nesushchikh konstruktsiy i klyuchevykh elementov - neobkhodi-moye usloviye bezopasnosti zdaniy i sooruzheniy [An assessment of the risk and reliability of load-bearing structures and key elements is a necessary condition for the safety of buildings and structures]. *Vestnik TSNIISK im. V.A. Kucherenko "Issledovaniya po teo-rii sooruzheniy"*. 2009. No. 1. Pp. 160-171.

3. Tamrazyan A. G. et al. Snizheniye riskov v stroitel'stve pri chrezvychaynykh situatsiyakh prirodnogo i tekhnogennogo kharaktera [Risk reduction in construction during natural and man-made emergencies]. Under the general. ed. Tamrazyana A. G. Moscow: Publishing ASV, 2012

4. Tamrazyan A.G. Raschet elementov konstruktsiy pri zadannoy nadezhnosti i normal'nom raspredele-nii nagruzki i nesushchey sposobnosti [Calculation of structural elements for a given reliability and normal distribution of load and bearing capacity]. *Vestnik MGSU*. 2012. No. 10. Pp. 109-115.

5. Deminov P.D. K otsenke statisticheskikh parametrov zhelezobetonnoy balki na uprugom osnovanii, imeyushchem stokhasticheskiye kharakteristiki [On the estimation of statistical parameters of reinforced concrete beams on an elastic foundation having stochastic characteristics]. *Stroitel'stvo i rekonstruktsiya.* 2018. No. 5. Pp. 5-12.

6. Russian Building Code SP 52-101-2003 Betonnyye i zhelezobetonnyye konstruktsii bez predvaritel'nogo napryazheniya armatury [Concrete and reinforced concrete structures without prestressing reinforcement]. Moscow: GUP "NIIIZhB", FSUE TsPP, 2004.

7. Piskunov N.S. Differentsial'noye i integral'noye ischisleniye [Differential and integral calculus]. In 2 Vols. St. Petersburg: Mithril., Gl. red. fiz.-mat. lit, 1996. Vol.1, Pp. 128-131.

8. Kudryavtsev L.D. Kratkiy kurs matematicheskogo analiza [Short course of mathematical analysis]. In 2 Vols. Vol. 2. Differentsial'noye i integral'-noye ischisleniye funktsiy mnogikh peremennykh. Garmonicheskiy analiz [Differential and integral calculus of functions of many variables. Harmonic analysis]. Moscow: FIZMATLIT, 2005 . Pp. 172-173.

9. Ventzel E.S. Teoriya veroyatnostey [Probability Theory]. Moscow: Nauka, Gl. red. fiz.-mat. lit., 1969, - S. 255-262.

10. Rekomendatsii po otsenke i obespecheniyu nadezhnosti transportnykh sooruzheniy [Recommendations for assessing and ensuring the reliability of transport facilities]. Moscow: Central Scientific and Research Institute of the Ministry of Transport of the USSR, 1989.

Информация об авторах:

Дёминов Павел Дмитриевич
Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, Москва, Россия,
канд. техн. наук, доцент
E-mail: p-deminov@mail.ru

Information about authors:

Deminov Pavel D.
National Research Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russia,
Candidate tecn. Science, docent
E-mail: p-deminov@mail.ru