УДК 624.072.2.011.1 DOI: 10.33979/2073-7416-2019-84-4-64-69

ПРОГИБЫ И ЧАСТОТЫ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ СОСТАВНЫХ МНОГОСЛОЙНЫХ КВАДРАТНЫХ ИЗОТРОПНЫХ ПЛАСТИН С ШАРНИРНЫМ ОПИРАНИЕМ ПО КОНТУРУ ПРИ ИЗМЕНЕНИИ ЖЕСТКОСТИ СВЯЗЕЙ СДВИГА

ТУРКОВ А.В., МАРФИН К.В., БАЖЕНОВА А.В.

Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева, г. Орел, Россия

Аннотация. *Рассматривается взаимосвязь основной частоты свободных поперечных колебаний ω многослойных изотропных квадратных пластин в ненагруженном состоянии и их максимальных прогибов W_0 при действии равномерно распределённой нагрузки в зависимости от количества слоёв и жесткости связей сдвига. Количество слоев в составной пластинке изменяется от двух до десяти. В работе проводились численные исследования составных двухслойных пластин на податливых связях методом конечных элементов. Разработана конечно-элементная схема многослойной пластины. Расчет выполнялся в программном комплексе SCAD. Построены кривые для разного количества слоев многослойных пластин «Прогиб – жесткость связей сдвига» и «Частота поперечных колебаний – жесткость связей сдвига». Показано, что для составных многослойных пластинок квадратного очертания коэффициент К с точностью до 5,4% совпадает с аналогичным коэффициентом для квадратных пластин цельного сечения.*

Ключевые слова*: составная пластина, связи сдвига, поперечные связи, частота собственных колебаний, максимальный прогиб.*

THE DEFLECTIONS AND NATURAL FREQUENCIES OF THE COMPOSITE LAYERED SQUARE ISOTROPIC PLATES WITH HINGED SUPPORTS ALONG THE CONTOUR AT DIFFERENT STIFFNESS VALUES OF SHEAR TIES

TURKOV A.V., MARFIN K.V., BAZHENOVA A.V.

Orel state University named after I. S. Turgenev, Orel, Russia

Absract. *The relationship between the fundamental frequency of free transverse vibrations ω of multilayer isotropic square plates in an unloaded state and their maximum deflections W_0 under the action of a uniformly distributed load depending on the number of layers and the rigidity of shear bonds is considered. The number of layers in a composite plate varies from two to ten. In the work, numerical studies of composite two-layer plates on compliant bonds were carried out using the finite element method. A finite element diagram of a multilayer plate is developed. The calculation was performed in the SCAD software package. The curves for different numbers of layers of multilayer plates "Deflection - stiffness of shear bonds" and "Frequency of transverse vibrations - stiffness of shear bonds" are plotted. It is shown that for composite multilayer square-shaped plates, the coefficient K coincides with an accuracy of 5.4% with the same coefficient for square plates of whole section.*

Keywords: *composite plate connection shear, cross-connection, the natural frequency of oscillation, the maximum deflection.*

Введение

В современном строительстве важную роль играет не только контроль качества выпускаемых изделий, но и оценка несущей способности и жесткости уже существующих и эксплуатирующихся конструкций. В последнее время интенсивно стали развиваться динамические методы оценки качества строительных конструкций. Это связано с выявлением профессором В.И. Коробко нескольких фундаментальных закономерностей в строительной ме-

ханике, в основе которых лежат строгие функциональные взаимосвязи между физическими характеристиками строительных конструкций, в частности, между максимальным прогибом нагруженных конструкций в виде балок и пластинок и их основной частотой колебаний в ненагруженном состоянии. Однако, в отличие от изотропных пластин цельного сечения, для составных многослойных пластин эта закономерность еще не подтверждена. Решение данной проблемы имеет не только научное, но и практическое значение.

Работа многослойных изотропных пластин на податливых механических связях является актуальной проблемой. Пластинки разнообразной формы в настоящее время являются распространенными строительными конструктивными элементами, которые подвержены воздействию не только статических, но и динамически нагрузок. А при эксплуатации конструкций под машиностроительные станки и агрегаты, динамических воздействий, порой, не удается избежать.

В работе [1] профессор В.И. Коробко вывел фундаментальную зависимость для изотропных пластин постоянного сечения, которая формулируется следующим образом: вне зависимости от граничных условий произведение максимального прогиба W_0 от действия равномерно распределенной нагрузки q на квадрат основной частоты колебаний балки в ненагруженном состоянии ω с точностью до размерного множителя q/m есть величина постоянная и соответствует закономерности:

$$\mathrm{W}_0 \cdot \omega^2 = K\frac{q}{m}, \tag{1}$$

где m – равномерно распределённая по площади масса пластины.

Эта закономерность носит фундаментальный характер, она позволяет по частоте колебаний пластинки найти ее максимальный прогиб и, наоборот, по величине максимального прогиба найти ее основную частоту колебаний. Тем самым, методы определения максимального прогиба пластинок обогащаются методами определения основной частоты колебаний и наоборот. Кроме того, указанная закономерность открывает широкие возможности по развитию и совершенствованию вибрационных методов диагностики и контроля качества строительных конструкций. Применение этой закономерности также возможно в области развития методов геометрического и физико-механического моделирования строительных конструкций.

В работе [2] выведены основные уравнения для составных стержней и пластин с упругоподатливыми поперечными связями и связями сдвига.

Расчетом составных пластин по теории А.Р. Ржаницина занимался Филатов В.В. [3,4], более того, автор глубоко затронул методы расчета, которые значительно расширяют теорию А.Р. Ржаницина, такие как [5,6]. Помимо отечественных исследований в этой области, нестандартный подход представлен в работе [7], где составная стенка представлена в виде нескольких слоев чередующихся мягких и жестких материалов. В работе [8] рассматриваются задачи о собственных колебаниях многослойных пластин с шарнирно опертыми краями. В [9] рассматривается колебания и устойчивость высотных зданий на основе теории слоистых балок.

Исследованиями взаимосвязи максимальных прогибов и частот собственных колебаний двухслойных пластин занимались В.И. Коробко и О.В. Бояркина [10], А.В. Турков, К.В. Марфин и Е.В. Карпова [11, 12]. Чтобы подтвердить закономерность (1) для составных многослойных пластин, были проведены их численные исследования при различном количестве слоёв и переменной жесткости связей сдвига между слоями.

Сложностью расчета составных пластин обусловлена неопределенностью значений их изгибной жесткости вследствие неопределённости жёсткости поперечных связей и связей сдвига. Это обстоятельство выражено в первую очередь значительной податливостью связей, соединяющих слои этих пластин. Для определения действительной податливости связей и совместности работы слоев для составных пластин используют экспериментальные методы.

На сегодняшний день это практически единственно доступный вариант решения поставленной задачи. Однако, закономерность (1) позволит упростить ее решение.

Методы

Численные исследования составных двухслойных пластин на податливых связях проводились методом конечных элементов. В ходе теоретических исследований определялся максимальный прогиб и частота собственных колебаний конструкций.

В качестве расчетной конструкции была принята квадратная составная пластина со сторонами $a \times b = 1000 \times 1000$ мм. Количество слоёв составляло от 2-х до 10-ти. Каждый слой разбивался на 400 (20×20) квадратных пластинчатых конечных элементов. Поперечные связи и связи сдвига вводились во все узлы пластинчатых конечных элементов всех слоёв (рисунок 1).

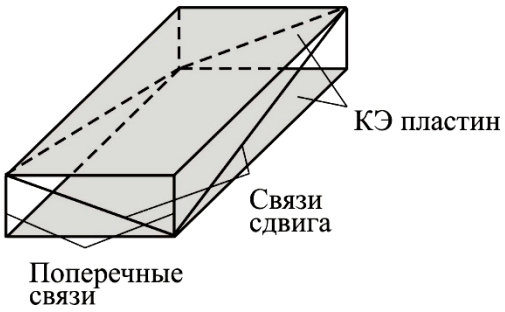

Рисунок 1 – Конечные элементы составной пластины с поперечными связями и связями сдвига

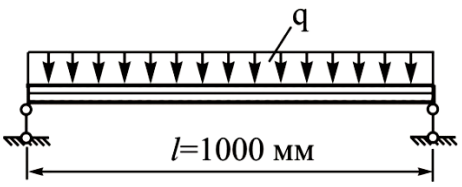

Рисунок 2 – Расчётная схема составной многослойной пластины

Опоры по контуру плиты располагались в узлах конечных элементов конструкции, при этом граничные условия слоёв были одинаковыми (рисунок 2). Слои составной пластинки приняты постоянного сечения толщиной δ = 8 мм из древесно-стружечной плиты, жесткость поперечных связей принята постоянной и составляет $EA_{пс}$ = 646 кН, что соответствует жесткости стального цилиндрического нагеля диаметром 3 мм. Все характеристики слоёв взяты из паспорта изделия: толщина δ = 8 мм, средняя плотность ρ = 7,40 кН/м^3, модуль упругости при изгибе E = 2600 кН/м^2. Для нахождения частот собственных колебаний в узлы конечных элементов прикладывались сосредоточенные массы от собственного веса слоев в зависимости от грузовой площади узла. При статическом расчёте к верхнему слою прикладывалась равномерно распределённая нагрузка интенсивностью 1,0 кН/м^2. Исследования проводились методом конечных элементов. Расстояние между слоями принималось равным расстоянию между их центрами тяжести слоёв δ = 8 мм. Расчет выполнялся в программном комплексе SCAD.

Критерием точности в работе служит коэффициент K, который определялся из (1). Этот коэффициент для квадратных пластин составляет при шарнирном опирании K = 1,582.

Результаты и их анализ

В результате расчёта определялся максимальный прогиб и частота основного тона поперечных колебаний пластин при изменении жёсткости связей сдвига, которая изменялась от 10-3 до 106 кН. В статье представлены таблицы по результатам численных исследований составной 3-х слойной пластины (таблица 1) и 10-и слойной пластины (таблица 2).

По результатам исследования многослойных пластин графики изменения прогибов и частот колебаний в зависимости от жесткости связей сдвига $EA_{сс}$ и количества слоев (рисунки 3 и 4).

Таблица 1 – Результаты численных исследований составной квадратной 3-х слойной пластины размером $a \times b = 1000 \times 1000$ мм, шарнирно опертой по контуру

$lgEA_{cc}$	Круговая частота основного тона, ω (c^{-1})	Максимальный прогиб, W_o (мм)	$K=W_o \omega^2/(q/m)$	$K_{аналит}=W_o \omega^2/(q/m)$ на основе аналитических W_0 и ω	Отклонение К от $K_{аналит}$ (%)
-3	85,69	11,91	1,582	1,582	0,000
-2	85,75	11,89	1,582		0,003
-1	86,31	11,73	1,582		0,028
0	91,59	10,39	1,578		0,263
1	126,30	5,388	1,555		1,695
2	200,67	2,124	1,547		2,193
3	240,87	1,498	1,572		0,609
4	249,31	1,404	1,579		0,199
5	250,35	1,393	1,580		0,149
6	250,46	1,392	1,580		0,144

Таблица 2 – Результаты численных исследований составной квадратной 10-и слойной пластины размером $a \times b = 1000 \times 1000$ мм, шарнирно опертой по контуру

$lgEA_{cc}$	Круговая частота основного тона, ω (c^{-1})	Максимальный прогиб, W_o (мм)	$K=W_o \omega^2/(q/m)$	$K_{аналит}=W_o \omega^2/(q/m)$ на основе аналитических W_0 и ω	Отклонение К от $K_{аналит}$ (%)
-3	85,70	3,572	1,582	1,582	-0,002
-2	85,77	3,565	1,582		0,001
-1	86,53	3,502	1,581		0,035
0	93,71	2,976	1,576		0,356
1	145,13	1,214	1,542		2,504
2	331,45	0,226	1,497		5,388
3	591,02	0,072	1,522		3,812
4	697,29	0,053	1,549		2,097
5	716,96	0,050	1,557		1,578
6	719,61	0,050	1,558		1,503

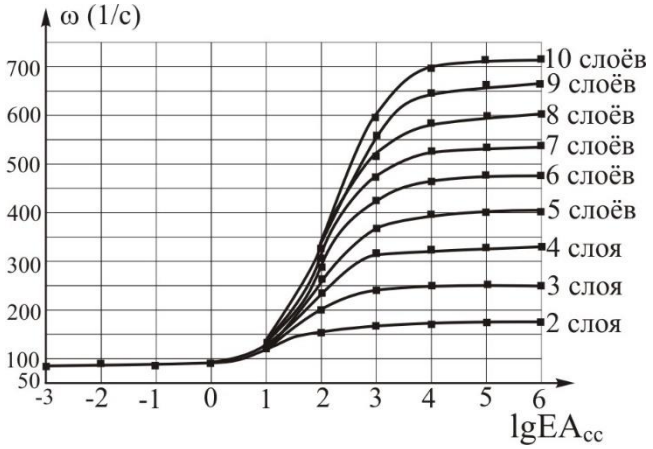

Рисунок 3 – Изменение частот собственных колебаний в зависимости от жесткости связей сдвига при шарнирном опирании пластин по контуру

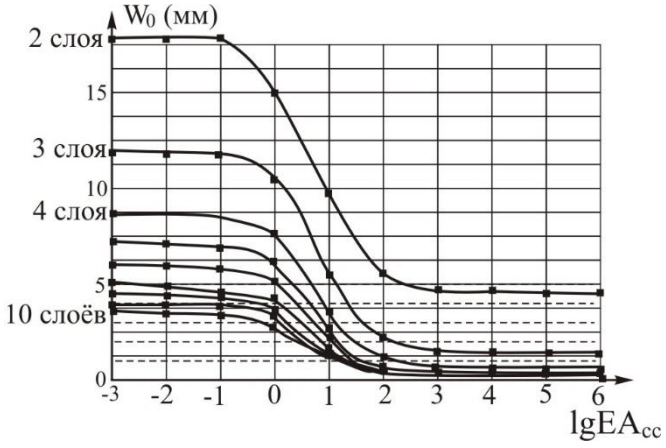

Рисунок 4 – Изменение максимальных прогибов в зависимости от жесткости связей сдвига при шарнирном опирании пластин по контуру

Анализ данных показывает, что независимо от жесткости связей сдвига и количества слоёв в составных пластинах фундаментальная зависимость (1) выполняется.

Заключение

В результате исследований подтверждена фундаментальная зависимость (1) для составных многослойных изотропных пластин на податливых связях. Результаты численных исследований показали хорошее совпадение по коэффициенту К. Максимальное расхождение численных и аналитических значений достигает 5,34% в 10-и слойных пластинах при жесткости связей сдвига $EA_{cc} = 10^2$ кН. В основном расхождения не превышают 3%, причём ошибка нарастает с увеличением количества слоёв.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Коробко В.И. Об одной "замечательной" закономерности в теории упругих пластинок // Изв. вузов. Строительство и архитектура. 1989. № 11. С. 32-36.

2. Ржаницын, А.Р. Составные стержни и пластинки. М.: Стройиздат, 1986. 316 с.

3. Филатов В.В. К расчету составных пластин по теории А.Р.Ржаницына. // Труды международной научно-технической конф. «Вычислительная механика деформируемого твердого тела». Москва: МИИТ, 2006. Том 2. С. 414-416.

4. Филатов В.В., Мусса Сали. Об учете податливости поперечных связей в расчетах составных пластин по теории // Промышленное и гражданское строительство. 2010. №2. С. 28-29.

5. Филатов В.В. Расчет составных пластин на винклеровском основании с кусочно-постоянным коэффициентом постели // Интернет-вестник ВолгГАСУ. Сер.: Политематическая. 2014. Вып. 2(33). С. 22.

6. Филатов В.В. О расчете составных пластин на вынужденные колебания // Известия вузов. Строительство. 2010. №7. С. 125-128.

7. Kollar Laszlo P. Buckling analysis of coupled shear walls by the multilayer sandwich model // Actatechn. Acad. sei. hung. 1986. 99. №3-4. Pp. 317332.

8. Rikards R., Chate A., Kenser M. Finite-Element-Mjdelle der Vibrationsdampfung dei Schichtplatten // Techn. Mech. 1990. 11. №3. Pp. 186190.

9. Potztc O. Kollar L. Analysis of building structures by replacement sandwich beams // Int. J. Solids and Struct. 2003. 40. №3. Pp.535-553.

10. Коробко В.И., Бояркина О.В. Взаимосвязь задач поперечного изгиба и свободных колебаний треугольных пластинок // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Строительство и архитектура. 2007. № 22 (94). С. 24-26.

11. Турков А.В., Карпова Е. В. Численные исследования составных пластин треугольного очертания при различных условиях опирания // Сборник трудов международной научно-технической конференции «Строительная наука XXI век». 2015. С. 378-391.

12. Турков А.В., Марфин К.В. Определение коэффициента жесткости шва круглой составной изотропной пластины по её основной частоте колебаний // Строительная механика и расчет сооружений. 2013. №4. С. 58-62.

REFERENCES

1. Korobko V.I. Ob odnoy "zamechatel'noy" zakonomernosti v teorii uprugikh plastinok [One “remarkable” regularity in the theory of elastic plates]. *Izv. vuzov. Stroitel'stvo i arkhitektura*. 1989. No 11. Pp. 32-36. (rus)

2. Rzhanitsyn, A.R. Sostavnyye sterzhni i plastinki [Compound rods and plates]. Moscow: Stroyizdat, 1986. 316 p. (rus)

3. Filatov V.V. K raschetu sostavnykh plastin po teorii A.R.Rzhanitsyna [Calculation of composite plates according to the theory of A.R.Zhanitsyn]. Trudy mezhdunarodnoy nauchno-tekhnicheskoy konf. “Vychislitel'naya mekhanika deformiruyemogo tverdogo tela” [Proceedings of the international scientific and technical conf. "Computational mechanics of a deformable solid"]. Moscow: MIIT, 2006. Vol. 2. Pp. 414-416.

4. Filatov V.V., Mussa Sali. Ob uchete podatlivosti poperechnykh svyazey v raschetakh sostavnykh pla-stin po teorii [About taking into account the compliance of cross-links in the calculations of composite plates according to theory]. *Promyshlennoye i grazhdanskoye stroitel'stvo*. 2010. No 2. Pp. 28-29. (rus)

5. Filatov V.V. Raschet sostavnykh plastin na vinklerovskom osnovanii s kusochno-postoyannym koeffitsiyentom posteli [Calculation of composite plates on a Winkler base with a piecewise constant bed coefficient]. *Internet-vestnik VolgGASU. Ser.: Politematicheskaya*. 2014. Vol. 2 (33). Pp. 22. (rus)

6. Filatov V.V. O raschete sostavnykh plastin na vynuzhdennyye kolebaniya [Calculation of composite plates for forced vibrations]. *Izvestiya vuzov. Stroi-tel'stvo*. 2010. No 7. Pp. 125-128. (rus)

7. Kollar Laszlo P. Buckling analysis of coupled shear walls by the multilayer sandwich model. *Actatechn. Acad. sei. hung*. 1986. 99. No 3-4. Pp. 317332.

8. Rikards R., Chate A., Kenser M. Finite-Element-Mjdelle der Vibrationsdampfung dei Schichtplatten. *Techn. Mech.* 1990. Vol. 11. No 3. Pp. 186190.

9. Potztc O. Kollar L. Analysis of building structures by replacement sandwich beams. *Int. J. Solids and Struct*. 2003. Vol. 40. No 3. Pp.535-553.

10. Korobko V.I., Boyarkina O.V. Vzaimosvyaz' zadach poperechnogo izgiba i svobodnykh kolebaniy treugol'nykh plastinok [The relationship between the problems of transverse bending and free vibrations of triangular plates]. *Vestnik Yuzhno-Ural'skogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Stroitel'stvo i arkhitektura*. 2007. No 22 (94). Pp. 24-26. (rus)

11. Turkov A.V., Karpova Ye. V. Chislennyye issledovaniya sostavnykh plastin treugol'nogo ochertaniya pri razlichnykh usloviyakh opiraniya [Numerical studies of composite plates of triangular shape under various conditions of support]. Sbornik trudov mezhdunarodnoy nauchno-tekhnicheskoy konferentsii “Stroitel'naya nauka XXI vek” [Proceedings of the international scientific and technical conference "Building Science of the XXI Century"]. 2015. Pp. 378-391. (rus)

12. Turkov A.V., Marfin K.V. Opredeleniye koeffitsiyenta zhestkosti shva krugloy sostavnoy izotrop-noy plastiny po yeyo osnovnoy chastote kolebaniy [Determination of the stiffness coefficient of a seam of a round composite isotropic plate from its main vibration frequency]. *Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzheniy*. 2013. No 4. Pp. 58-62. (rus)

Информация об авторах:

Турков Андрей Викторович
Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева, г. Орел, Россия,
Доктор технических наук, заведующий кафедрой строительных конструкций и материалов.
E-mail: aturkov@bk.ru

Марфин Кирилл Васильевич
Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева, г. Орел, Россия,
Кандидат технических наук, доцент кафедры строительных конструкций и материалов.
E-mail: marfinkirill@yandex.ru

Баженова Александра Викторовна
Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева, г. Орел.
инженер

Information about authors:

Turkov Andrey V.
Orel state University named after I. S. Turgenev, Orel, Russia,
Doctor of technical Sciences, head of the Department of building structures and materials,
E-mail: aturkov@bk.ru

Marfin Kirill V.
Orel state University named after I. S. Turgenev, Orel, Russia,
Candidate of technical Sciences, associate Professor of building structures and materials,
E-mail: marfinkirill@yandex.ru

Bazhenova Alexandra V.
Orel state University named after I. S. Turgenev, Orel, Russia,
Engineer