

ИЗГИБ КОЛЬЦЕВЫХ ПЛАСТИН ИЗ ОРТОТРОПНОГО НЕЛИНЕЙНО РАЗНОСОПРОТИВЛЯЮЩЕГОСЯ МАТЕРИАЛА

ТРЕЩЕВ А.А., ЖУРИН Е.А.

Тульский Государственный Университет, Тула, Россия

Аннотация. В представленной статье предлагается математическая модель осесимметричного поперечного изгиба кольцевой пластины средней толщины, нагружение которой предполагается по верхней поверхности поперечной равномерной распределённой нагрузкой. Рассматривается ортотропная пластина, выполненная из материала, механические характеристики которого нелинейно зависят от вида напряженного состояния. В качестве определяющих соотношений приняты наиболее универсальные, построенные в нормированном тензорном пространстве напряжений, связанном с главными осями анизотропии материала. Величины нагрузок принимались с таким расчетом, чтобы прогибы срединной поверхности пластины могли считаться малыми по сравнению с ее толщиной. Закрепления пластин представлены в двух вариантах: 1) жёсткое закрепление по внешнему и внутреннему контурам; 2) шарнирное опирание по внешнему и внутреннему контурам. Ввиду того, что многие ортотропные разносопротивляющиеся материалы проявляют нелинейную зависимость деформаций от напряжений, материальные параметры приняты в виде функций от интенсивности напряжений. В результате постановки краевой задачи была разработана математическая модель для рассматриваемого класса задач, реализованная в виде численного алгоритма интегрированного в пакет прикладных программ среды MatLAB. Для решения системы разрешающих дифференциальных уравнений изгиба пластин использовался метод переменных параметров упругости с конечно-разностной аппроксимацией второго порядка точности.

Ключевые слова. Поперечный изгиб, осесимметричное деформирование, кольцевая пластина, ортотропный материал, нелинейная разносопротивляемость, малые прогибы.

BENDING OF RING PLATES FROM ORTHOTROPIC NONLINEAR MISCELLANEOUS MATERIAL

TRESCHEV A.A., ZHURIN E.A.

Tula State University, Tula, Russia

Abstract. This article proposes a mathematical model of axisymmetric transverse bending of an annular plate of average thickness, the loading of which is assumed to be on the upper surface of a uniformly distributed transverse load. An orthotropic plate made of a material whose mechanical characteristics nonlinearly depend on the type of stress state is considered. The most universal, constructed in the normalized tensor space of stresses associated with the main axes of anisotropy of the material are taken as the defining relations. The loads were taken in such a way that the deflections of the middle surface of the plate could be considered small compared to its thickness. Plate fasteners are available in two versions: 1) rigid fastening along the outer and inner contours; 2) hinge bearing on the outer and inner contours. Due to the fact that many orthotropic dissimilar materials exhibit a nonlinear stress-strain relationship, the material parameters are taken as functions of the stress intensity. As a result of the formulation of the boundary value problem, a mathematical model was developed for the class of problems in question, implemented as a numerical algorithm integrated into the application package of the MatLAB environment. To solve the system of resolving differential equations of plate bending, we used the method of variable elasticity parameters with a finite-difference approximation of the second order of accuracy.

Keywords: Transverse bending, axisymmetric deformation, ring plate, orthotropic material, nonlinear dissociation, small deflections.

Введение

В настоящее время всё чаще проектируются и возводятся здания, изготавливаются детали машин и аппаратов, аналогов которым до недавнего времени не было. Данные объекты требуют деформационно-прочностного расчёта повышенной точности, так как малейшая погрешность на начальном этапе проектирования может привести к серьёзным авариям.

С течением времени создаются всё более технологичные материалы, для которых теории расчёта традиционных (классических) материалов не приемлемы. Именно поэтому разработка новых и модернизация старых моделей является актуальной задачей современного строительства и машиностроения.

Очевидно, что исследователям необходимо не только разработать математическую модель, но и экспериментально её проверить, а также сравнить с другими моделями для аналогичных конструкций. При более глубоком изучении материалов можно будет рассчитывать узлы и элементы конструкций с минимальными погрешностями. Это позволит разрабатывать конструкции без перерасхода материала.

В представленной работе рассматривается осесимметричное деформирование кольцевой пластинки средней толщины. Материал пластины принят ортотропным. Нелинейные свойства материала проявляются уже на ранних стадиях деформирования и сильно влияют на последующее распределение напряжений. Надежно описать деформирование такой пластины обычными линейными функциями не представляется возможным.

Разработкой теории расчёта пластин из анизотропных разносопротивляющихся материалов занимались многие учёные, такие как С.А. Амбарцумян, R.M. Jones, C.W. Bert, A.B. Березин, А.А. Золочевский, Н.М. Матченко, А.А. Трещёв и другие [1-34].

С.А. Амбарцумян в своих работах [1 - 3] предлагал простейшие варианты определяющих соотношений в виде уравнений состояния. При этом в рамках теории малых упругих деформаций устанавливались кусочно-линейные зависимости между главными напряжениями и деформациями, а вопрос о соотношениях между касательными напряжениями и сдвигами не обсуждался. В модели С.А. Амбарцумяна [1 - 3] поле главных напряжений разделено на области первого и второго родов [3- 5]. Данная модель по форме аналогична классическому обобщённому закону Гука ортотропного материала, но модули упругости и коэффициенты поперечной деформации в направлениях главных осей определяются отдельно из опытов по осевому растяжению (E_k^+ , ν_{km}^+) и сжатию (E_k^- , ν_{km}^-). Прямое применение предложенных соотношений возможно только в тех случаях, когда заранее известно распределение главных напряжений по их знакам в разных точках тела, а также при соблюдении модельных ограничений на константы, вытекающие из условия симметрии тензора податливостей.

Модель Р.М. Джонса (R.M. Jones) [6 - 9] основана на построении матрицы взвешенных податливостей, симметрия которой в областях с различными знаками главных напряжений достигается благодаря введению во внедиагональные компоненты весовых коэффициентов. Весовые коэффициенты представляют собой попарные соотношения модулей главных напряжений ($k_1 = |\sigma_1|/(|\sigma_1| + |\sigma_2|)$, $k_2 = |\sigma_2|/(|\sigma_1| + |\sigma_2|)$).

Простейшая модель уравнений состояния для анизотропных разномодульных тел предложена К.В. Бертом (C.W. Bert) [10 - 13]. Эта модель применима к волокнистым материалам, когда считается, что компоненты матрицы податливостей зависят от знака нормальных напряжений, возникающих по направлению волокон, то есть при растяжении вдоль волокон используется одна симметричная матрица податливостей, при сжатии – другая. Строгость данной модели нарушается при равенстве нулю нормальных напряжений вдоль волокон.

Более сложная, но не менее противоречивая модель предложена А.А. Золочевским [14 - 21], который ввел эквивалентное напряжение, второй степенью которого определяется потенциал деформаций. Константы потенциала "спрятаны" в выражениях, составляющих эквивалентного напряжения. Эквивалентное напряжение определено суммой линейного и квадратичного совместных инвариантов напряжений. Из-за наличия иррациональности в уравнениях связи напряжений и деформаций не удастся выделить матрицу податливостей в общем виде. Полученные нелинейные соотношения достаточно сложны и содержат большое количество констант, подлежащих экспериментальному определению. В частности, для ортотропного материала в квазилинейном приближении необходимо определить тридцать две константы, а из простейших эталонных экспериментов (одноосные растяжения и сжатия в направлении главных осей ортотропии и под углом 45° к ним) можно установить только 18.

Методы

Очевидно, что даже детальный анализ наиболее известных моделей определяющих соотношений анизотропных разносопротивляющихся материалов свидетельствует о том, что эти модели несвободны от серьезных недостатков и базируются на отдельных гипотезах, зачастую необоснованных экспериментальными фактами. В частности Е.В. Ломакин в работах [22, 23] формулирует потенциал деформаций для анизотропных материалов в виде энергетической функции от отношения среднего напряжения к интенсивности напряжений $\xi = \sigma / \sigma_i$ (где $\sigma = \sigma_{ij} \cdot \delta_{ij} / 3$ – средние напряжения, $\sigma_i = \sqrt{1,5 S_{ij} S_{ij}}$ – интенсивность напряжений; $S_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij} \sigma$ – компоненты девиатора напряжений; δ_{ij} – символ Кронеккера), умноженной на свертку тензора податливостей четвертого ранга с тензорами напряжений второго ранга в главных осях анизотропии материала. Серьезный недостаток введенных соотношений заключается в разрывности функционального параметра ξ , приводящего к неопределенностям бесконечного характера, на что неоднократно указывалось в работах [24 - 26].

В работах Матченко Н.М. и Трещева А.А. [25 - 27] строятся потенциалы деформаций для анизотропных разносопротивляющихся материалов, допускающих квазилинейную аппроксимацию, в девятимерном векторном нормированном пространстве напряжений. В этих работах получены уравнения состояния двух уровней точности. Несмотря на рациональность данного подхода, полученные соотношения также не свободны от существенных недостатков, каковыми для уравнений первого уровня точности являются сложные функциональные зависимости между некоррелируемыми константами материалов, а для уравнений второго уровня – чрезмерно большое количество подлежащих экспериментальному определению констант, для чего требуется привлечение опытов по сложным напряженным состояниям.

В последующих работах [28 - 30] Трещевым А.А. проведена корректирующая формулировка уравнений состояния для разного класса анизотропных материалов, как в квазилинейной, так и в нелинейной постановках. В нелинейной модели [31] используются уравнения состояния, представленные по типу обобщенного закона Гука для анизотропных материалов по типу:

$$e_{kn} = H_{knpq}(\sigma_i, \alpha_{st}) \cdot \sigma_{pq}; \quad H_{knpq} = H_{pqkn}; \quad k, m, q, p, s, t, = 1, 2, 3, \dots$$

В частности, для ортотропного материала эти зависимости представлены следующим образом:

$$\begin{aligned} e_{11} &= (A_{1111} + B_{1111} \cdot \alpha_{11}) \cdot \sigma_{11} + [A_{1122} + B_{1122} \cdot (\alpha_{11} + \alpha_{22})] \cdot \sigma_{22} + [A_{1133} + B_{1133} \cdot (\alpha_{11} + \alpha_{33})] \cdot \sigma_{33}; \\ e_{22} &= [A_{1122} + B_{1122} \cdot (\alpha_{11} + \alpha_{22})] \cdot \sigma_{11} + (A_{2222} + B_{2222} \cdot \alpha_{22}) \cdot \sigma_{22} + [A_{2233} + B_{2233} \cdot (\alpha_{22} + \alpha_{33})] \cdot \sigma_{33}; \\ e_{33} &= [A_{1133} + B_{1133} \cdot (\alpha_{11} + \alpha_{33})] \cdot \sigma_{11} + [A_{2233} + B_{2233} \cdot (\alpha_{22} + \alpha_{33})] \cdot \sigma_{22} + (A_{3333} + B_{3333} \cdot \alpha_{33}) \cdot \sigma_{33}; \\ 2e_{12} &= C_{1212}(\sigma_i) \cdot \tau_{12}; \quad 2e_{23} = C_{2323}(\sigma_i) \cdot \tau_{23}; \quad 2e_{13} = C_{1313}(\sigma_i) \cdot \tau_{13}, \end{aligned} \quad (1)$$

где $a_{ij} = \sigma_{ij} / S$; – нормированные напряжения в главных осях анизотропии материала; $S = (\sigma_{ij} \cdot \sigma_{ij})^{0.5} = \sqrt{\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + \sigma_{33}^2 + 2(\tau_{12}^2 + \tau_{23}^2 + \tau_{31}^2)}$ – модуль полного напряжения (норма пространства напряжений); $A_{ijklm}, B_{ijklm}, C_{ijklm}$ – нелинейные функции, определяющие механические свойства материала.

Для ортотропных тел число независимых материальных функций достигает пятнадцати [31, 32]. Представление указанных функций, определяющих свойства материала, осуществляется путем аппроксимации экспериментальных диаграмм деформирования при одноосном растяжении и сжатии вдоль главных осей анизотропии и диаграмм, полученных на сдвиг в трех главных плоскостях ортотропии путём их обработки в программе Microcal Origin Pro 8.0 (Microcal Software Inc.). В таком случае для конструкционного ортотропного нелинейно разнсопротивляющегося композитного материала AVCO Mod 3a [34] представляются следующим образом:

$$\begin{aligned} A_{kkkk}(\sigma_i) &= 0.5 \cdot [1/E_k^+(\sigma_i) + 1/E_k^-(\sigma_i)]; & B_{kkkk}(\sigma_i) &= 0.5 \cdot [1/E_k^+(\sigma_i) - 1/E_k^-(\sigma_i)]; \\ A_{kkmm}(\sigma_i) &= -0.5 \cdot \left[\frac{v_{km}^+(\sigma_i)}{E_m^+(\sigma_i)} + \frac{v_{km}^-(\sigma_i)}{E_m^-(\sigma_i)} \right]; & B_{kkmm}(\sigma_i) &= -0.5 \cdot \left[\frac{v_{km}^+(\sigma_i)}{E_m^+(\sigma_i)} - \frac{v_{km}^-(\sigma_i)}{E_m^-(\sigma_i)} \right]; \\ C_{kmkn}(\sigma_i) &= 1/G_{km}(\sigma_i); & E_k^\pm(\sigma_i) &= a_k^\pm + m_k^\pm \cdot \sigma_i + n_k^\pm \cdot \sigma_i^2; \\ v_{kn}^\pm(\sigma_i) &= \lambda_{kn}^\pm + \beta_{kn}^\pm \cdot \sigma_i + \mu_{kn}^\pm \cdot \sigma_i^2; & G_{km}(\sigma_i) &= g_{km} + p_{km} \cdot \sigma_i + q_{km} \cdot \sigma_i^2. \end{aligned} \quad (2)$$

где $a_k^\pm, m_k^\pm, n_k^\pm, \lambda_{kn}^\pm, \beta_{kn}^\pm, \mu_{kn}^\pm, g_{km}, p_{km}, q_{km}$ – константы нелинейных материальных функций, определяемые путем обработки экспериментальных диаграмм деформирования методом наименьших квадратов и представленные в таблице 1.

Данная модель нелинейного ортотропного разнсопротивляющегося материала [31, 34] в настоящее время наименее противоречива, даёт результаты максимально близкие к экспериментальным данным и поэтому здесь положена в основу построения методики расчета пластин.

Рассмотрим НДС кольцевой пластины при нагружении поперечной равномерно распределённой нагрузкой интенсивности "q" (МПа). Материал пластины принимаем с нелинейными характеристиками, обладающей цилиндрической ортотропией и свойствами разнсопротивляемости. При этом остановимся на двух вариантах опирания объекта исследования:

- а) пластина с жёстко защемлёнными контурами в соответствии с рисунком 1а;
- б) пластина шарнирно опёрта по контурам в соответствии с рисунком 1б.

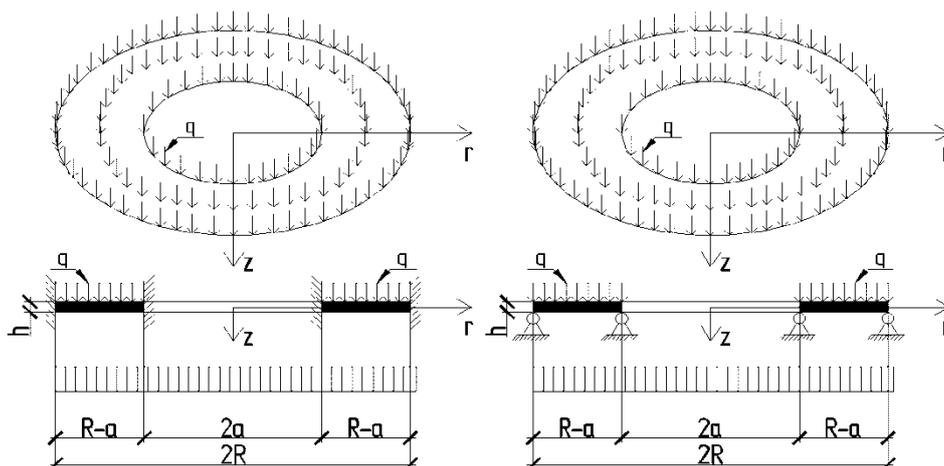


Рисунок 1 – Расчётная схема кольцевой пластины с двумя видами опирания: а) с жёстко закреплёнными контурами; б) с шарнирно опёртыми контурами

Таблица 1 - Константы композитного материала AVCO Mod 3a [34]

Вид испытания опытного образца	Технический параметр	Первый элемент не- линейной функции	Второй элемент не- линейной функции	Третий элемент не- линейной функции
1	2	3	4	5
Одноосное растяжение вдоль главных осей ортотропии	$E_k^+(\sigma_i)$, Па	α_1^+	m_1^+	n_1^+
		$1.058 \cdot 10^{-10}$	62.829	$1.535 \cdot 10^{-6}$
		α_2^+	m_2^+	n_2^+
		$2.864 \cdot 10^{-10}$	-105.476	$5.893 \cdot 10^{-7}$
		α_3^+	m_3^+	n_3^+
		$2.301 \cdot 10^{-10}$	88.349	$3.711 \cdot 10^{-6}$
	$\nu_{km}^+(\sigma_i)$	λ_{12}^+	β_{12}^+	μ_{12}^+
		0.158	$-3.106 \cdot 10^{-9}$	$2.192 \cdot 10^{-17}$
		λ_{21}^+	β_{21}^+	μ_{21}^+
		0.103	$-1.79 \cdot 10^{-9}$	$9.106 \cdot 10^{-18}$
		λ_{13}^+	β_{13}^+	μ_{13}^+
		0.203	$2.15 \cdot 10^{-9}$	$6.148 \cdot 10^{-17}$
		λ_{23}^+	β_{23}^+	μ_{23}^+
		0.104	$0.87 \cdot 10^{-10}$	$6.741 \cdot 10^{-17}$
		λ_{31}^+	β_{31}^+	μ_{31}^+
0.146	$-0.146 \cdot 10^{-10}$	$6.971 \cdot 10^{-17}$		

Продолжение таблицы 1

Вид испытания опытного образца	Технический параметр	Первый элемент нелинейной функции	Второй элемент нелинейной функции	Третий элемент нелинейной функции	
1	2	3	4	5	
Одноосное сжатие вдоль главных осей ортотропии	$E_k^-(\sigma_i)$, Па	α_1^-	m_1^-	n_1^-	
		9.988·10 ⁹	-12.943	6.71·10 ⁻⁷	
		α_2^-	m_2^-	n_2^-	
		2.326·10 ¹⁰	-436.81	-6.077·10 ⁻⁷	
		α_3^-	m_3^-	n_3^-	
		5.14·10 ⁹	-129.15	-78.31·10 ⁻⁶	
	$\nu_{km}^-(\sigma_i)$	λ_{12}^-	β_{12}^-	μ_{12}^-	
		0.118	-1.457·10 ⁻⁹	2.136·10 ⁻¹⁷	
		λ_{21}^-	β_{21}^-	μ_{21}^-	
		0.06	1.77·10 ⁻⁹	2.947·10 ⁻¹⁷	
		λ_{13}^-	β_{13}^-	μ_{13}^-	
		0.264	-1.118·10 ⁻⁹	3.01·10 ⁻¹⁷	
		λ_{23}^-	β_{23}^-	μ_{23}^-	
		0.189	2.156·10 ⁻⁹	2.104·10 ⁻¹⁷	
		λ_{31}^-	β_{31}^-	μ_{31}^-	
	0.134	-0.457·10 ⁻¹⁰	5.819·10 ⁻¹⁷		
	Сдвиг в главных плоскостях ортотропии	$G_{km}(\sigma_i)$, Па	g_{12}	p_{12}	q_{12}
			4.07·10 ⁹	-1,6	-8.38·10 ⁻⁶
g_{23}			p_{23}	q_{23}	
1.723·10 ⁹			16.899	-1.1·10 ⁻⁵	
g_{31}			p_{31}	q_{31}	
2.43·10 ⁹			-54.455	-1.97·10 ⁻⁵	

Ввиду осевой симметрии рассматриваются задачи с учетом цилиндрической системы координат (r, θ, z) . При этом считаются справедливыми традиционные для данного случая модельные допущения [34] в следующей форме: 1) нормаль к срединной плоскости после деформации поворачивается на угол ψ_θ относительно окружной координатной оси θ ; 2) при определении параметров напряженного состояния влиянием нормальных напряжений σ_z ввиду их малости пренебрегаем.

Опираясь на вышеописанные допущения, для деформаций в точках пластины имеем:

$$e_r = u_{,r} + z \cdot \psi_{\theta,r}; \quad e_\theta = u/r + z \cdot \psi_\theta / r; \quad \gamma_{rz} = w_{,r} + \psi_\theta \quad (3)$$

где u – радиальные перемещения в срединной поверхности; ψ_θ – угол поворота сечения пластины относительно оси θ ; w – прогиб срединной поверхности пластины.

Принимая во внимание принятые гипотезы уравнения (1) преобразуем к виду:

$$\begin{aligned} e_r &= (A_{1111}(\sigma_i) + B_{1111}(\sigma_i) \cdot \alpha_r) \cdot \sigma_r + [A_{1122}(\sigma_i) + B_{1122}(\sigma_i) \cdot (\alpha_r + \alpha_\theta)] \cdot \sigma_\theta; \\ e_\theta &= [A_{1122}(\sigma_i) + B_{1122}(\sigma_i) \cdot (\alpha_r + \alpha_\theta)] \cdot \sigma_r + (A_{2222}(\sigma_i) + B_{2222}(\sigma_i) \cdot \alpha_\theta) \cdot \sigma_\theta \\ e_z &= [A_{1133}(\sigma_i) + B_{1133}(\sigma_i) \cdot \alpha_r] \cdot \sigma_r + [A_{2233}(\sigma_i) + B_{2233}(\sigma_i) \cdot \alpha_\theta] \cdot \sigma_\theta; \\ e_{rz} &= C_{1313}(\sigma_i) \cdot \tau_{rz}; \end{aligned} \quad (4)$$

где $\alpha_r = \sigma_r / S$; $\alpha_\theta = \sigma_\theta / S$; $\alpha_{rz} = \sigma_{rz} / S$; $S = \sqrt{\sigma_r^2 + \sigma_\theta^2 + \tau_{rz}^2}$;

$$\sigma_i = \sqrt{\sigma_r^2 - \sigma_r \cdot \sigma_\theta + \sigma_\theta^2 + 3\tau_{rz}^2}.$$

Для удобства дальнейшего изложения введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} C_{1111} &= A_{1111}(\sigma_i) + B_{1111}(\sigma_i) \cdot \alpha_r; & C_{1122} &= A_{1122}(\sigma_i) + B_{1122}(\sigma_i) \cdot (\alpha_r + \alpha_\theta); \\ C_{1133} &= A_{1133}(\sigma_i) + B_{1133}(\sigma_i) \cdot \alpha_r; & C_{2222} &= A_{2222}(\sigma_i) + B_{2222}(\sigma_i) \cdot \alpha_\theta; \\ C_{2233} &= A_{2233}(\sigma_i) + B_{2233}(\sigma_i) \cdot \alpha_\theta; & C_{1313} &= C_{1313}(\sigma_i); \end{aligned} \quad (5)$$

Выразив напряжения через деформации с учетом упрощающих уравнений (3) – (5), после несложных математических манипуляций приходим к следующим зависимостям:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \Delta_{1111}(u_{,r} - z \cdot \psi_{\theta,r}) + \Delta_{1122}(u/r - z \cdot \psi_\theta / r); \\ \sigma_\theta &= \Delta_{1122}(u_{,r} - z \cdot \psi_{\theta,r}) + \Delta_{2222}(u/r - z \cdot \psi_\theta / r); \\ \tau_{rz} &= \frac{(\psi_\theta + w_{,1})}{\Delta_{1313}}; \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta_{1111} &= C_{2222} / (C_{1111} \cdot C_{2222} - C_{1122}^2); & \Delta_{1122} &= C_{1122} / (C_{1111} \cdot C_{2222} - C_{1122}^2); \\ \Delta_{2222} &= C_{1111} / (C_{1111} \cdot C_{2222} - C_{1122}^2); & \Delta_{1313} &= C_{1313}; \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь в явной форме не включены деформации e_z , но они легко вычисляются из третьего уравнения системы (4).

Принимая за основу новые физические уравнения, мы тем самым не вносим изменений в зависимости статико-геометрической природы, а поэтому статические условия для кольцевых пластин в цилиндрической системе координат представим в традиционной форме [34]:

$$N_{r,r} + (N_r - N_\theta) / r = 0; \quad Q_{r,r} + Q_r / r = -q; \quad M_{r,r} + (M_r - M_\theta) / r - Q_r = 0; \quad (8)$$

где N_r , N_θ , Q_r , M_r , M_θ – усилия и моменты в сечениях пластины.

Усилия и моменты определяются интегрированием выражений для напряжений (6) по толщине пластины:

$$\begin{aligned}
 N_r &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_r dz; & N_\theta &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_\theta dz; & Q_r &= \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{rz} dz; \\
 M_r &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_r \cdot z dz; & M_\theta &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_\theta \cdot z dz;
 \end{aligned} \tag{9}$$

Из совместного рассмотрения зависимостей (6) – (9) вытекают разрешающие уравнения осесимметричного изгиба пластин средней толщины, обладающих цилиндрической ортотропией и нелинейной зависимостью механических характеристик материала от вида напряженного состояния:

$$\begin{aligned}
 &D_{11,r} \cdot u_{,rr} + K_{11,r} \cdot \psi_{\theta,rr} + D_{12,r} \cdot u_{,r} / r + K_{12,r} \cdot \psi_{\theta,r} / r + (D_{11} \cdot u_{,r} + K_{11} \cdot \psi_{\theta,r} + D_{12} \cdot u / r + \\
 &\quad + K_{12} \cdot \psi_\theta / r - D_{12} \cdot u_{,r} + K_{12} \psi_{\theta,r} + D_{22} \cdot u / r + K_{22} \cdot \psi_\theta / r) / r = 0; \\
 &D_{13,r} \cdot (w_{,rr} + \psi_{\theta,r}) + D_{13} (w_{,r} + \psi_\theta) / r = -q; \\
 &(K_{11} \cdot u_{,r} + R_{11} \cdot \psi_{\theta,r} + K_{12} \cdot u / r + R_{12} \cdot \psi_\theta / r - K_{12} u_{,r} + R_{12} \cdot \psi_{\theta,r} + K_{22} u / r + R_{22} \cdot \psi_\theta / r) / r - \\
 &\quad - D_{13} \cdot (w_{,r} + \psi_\theta) = 0.
 \end{aligned} \tag{10}$$

где D_{11} , D_{12} , D_{22} , D_{13} , K_{11} , K_{12} , K_{22} , R_{11} , R_{12} , R_{22} – интегральные функции по толщине пластины, вытекающие после интегрирования по формулам (9); $D_{11,r}$, $D_{12,r}$, $D_{33,r}$, $K_{11,r}$, $K_{12,r}$, $R_{11,r}$, $R_{12,r}$ – производные интегральных функций по радиальной координате.

Для решения полученных уравнений (10) используем конечно-разностный метод с аппроксимацией второго порядка точности [35, 36].

Результаты и обсуждения

Для решения данного класса задач разработана программа в среде MatLAB. Рассматривались 2 варианта закрепления пластины: шарнирное и жёсткое защемление по краям. Так же, были рассмотрены 3 варианта решения.

После обработки результатов расчетов, были получены следующие графики и диаграммы:

- прогибы от величины нагрузки;
- прогибы по координате «r»;
- распределение напряжений по координатам;
- распределение напряжений в пластинке в различных сечениях;
- распределение моментов в пластине.

Основные результаты приведены на графиках для сечения кольцевой пластины "R-a". На рисунках 2 - 4 приведены результаты расчёта пластины с жестким защемлением, а на рисунках 5 и 7 – с шарнирным опиранием.

В ходе реализации модели деформирования кольцевых пластин под действием равномерно распределённых нагрузок получены основные значения параметров, характеризующие их напряженно-деформированные состояния.

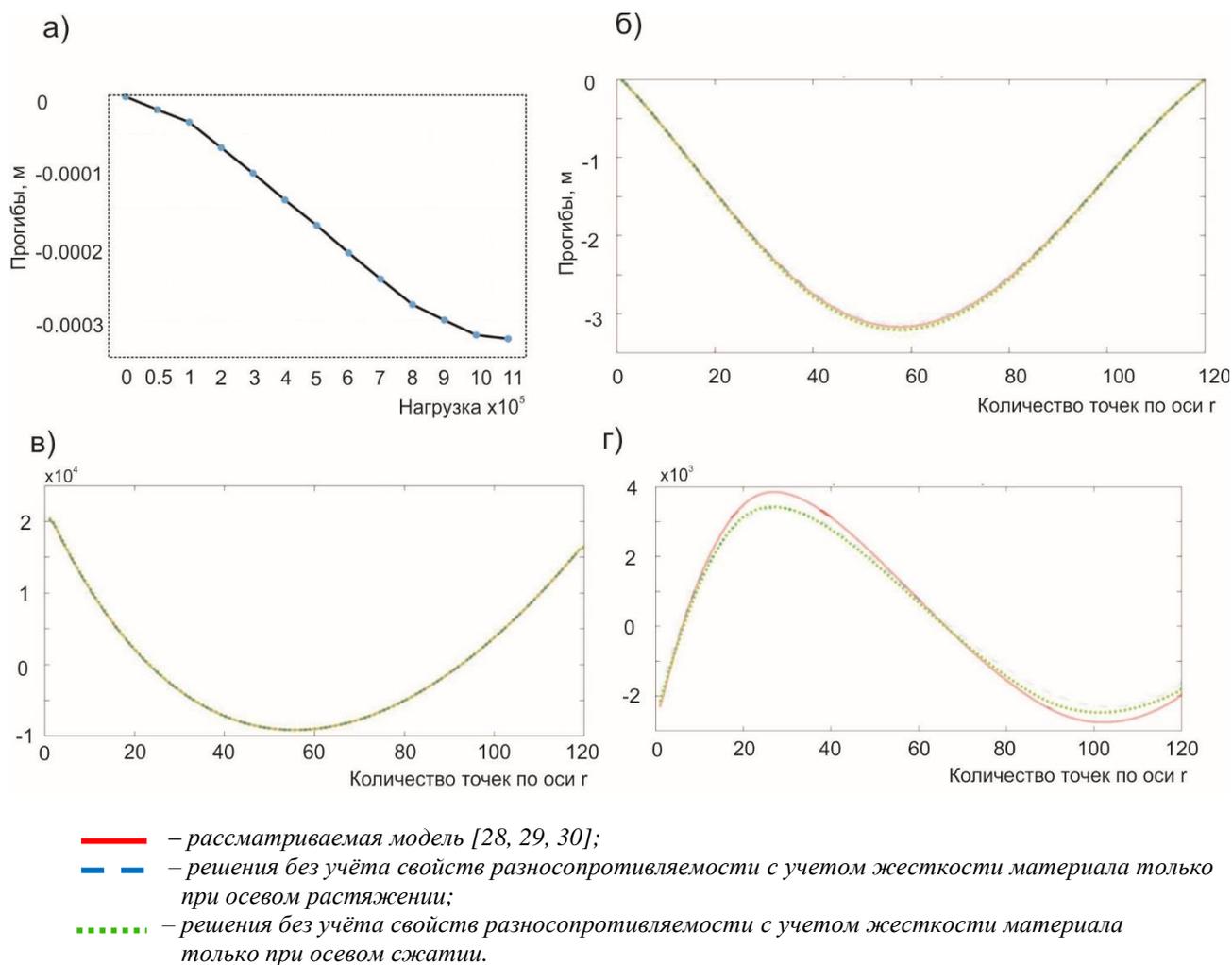


Рисунок 2 – Результаты расчета пластины с жестким защемлением: а) прогибы от величины нагрузки; б) прогибы по координате r ; в) распределение моментов M_r ; г) распределение моментов M_θ

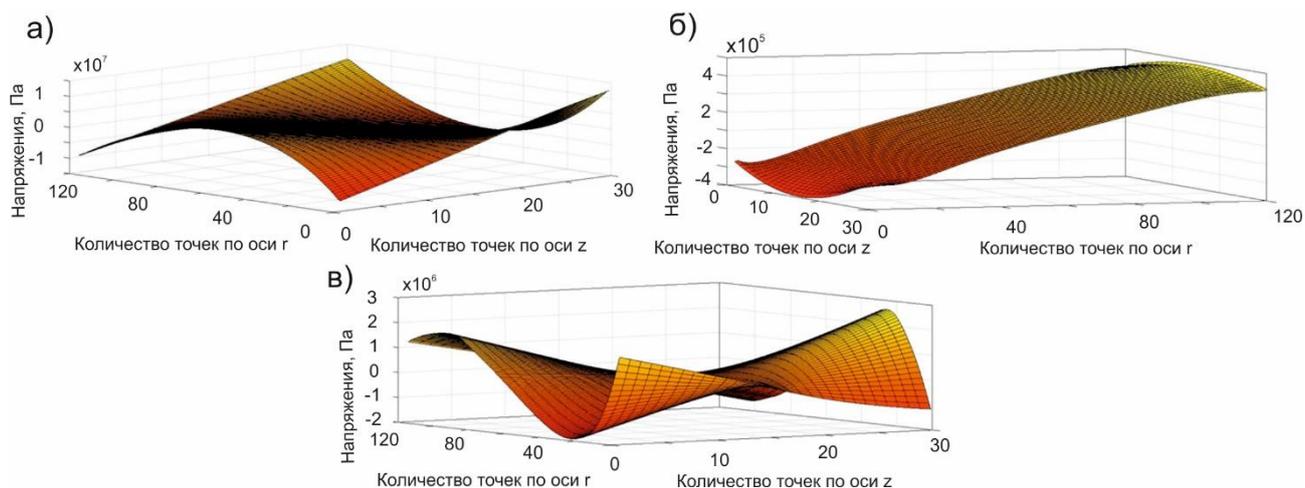


Рисунок 3 – Распределение напряжений в жестко защемленной пластине: а) σ_r по координатам r и z ; б) σ_θ по координатам r и z ; в) σ_{rz} по координатам r и z

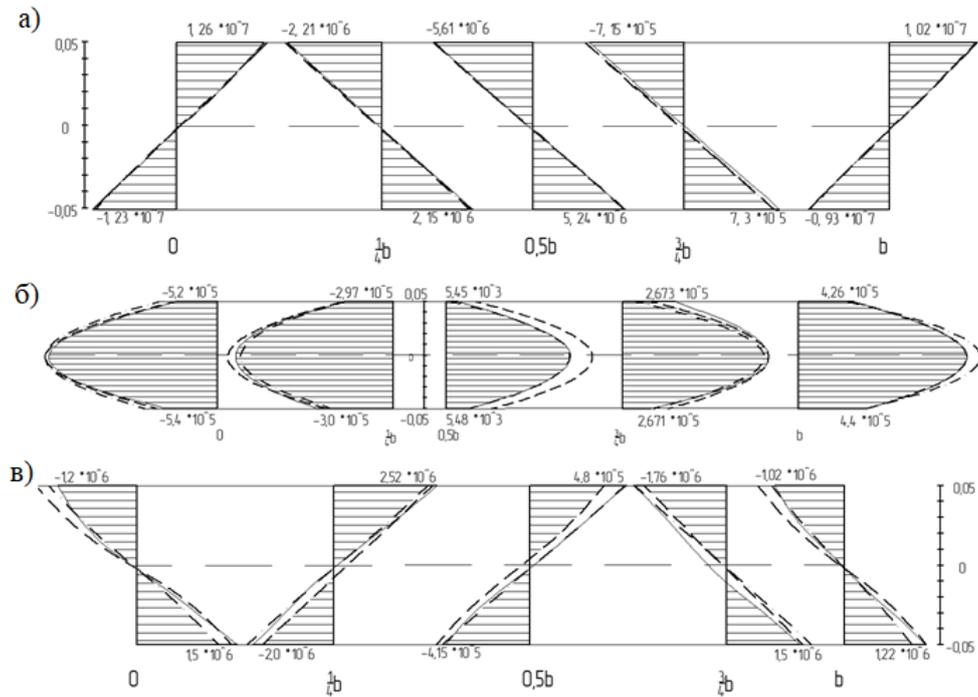


Рисунок 4 – Распределение напряжений по толщине жестко защемленной кольцевой пластины в характерных сечениях: а) σ_r , Па; б) $\sigma_{\tau z}$, Па; в) σ_θ , Па

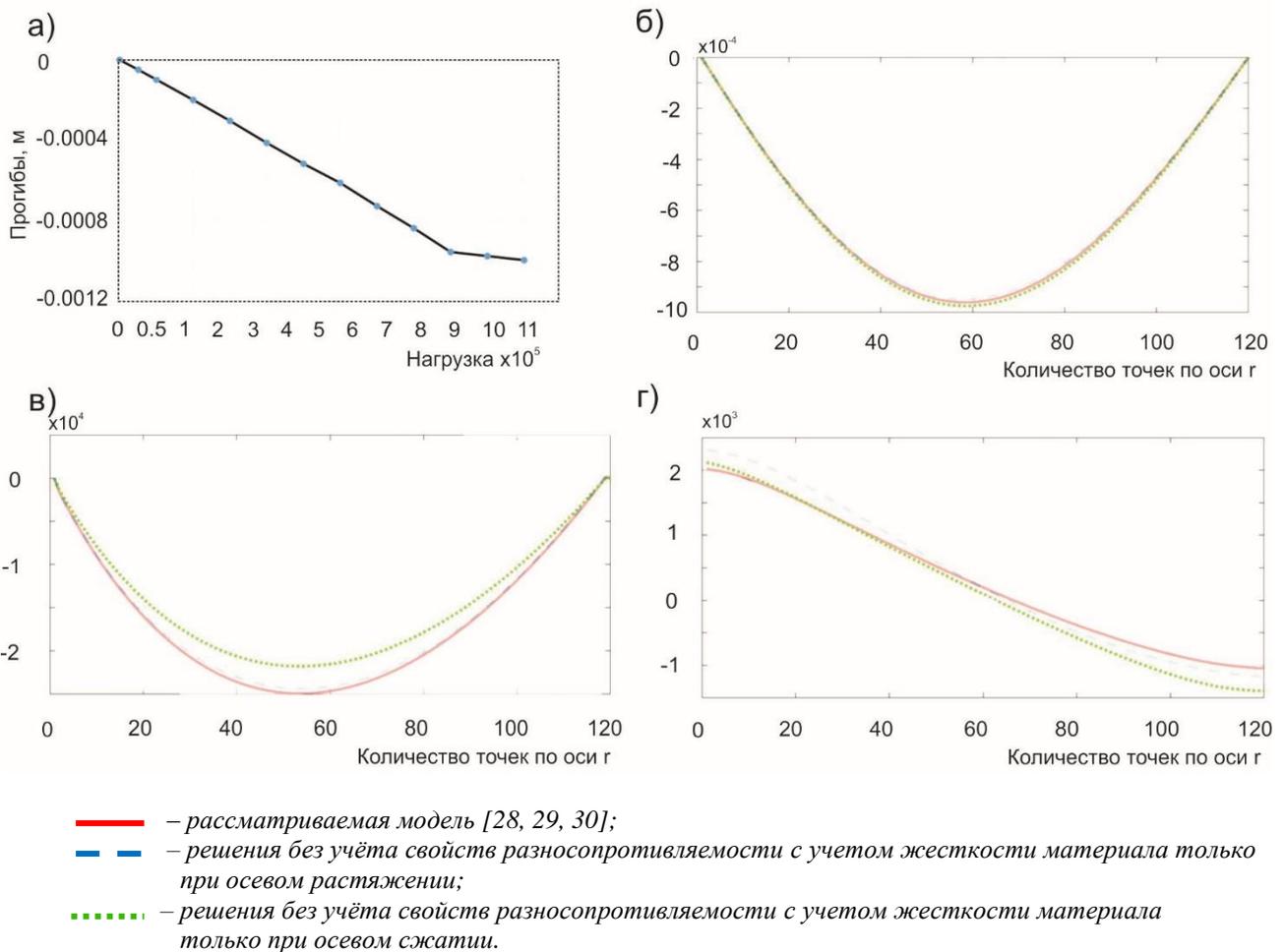


Рисунок 5 – Результаты расчета пластины с шарнирным опиранием: а) прогибы от величины нагрузки; б) прогибы по координате r; в) распределение моментов M_r ; г) распределение моментов M_θ

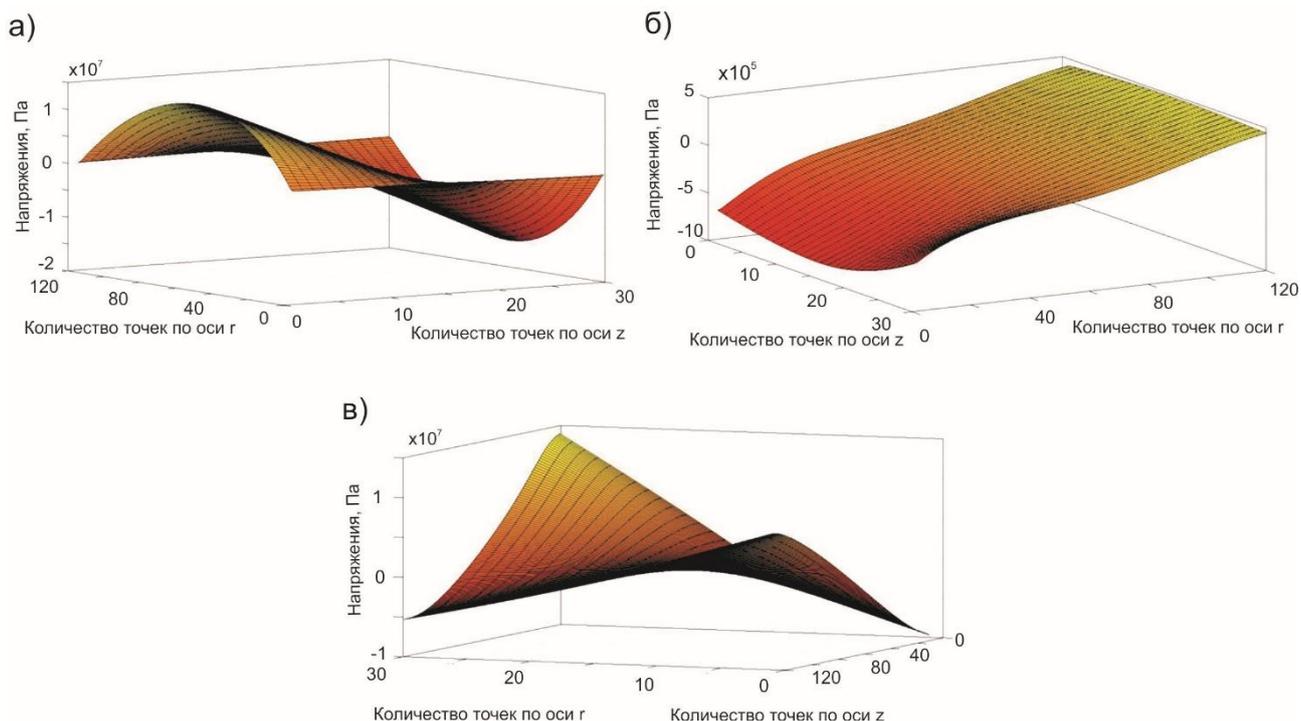


Рисунок 6 – Распределение напряжений в шарнирно опертой пластине: а) σ_r по координатам r и z ; б) σ_θ по координатам r и z ; в) σ_{rz} по координатам r и z

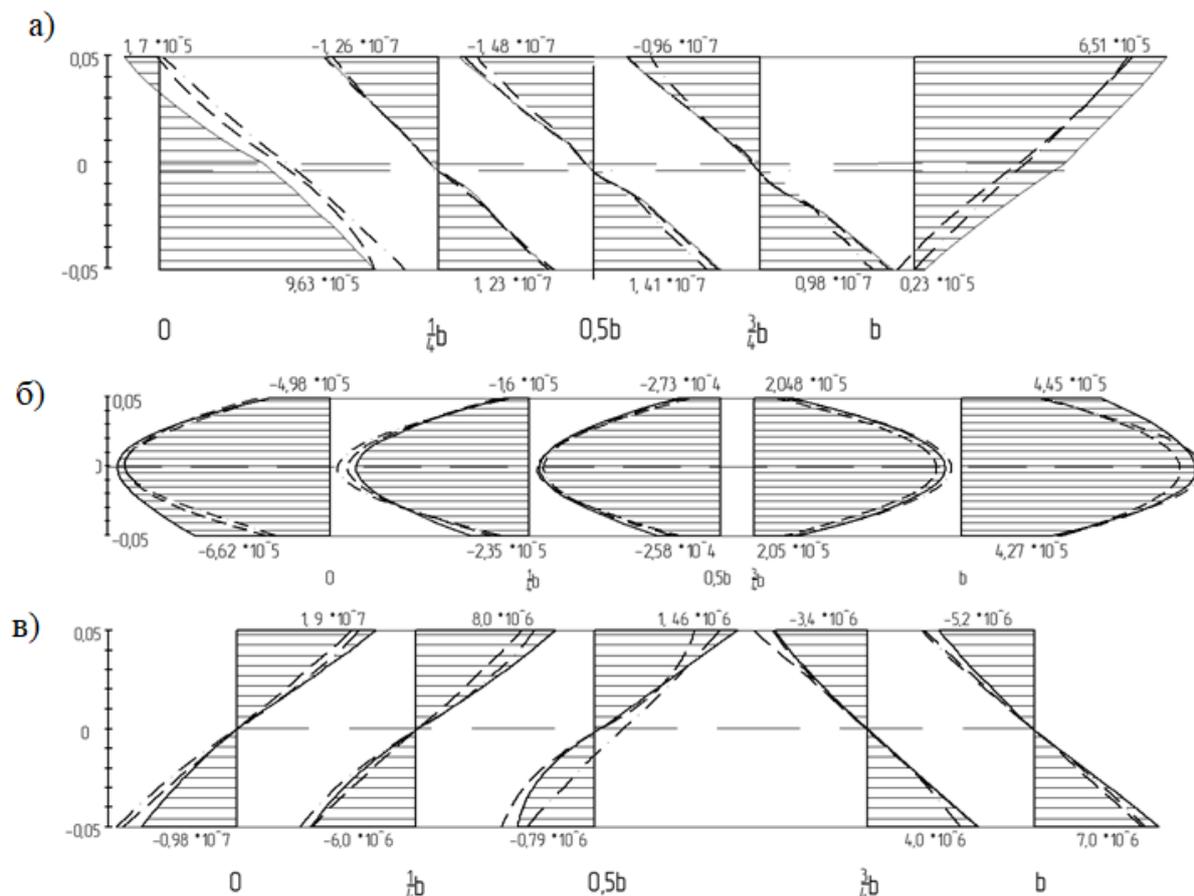


Рисунок 7 – Распределение напряжений по толщине шарнирно опертой кольцевой пластины в характерных сечениях: а) σ_r , Па; б) σ_{rz} , Па; в) σ_θ , Па

В результате сравнения решений рассмотренных задач по представленной модели деформирования с данными традиционной нелинейной теории без учёта свойств разносопротивляемости, отмечены следующие особенности, характеризующие отличия параметров НДС:

1. Жёстко защемлённая пластина:
 - a. разница в прогибах составляет 1,3%;
 - b. разница в значениях усилий в различных сечениях кольцевой пластины колеблется в интервале 1,5-3% для σ_r ; 13-17% для σ_{13} ; 5-7% для σ_θ ;
 - c. разница в значениях горизонтальных перемещений составляет 6%;
 - d. разница в значениях углов поворота составляет 4%;
 - e. разница в значениях момента M_r составляет 0,5-1%; а M_θ – 10-15%.
2. Шарнирно опёртая пластина:
 - a. разница в прогибах составляет 1,5-2%;
 - b. разница в значениях напряжений в различных сечениях кольцевой пластины колеблется в интервале 7-15% для σ_r ; 5-19% для σ_{rz} ; 10-14% для σ_θ ;
 - c. разница в значениях горизонтальных перемещений составляет 2-4%;
 - d. разница в значениях углов поворота составляет 15-17%;
 - e. разница в значениях момента M_r составляет 15%; а M_θ – 25%.

Таким образом установлено, что неучёт нелинейной разносопротивляемости материалов при рассмотрении параметров деформирования различных конструкций, выполненных из подобных материалов, приводит к заметным погрешностям.

Выводы

В результате проделанного исследования была конкретизирована и применена модель деформирования разносопротивляющихся ортотропных материалов, которая наиболее точно и адекватно описывает большинство известных на сегодняшний день нелинейных материалов. В основу рассматриваемой модели были положены обработанные результаты экспериментов по деформированию разносопротивляющихся материалов, материальные нелинейные функции и константы [34].

Для решения задачи деформирования кольцевой пластины из нелинейного ортотропного материала по разработанной модели был использован метод переменных параметров упругости с конечно-разностной аппроксимацией второго порядка точности. Был разработан алгоритм решения задач «по расчёту осесимметричного деформирования кольцевых пластинок средней толщины из нелинейных ортотропных разносопротивляющихся материалов при малых прогибах». Практическое применение алгоритма и оценка итерационных методов решения реализовывалось с помощью пакета прикладных программ «MatLAB».

В результате проделанной работы был решён ряд тестовых задач по теме деформирования пластин средней толщины из нелинейных ортотропных материалов, определены параметры состояния пластин на различных этапах загрузки поперечной равномерно-распределённой нагрузкой, рассмотрены два варианта закрепления кольцевых пластин, приведены результаты сравнения трёх вариантов решения данной задачи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин: прочность, устойчивость, колебания. М.: Наука, 1967. 266 с.
2. Амбарцумян С.А. Основные уравнения и соотношения разномодульной теории упругости анизотропного тела // Изв. АН СССР. МТТ. 1969. № 3. С. 51–61.
3. Амбарцумян С.А. Разномодульная теория упругости // М.: Наука, 1982. 320 с.

4. Амбарцумян С.А., Хачатурян А.А. Основные уравнения теории упругости для материалов, разносопротивляющихся растяжению и сжатию // Инж. журн. МГТ. 1966. №2. С. 44–53.
5. Амбарцумян С.А., Хачатурян А.А. К разномодульной теории упругости // Инж. журн. МГТ. 1966. №6. С. 64–67.
6. Jones R.M. A Nonsystemmetric Compliance Matrix Approach to Nonlinear Multimoduls Ortotropic Materials // AIAA Journal. 1977. Vol. 15. №10. Pp. 1436–1443.
7. Jones R.M., Nelson D.A.R. Material for nonlinear Deformation // AIAA Journal. 1976. Vol. 14. №6. Pp. 709–716.
8. Jones R.M. Modeling Nonlinear Deformation of Carbon-Carbon Composite Materials // AIAA Journal. 1980. Vol. 18. №8. Pp. 995–1001.
9. Jones R.M. Stress-Strain Relations for Materials with Different Moduli in Tension and Compression / R.M.Jones // AIAA Journal. 1977. Vol. 15. №1. Pp. 16–25.
10. Bert C.W. Models for Fibrous Composite with Different Properties in Tension and Compression // Transaction of the ASME. 1977. Vol. 99 H. Ser. D. No 4. Pp. 344–349.
11. Bert C.W. Micromechanics of the different elastic behavior of filamentary composite in tension and compression // Mechanics of bimodulus materials. 1979. Pp. 17–28.
12. Bert C.W., Gordaninejad F. Deflection of Thick Beams of Multimodular Materials // International Journal for Numerical Methods in Engineering. 1984. Vol. 20. Pp. 479–503.
13. Bert C.W., Reddy J.N., Chao W.C. Bending of Thick Rectanqular Plates Laminated of Bimodulus Composite Materials // AIAA Journal. 1981. Vol. 19. No 10. Pp. 1342–1349.
14. Золочевский А.А. К тензорной связи в теориях упругости и пластичности анизотропных композитных материалов, разносопротивляющихся растяжению и сжатию // Механика композитных материалов. 1985. № 1. С. 53–58.
15. Золочевский А.А. Определяющие уравнения и некоторые задачи разномодульной теории упругости анизотропных материалов // ПМТФ. 1985. №4. С. 131–138.
16. Золочевский А.А. К теории пластичности материалов различно сопротивляющихся растяжению и сжатию // Изв. вузов. Машиностроение. 1986. №6. С. 13–16.
17. Золочевский А.А. О соотношениях теории упругости анизотропных разномодульных материалов / А.А.Золочевский // Динамика и прочность машин. 1981. Вып. 34. С. 3–8.
18. Золочевский А.А. Соотношения разномодульной теории упругости анизотропных материалов на основе трех смешанных инвариантов / А.А.Золочевский // Динамика и прочность машин. 1987. Вып. 46. С. 85–89.
19. Золочевский А.А., Морачковский О.К. Направления развития моделей и методов расчета нелинейного деформирования тел и элементов машиностроительных конструкций // Динамика и прочность машин. 1989. Вып. 50. С. 3–9.
20. Золочевский А.А., Склепус С.Н. К теории пластичности с тремя инвариантами напряженного состояния // Изв. вузов. Машиностроение. 1987. №5. С. 7–10.
21. Золочевский А.А. Об учете разносопротивляемости в теории ползучести изотропных и анизотропных материалов // ПМТФ. 1982. №4. С. 140–144.
22. Ломакин Е.В. Разномодульность композитных материалов // Механика композитных материалов. 1981. №1. С. 23–29.
23. Ломакин Е.В. Соотношения теории упругости для анизотропного тела, деформационные характеристики которых зависят от вида напряженного состояния // Изв. АН СССР. МГТ. 1983. №3. С. 63–69.
24. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений: в 2 т. Т. 1. М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит.-ры. 1959. С. 464.
25. Матченко Н.М., Трещев А.А. Учет влияния вида напряженного состояния на упругие и пластические состояния начально изотропных деформируемых сред // Тезисы докладов Международного научно-технического симпозиума «Моделирование и критерии подобия в процессах развитого пластического формоизменения». Орел: ОПТУ, 1996. С.11-12.
26. Матченко Н.М., Трещев А.А. Теория деформирования разносопротивляющихся материалов. Определяющие соотношения. Тула: ТулГУ, 2000. 149 с.
27. Матченко Н.М., Трещев А.А. Теория деформирования разносопротивляющихся материалов. Тонкие пластины и оболочки. М.; Тула: РААСН; ТулГУ, 2005. 187 с.
28. Трещев А.А. Описание нелинейного деформирования анизотропных материалов // Актуальные проблемы строительства и строительной индустрии: сборник материалов Международной конференции. Тула: ТулГУ. 2001. С. 107–108.
29. Трещев А.А. Описание деформирования нелинейных анизотропных материалов // Архитектурно-строительное материаловедение на рубеже веков: материалы докладов Международной конференции. Белгород: БелГТАСМ. 2002. С. 86.
30. Трещев А.А., Федоссов О.В. Описание нелинейного деформирования анизотропных материалов // Проблемы и достижения строительного материаловедения. 2005. С. 233–234.

31. Трещев А.А. Анизотропные пластины и оболочки из разносопротивляющихся. М.; Тула: РААСН; ТулГУ, 2007. 160 с.
32. Ромашин Д.А. Изгиб круглых пластин из ортотропных существенно-нелинейных материалов, чувствительных к виду напряженного состояния // V-я молодёжная научно-практическая конференция Тульского государственного университета «Молодёжные инновации»: сборник докладов под общей редакцией д-ра техн. наук, проф. Е. А. Ядыкина. В 2 ч. Ч. 1. Тула: Изд-во ТулГУ, 2011. — с. 163-164.
33. Jones R.M., Nelson D.A.R. Theoretical-experimental correlation of material models for non-linear deformation of graphite // *AIAA Journal*. 1976. Vol. 14. № 10. Pp. 1427-1435.
34. Трещёв А.А. Анизотропные пластины и оболочки из разносопротивляющихся материалов: монография. М.; Тула: РААСН; ТулГУ. 2007. 160 с.
35. Биргер И.А., Мавлютов Р.Р. Сопротивление материалов: Учебное пособие. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. 560 с.
36. Писаренко Г.С., Можаровский Н.С. Уравнения и краевые задачи теории пластичности и ползучести. Справочное пособие. Киев: Наук. думка, 1981. 496 с.

REFERENCES

1. Ambartsumyan S.A. Teoriya anizotropnykh plastin: prochnost', ustoychivost', kolebaniya [Theory of anisotropic plates: strength, stability, vibrations]. Moscow : Nauka, 1967. 266 p. (rus)
2. Ambartsumyan S.A. Osnovnyye uravneniya i sootnosheniya raznomodul'noy teorii uprugosti anizotropnogo tela [Basic equations and ratios of the multi-modular theory of elasticity of an anisotropic body]. *Izv. Academy of Sciences of the USSR. MTT*. 1969. No 3. Pp. 51–61. (rus)
3. Ambartsumyan S.A. Raznomodul'naya teoriya uprugosti [Multi-modular theory of elasticity]. Moscow : Nauka, 1982. 320 p. (rus)
4. Ambartsumyan S.A., Khachatryan A.A. Osnovnyye uravneniya teorii uprugosti dlya materialov, raznosoprotivlyayushchikhsya rastyazheniyu i szhatiyu [The basic equations of the theory of elasticity for materials of different resistance to tension and compression]. *Inzh. journals MTT*. 1966. No 2. Pp. 44–53. (rus)
5. Ambartsumyan S.A. K raznomodul'noy teorii uprugosti [Towards a multimodular theory of elasticity / S.A. Ambartsumian, A.A. Khachatryan]. *Ing. journals MTT*. 1966. - No 6. Pp. 64–67. (rus)
6. Jones R.M. A Nonsystemmetric Compliance Matrix Approach to Nonlinear Multimoduls Ortotropic Materials. *AIAA Journal*. 1977. Vol. 15. No 10. Pp. 1436–1443.
7. Jones R.M., Nelson D.A.R. Material for nonlinear Deformation. *AIAA Journal*. 1976. Vol. 14. No 6. Pp. 709–716.
8. Jones R.M. Modeling Nonlinear Deformation of the Carbon-Carbon Composite Materials. *AIAA Journal*. 1980. Vol. 18. No 8. Pp. 995-1001.
9. Jones R.M. Stress-Strain Relations for Materials with Moduli in Tension and Compression. *AIAA Journal*. 1977. Vol. 15. No 1. Pp. 16-25.
10. Bert C.W. Models for Fibrous Composites. *Transaction of the ASME*. 1977. Vol. 99 H. Ser. D. No 4. Pp. 344–349.
11. Bert C.W. Micromechanics of the different elastic behavior of filamentary composite in tension and compression. *Mechanics of bimodulus materials*. 1979. Pp. 17–28.
12. Bert C.W., Gordaninejad F. Multi-modular Materials. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1984. Vol. 20. Pp. 479–503.
13. Bert C.W., Reddy J.N., Chao W.C. Bending of Thick Rectangular Plates Laminated of Bimodulus Composite Materials. *AIAA Journal*. 1981. Vol. 19. No 10. Pp. 1342–1349.
14. Zolochovsky A.A. K tenzornoy svyazi v teoriyakh uprugosti i plastichnosti anizotropnykh kompozitnykh materialov, raznosoprotivlyayushchikhsya rastyazheniyu i szhatiyu [To tensor coupling in the theories of elasticity and plasticity of anisotropic composite materials that are differently opposed to tension and compression]. *Mechanics of composite materials*. 1985. No 1. Pp. 53–58. (rus)
15. Zolochovsky A.A. Opredelyayushchiye uravneniya i nekotoryye zadachi raznomodul'noy teorii uprugosti anizotropnykh materialov [Determining equations and some problems of the multimodular theory of elasticity of anisotropic materials]. *PMTF*. 1985. No 4. Pp. 131–138. (rus)
16. Zolochovsky A.A. K teorii plastichnosti materialov razlichno soprotivlyayushchikhsya rastyazheniyu i szhatiyu [On the theory of plasticity of materials differently resisting tension and compression]. *Izv. universities. Engineering*. 1986. No 6. Pp. 13–16. (rus)
17. Zolochovsky A.A. O sootnosheniyakh teorii uprugosti anizotropnykh raznomodul'nykh materialov [On the relations of the theory of elasticity of anisotropic multi-modular materials]. *Dynamics and durability of machines*. 1981. Vol. 34. Pp. 3–8. (rus)

18. Zolochevsky A.A. Sootnosheniya raznomodul'noy teorii uprugosti anizotropnykh materialov na osnove trekh smeshannykh invariantov [Ratios of the multimodular theory of elasticity of anisotropic materials based on three mixed invariants]. *Dynamics and Strength of Machines*. 1987. Vol. 46. Pp. 85–89. (rus)
19. Zolochevsky A.A., Morachkovsky O.K. Napravleniya razvitiya modeley i metodov rascheta nelineynogo deformirovaniya tel i elementov mashinostroitel'nykh konstruksiy [The directions of development of models and methods for calculating the nonlinear deformation of bodies and elements of engineering structures]. *Dynamics and strength of machines*. 1989. Vol. 50. Pp. 3–9. (rus)
20. Zolochevsky A.A., Sklepus S.N. K teorii plastichnosti s tremya invariantami napryazhennogo sostoyaniya [On the theory of plasticity with three invariants of the stress state]. *Izv. universities. Engineering*. 1987. No 5. Pp. 7–10. (rus)
21. Zolochevsky A.A. Ob uchete raznosoprotivlyayemosti v teorii polzuchesti izotropnykh i anizotropnykh materialov [Concerning consideration of the multiresistance in the theory of creep of isotropic and anisotropic materials]. *PMTF*. 1982. No 4. Pp. 140–144. (rus)
22. Lomakin E.V. Raznomodul'nost' kompozitnykh materialov [Multi-modularity of composite materials]. *Mechanics of composite materials*. 1981. No 1. Pp. 23–29.
23. Lomakin E.V. Sootnosheniya teorii uprugosti dlya anizotropnogo tela, deformatsionnyye kharakteristiki kotorykh zavisyat ot vida napryazhennogo sostoyaniya [Relations of the theory of elasticity for an anisotropic body, the deformation characteristics of which depend on the type of stress state]. *Izv. Academy of Sciences of the USSR. MTT*. 1983. No 3. Pp. 63–69. (rus)
24. Berezin I.S., Zhidkov N.P. Metody vychisleniy: v 2 t. T. 1 [Calculation methods: in 2 tons. T. 1]. Moscow: Gos. Publ. house phys. lit-ry. - 1959. 464 p. (rus)
25. Matchenko N.M., Treshchev A.A. chet vliyaniya vida napryazhennogo sostoyaniya na uprugiy i plasticheskiye sostoyaniya nachal'no izotropnykh deformiruyemykh sred [Accounting for the influence of the type of stress state on elastic and plastic states of initially isotropic deformable media]. Tezisy dokladov Mezhdunarodnogo nauchno-tekhnicheskogo simpoziuma "Modelirovaniye i kriterii podobiya v protsessakh razvitogo plasticheskogo formoizmeneniya" [Abstracts of the reports of the International Scientific and Technical Symposium, "Modeling and similarity criteria in the processes of developed plastic form change"]. Orel: OSTU, 1996. Pp. 11-12. (rus)
26. Matchenko N.M., Treshchev A.A. Teoriya deformirovaniya raznosoprotivlyayu-shchikhsya materialov. Opredeleyayushchiye sootnosheniya [Theory of deformation of materials with different resistance. Determining relations]. Tula: TSU, 2000. 149 p. (rus)
27. Matchenko N.M., Treshchev A.A. Teoriya deformirovaniya raznosoprotivlyayushchikhsya materialov. Tonkiye plastiny i obolochki [Theory of deformation of materials with different resistance. Thin plates and shells]. Moscow; Tula: RAACS; TSU, 2005. 187 p. (rus)
28. Treschev A.A. Opisaniye nelineynogo deformirovaniya anizotropnykh materialov [Description of nonlinear deformation of anisotropic materials. Actual problems of the construction and construction industry]. Aktual'nyye problemy stroitel'stva i stroitel'noy industrii: sbornik materialov Mezhdunarodnoy konferentsii [Collection of materials of the International Conference]. Tula: TSU. 2001. Pp. 107–108. (rus)
29. Treschev A.A. Opisaniye deformirovaniya nelineynykh anizotropnykh materialov [Description of the deformation of nonlinear anisotropic materials]. Arkhitekturno-stroitel'noye materialovedeniye na rubezhe vekov: materialy dokladov Mezhdunarodnoy konferentsii [Architectural and building materials science at the turn of the century: materials of reports of the International Conference]. Belgorod: BelGTASM. - 2002. - p. 86. (rus)
30. Treschev A.A., Fedoseev O.V. Opisaniye nelineynogo deformirovaniya anizotropnykh materialov [Description of nonlinear deformation of anisotropic materials]. Problemy i dostizheniya stroitel'nogo materialovedeniya [Problems and Achievements of Building Materials]. Belgorod: BSTU. 2005. Pp. 233–234.
31. Treschev A.A. Anizotropnyye plastiny i obolochki iz raznosoprotivlyayushchikhsya [Anisotropic plates and shells from materials of different resistance]. Moscow; Tula: RAACS; TSU, 2007. 160 p. (rus)
32. Romashin D.A. Izgib kruglykh plastin iz ortotropnykh sushchestvenno-nelineynykh materialov, chuvstvitel'nykh k vidu napryazhennogo sostoyaniya [Bending of round plates from orthotropic substantially non-linear materials sensitive to the type of stress state]. V-ya molodozhnaya nauchno-prakticheskaya konferentsiya Tul'skogo gosudarstvennogo universiteta «Molodozhnyye innovatsii»: sbornik dokladov pod obshchey redaktsiyey d-ra tekhn. nauk, prof. Ye. A. Yadykina. V 2 ch. CH. 1 [V-th Youth Scientific-Practical Conference of Tula State University "Youth Innovations": a collection of reports edited by Dr. tech. sciences, prof. E. A. Yadykina. In 2 hours. Part 1]. Tula: Izd-vo TSU, 2011. Pp. 163-164. (rus)
33. Jones R.M., Nelson D.A.R. Theoretical-experimental correlation of material models for non-linear deformation of graphite. *AIAA Journal*. 1976. Vol. 14. No 10. Pp. 1427-1435.
34. Treschev A.A. Anizotropnyye plastiny i obolochki iz raznosoprotivlyayushchikhsya materialov: monografiya [Anisotropic plates and shells of materials with different resistance: monograph]. Moscow; Tula: RAACS; TSU. 2007. 160 p. (rus)
35. Birger I.A., Mavlyutov R.R. Soprotivleniye materialov: Uchebnoye posobiye [Resistance materials: Tutorial]. Moscow: Science. Ch. ed. Phys. Mat. lit., 1986. 560 p. (rus)

36. Pisarenko G. S., Mozharovsky N. S. Uravneniya i krayevyye zadachi teorii plastichnosti i polzuchesti. Spravochnoye posobiye [Equations and boundary value problems of the theory of plasticity and creep. Reference book]. Kiev: Naukova Dumka, 1981. (rus)

Информация об авторах:

Трещев Александр Анатольевич.

Тульский Государственный Университет, Тула, Россия,
доктор технических наук, профессор, зав. кафедрой «Строительство, строительные материалы и конструкции»,
член-корреспондент РААСН.
E-mail: taa58@yandex.ru

Журин Евгений Андреевич

Тульский Государственный Университет, Тула, Россия,
аспирант кафедры «Строительство, строительные материалы и конструкции».
E-mail: EAZhurin@mail.ru

Information about authors:

Treschev Alexander A.

Tula State University, Tula, Russia,
doctor of technical sciences, professor, head. Department of "Construction, building materials and structures",
corresponding member of RAACS.
E-mail: taa58@yandex.ru

Zhurin Evgeniy A.

Tula State University, Tula, Russia,
graduate student of the department "Construction, building materials and structures."
E-mail: EAZhurin@mail.ru