УДК 624.04 DOI: 10.33979/2073-7416-2019-82-2-35-42

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ В ЗАДАЧЕ КРУЧЕНИЯ СТЕРЖНЕЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО СЕЧЕНИЯ

КОРОБКО А.В., ЧЕРНЯЕВ А.А., ЛЫГИНА Ю.Е.

Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева, г. Орел, Россия

Аннотация. *В статье приводится сопоставление значений приведенной геометрической жесткости эллиптических сечений при свободном кручении стержня, полученных с использованием точного и приближенного решений. Точное решение представлено в зависимости от геометрического аргумента – коэффициента формы, а приближенное решение – в виде линейной зависимости, которая аппроксимирует известные точные решения с использованием геометрического аргумента – отношения конформных радиусов (внутреннего к внешнему).*

Результаты сопоставления показали, что приближенное решение дает погрешность, не превышающую одного процента в диапазоне отношений a/b < 6 (a и b – полуоси эллипса). Возможность представления искомых решений в виде зависимостей от геометрических аргументов, позволяет расширить перспективы использования метода интерполяции как по коэффициенту формы, так и по отношению конформных радиусов.

Ключевые слова: *приведенная жесткость, кручение стержней, эллиптическое сечение, коэффициент формы, конформные радиусы.*

GEOMETRICAL METHODS OF CONSTRUCTION MECHANICS IN THE PROBLEM OF THE TORSION ELLIPTIC SECTIONS

KOROBKO A.V., CHERNYAEV A.A., LYGINA YU. E.

Orel state university named after I.S. Turgenev, Orel, Russia

Abstract. *The article provides a comparison of the values of the reduced geometric rigidity of elliptic sections with free torsion of a rod, obtained using exact and approximate solutions. The exact solution is presented depending on the geometric argument - the form coefficient, and the approximate solution - in the form of a linear relationship, which approximates the known exact solutions using the geometric argument - the ratio of conformal radii (internal to external).*

The results of the comparison showed that an approximate solution gives an error not exceeding one percent in the range of ratios a / b <6 (a and b are ellipse semiaxes). The possibility of presenting the desired solutions in the form of dependencies on geometric arguments allows us to extend the prospects of using the interpolation method both in terms of the shape factor and the ratio of conformal radii.

Keywords: *stiffness, torsion bars, elliptic cross section, form factor, conformal radii.*

Введение

Конструкции, испытывающие деформации кручения, широко распространены в строительстве и машиностроении, поэтому разработка и совершенствование методов расчета таких конструкций является одной из актуальных задач строительной механики и теории упругости [1-3]. При решении таких задач в первую очередь определяется геометрическая жесткость кручения I_k стержня, а уже с её помощью исследуется его напряженно-деформированное состояние (НДС) [4-9]. В строительной механике известно лишь одно точное решение в элементарных функциях при определении геометрической жесткости эллип-

тических сечений [1]. В случае сечений другого вида используются различные приближенные аналитические и численные методы, которые являются достаточно трудоемкими.

В последние годы к решению таких задач привлекаются геометрические методы – изопериметрический метод (ИЗПМ) 10-16] и метод интерполяции по коэффициенту формы (МИКФ) [17]. В основу этих методов положены изопериметрические свойства геометрической жесткости кручения сечений и интегральных геометрических характеристик – коэффициента формы K_f и отношения конформных радиусов (внутреннего к внешнему $\dot{r}/\bar{r}$. Как показали проведенные исследования, указанные геометрические характеристики являются аналогом геометрической жесткости сечений I_k. Оказалось, что геометрическая жесткость эллиптических сечений образует нижнюю границу для всего множества значений односвязных сечений с выпуклым внешним контуром.

Некоторые задачи о взаимосвязи I_k – K_f уже рассмотрены в научной литературе [11, 17], а к исследованию взаимосвязи I_k – $\dot{r}/\bar{r}$ еще практически не приступали. Известны лишь публикации [18-20], в которых использован аргумент $\dot{r}/\bar{r}$ при исследовании задач поперечного изгиба, свободных колебаний и устойчивости упругих пластинок с выпуклым контуром и комбинированными граничными условиями (комбинация условий жесткого защемления и шарнирного опирания). В связи с этим целью опубликования настоящей статьи является показать специалистам в области строительной механики новые открывающиеся возможности применения методов интерполяции к решению задач свободного кручения призматических стержней.

Модели и методы

В теории упругости [2] приводится точное решение для определения геометрической жесткости сечения при свободном кручении:

$$I_k = \frac{\pi a^3 b^3}{a^2 + b^2}, \tag{1}$$

где a и b – полуоси эллипса.

Это выражение можно видоизменить следующим образом:

$$I_k = \frac{\pi a^3 b^3}{a^2 + b^2} = \frac{\pi^2 a^2 b^2}{\pi\left(\dfrac{a^2 + b^2}{ab}\right)} = \frac{A^2}{\pi\left(a/b + b/a\right)} = \frac{A^2}{K_f}, \tag{2}$$

где A – площадь эллипса; K_f – коэффициент формы эллипса [17].

$$K_f = \pi\left(a/b + b/a\right) \tag{3}$$

В дальнейшем будем рассматривать приведенную геометрическую жесткость сечения при кручении:

$$i_k = I_k / A^2 = 1/K_f \tag{4}$$

Коэффициент формы для произвольной односвязной плоской области с выпуклым контуром представляется контурным интегралом [17]:

$$K_f = \min \oint_L ds/h, \tag{5}$$

где L – контур области; ds – элемент дуги контура; h – перпендикуляр, опущенный из точки, взятой внутри области на касательную к переменной точке контура (рисунок 1).

K_f является количественной характеристикой формы области. Подробные сведения об этой геометрической характеристики, её изопериметрических свойствах и возможностях ис-

пользования при решении задач технической теории пластинок приведены в монографии [17].

Здесь приведем лишь одно из этих свойств: все множество значений коэффициента формы односвязных плоских областей с выпуклым контуром, представленное в координатах «коэффициент формы – отношение максимального радиуса, вписанной окружности *R*, к минимальному радиусу описанной окружности ρ» ограничено снизу значениями K_f для эллипсов (рисунок 2).

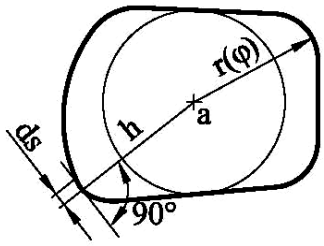

Рисунок 1 – Произвольная односвязная плоская область с выпуклым контуром

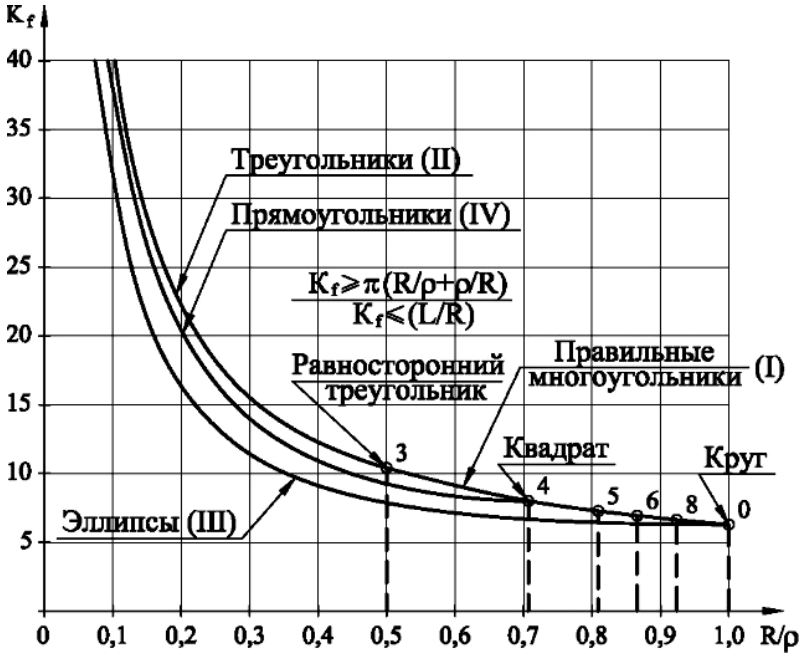

Рисунок 2 – Графики K_f – R/ρ для различных областей

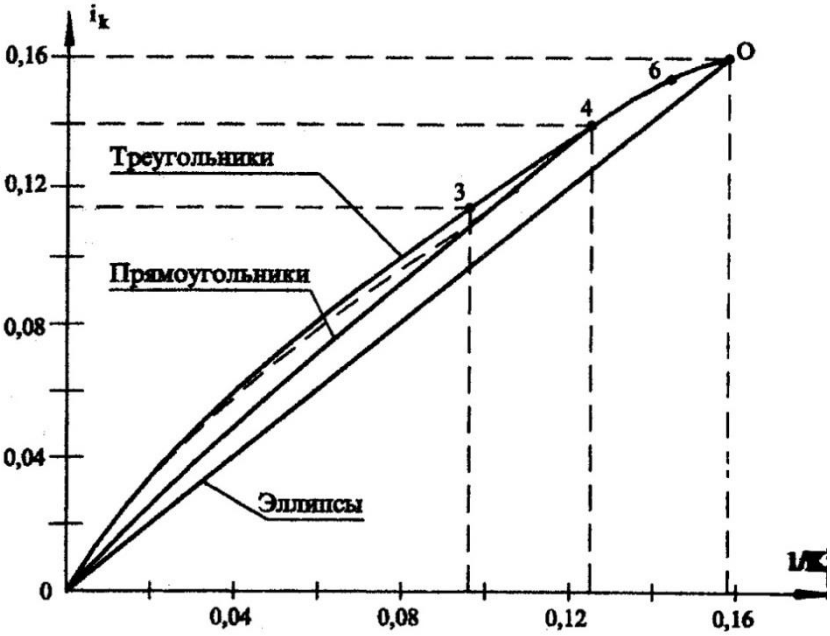

Рисунок 3 – Графики i_k – $1/K_f$: *О – круглое сечение; 6 – шестиугольное сечение; 4 – четырехугольное сечение; 3 – сечение в виде правильного треугольника*

Если построить график изменения приведенной геометрической жесткости эллиптических сечений в зависимости от обратной величины коэффициента формы, то согласно формуле (2) этот график будет представляться прямой линией, проходящей через начало координат под углом 45° (рисунок 3).

В соответствии с вышеуказанным свойством коэффициента формы, все значения приведенной геометрической жесткости для сечений в виде произвольных плоских областей с выпуклым контуром будут располагаться выше этой линии.

Результаты исследования и их анализ

Рассмотрим возможность определения геометрической жесткости эллиптического сечения через отношение конформных радиусов.

Отношение внутреннего к внешнему конформному радиусу для эллипса определяется по формуле [14]:

$$\frac{\dot{r}}{\bar{r}} = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} q^{n(n+1)} \right\}^{-1} \left\{ 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} \right\}^{-1}, \tag{6}$$

где a и b – полуоси эллипса ($a \geq b$);

$$q = \left(\frac{a-b}{a+b} \right)^2. \tag{7}$$

Численные значения этого отношения приведены в таблице 1 (колонка 4). Кроме того, в этой таблице приведены значения коэффициента формы (колонка 2) и его обратной величины (колонка 3).

Таблица 1 – Значения коэффициента формы и отношения конформных радиусов для эллипса

a/b	K_f	$i_k = K_f^{-1}$	$\dot{r}/\bar{r}$	i_k по формуле (8)	Δ, %
1	2	3	4	5	6
1,0	6,283	0,1592	1	0,1592	0
1,2	6,388	0,1565	0,9838	0,1565	0
1,5	6,807	0,1469	0,9245	0,1465	0,27
2,0	7,854	0,1273	0,8080	0,1269	0,31
2,5	9,111	0,1098	0,7063	0,1097	0,09
3,0	10,472	0,0955	0,6241	0,0959	0,42
4,0	13,352	0,0749	0,5038	0,0756	0,92
5,0	16,336	0,0612	0,4215	0,0617	0,82
6,0	19,373	0,0516	0,3621	0,0517	0,19
8,0	25,525	0,0392	0,2822	0,0382	2,55
∞	∞	0	0	0	0

На рисунке 4 показан общий вид и график функции $\dot{r}/\bar{r} = f\left(a/b\right)$ для эллипса.

В колонке 5 таблицы представлены результаты подсчета значений приведенной геометрической жесткости кручения эллиптических сечений по формуле (8), которая получена путем аппроксимации известных точных значений этой величины (колонка 3) линейной зависимостью с использованием аргумента $\dot{r}/\bar{r}$:

$$i_k = \left(168,6 \cdot \dot{r}/\bar{r} - 9,337\right) \cdot 10^{-3} \tag{8}$$

В колонке 6 указаны отклонения этих результатов от точных значений. Как видно, эти отклонения не превосходят одного процента в диапазоне $a/b < 6$.

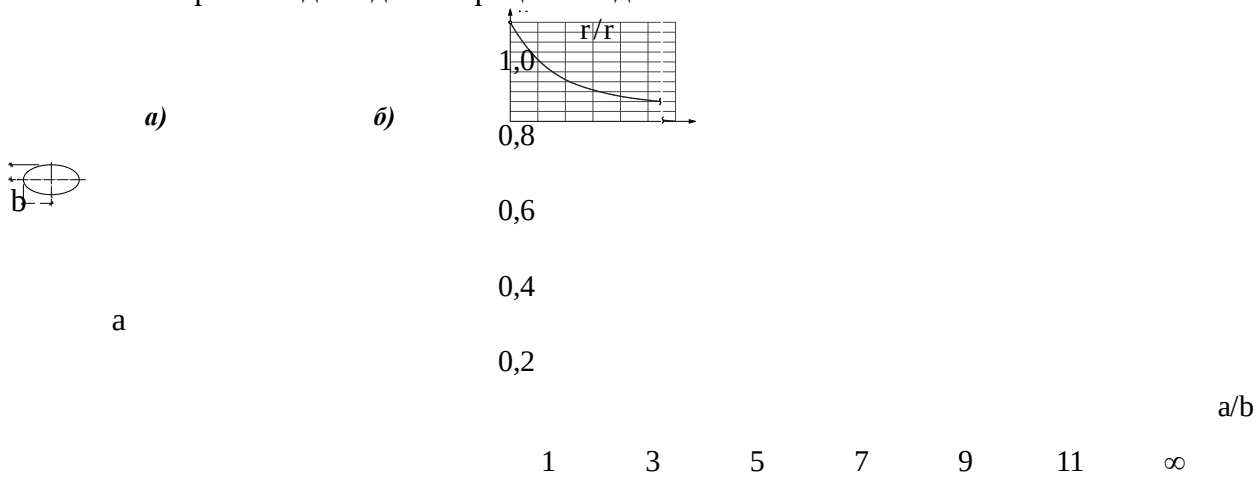

Рисунок 4 – Эллиптическое сечение: а) общий вид, б) график $\dot{r}/\bar{r} = f\left(a/b\right)$

На рисунке 5 показан график функции i_k – $\dot{r}/\bar{r}$ для эллиптического сечения, который оказался схожим при использовании коэффициента формы, изображённым на рисунке 3.

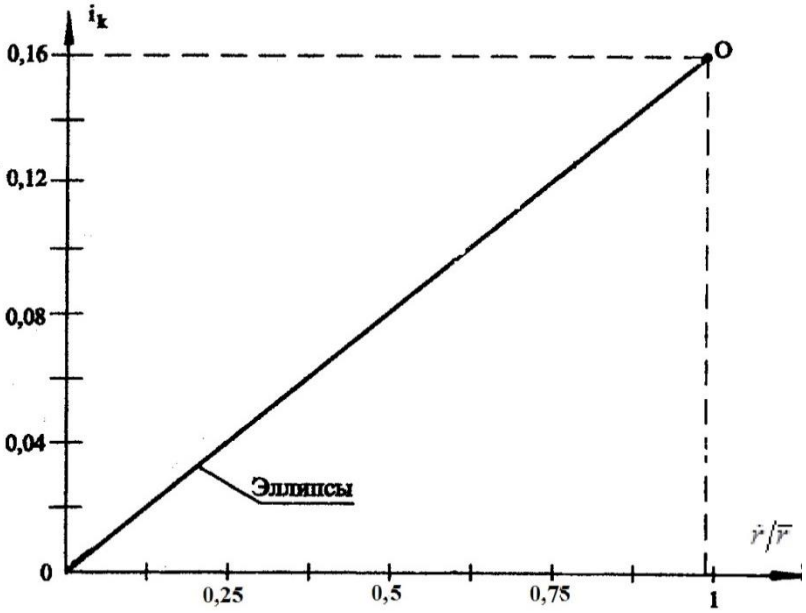

Рисунок 5 - График i_k – $\dot{r}/\bar{r}$

Исследования, проведенные в работах [18-20], показали, что при использовании отношения конформных радиусов в качестве единственного аргумента в задачах поперечного изгиба, свободных колебаний и устойчивости упругих пластинок, точность определения интегральных физических характеристик в этих задачах (максимальный прогиб от действия равномерно распределенной нагрузки, основная частота колебаний в ненагруженном состоянии, критическая сила при всестороннем равномерном сжатии) существенно выше, чем при использовании коэффициента формы. Поэтому при дальнейшем изучении предлагаемого метода применительно к кручению сечений произвольного вида, полученный в этой статье результат может оказаться весьма полезным.

Выводы

1 Точное решение задачи об определении приведенной геометрической жесткости кручения стержней с эллиптическим сечением представлено в зависимости от интегральной геометрической характеристики сечения – коэффициента формы. Получены численные значения приведенной геометрической жесткости сечений в виде эллипсов с различными отношениями полуосей. Графически зависимость i_k – $1/K_f$ представлена в виде прямой линии, проходящей через начало координат под углом 45°.

2 По этим же значениям приведенной геометрической жесткости эллиптических сечений построена аппроксимирующая функция (8) с использованием геометрического аргумента – отношения конформных радиусов (внутреннего к внешнему). Эта аппроксимирующая функция с целью упрощения представлена также линейной зависимостью, которая, однако, не проходит через начало координат. Расчеты, проведенные с ее использованием, показали, что погрешность получаемых результатов в диапазоне $a/b < 6$ не превышает одного процента. Для более вытянутых эллипсов погрешность существенно возрастает.

3 Для выявления общих закономерностей взаимосвязи геометрической жесткости сечений с их формой необходимо провести дополнительные исследования охватывая сечения, широко используемые в строительстве и машиностроении.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Арутюнян Н.Х., Абрамян В.Л. Кручение упругих тел. М.: Физматгиз, 1963. 686 с.

2. Yukitaka Murakami. Torsion of a Bar with Uniform Section // Theory of Elasticity and Stress Concentration. 2016. Chapter 7. doi.org/10.1002/9781119274063.ch7

3. Barber J.R. Torsion of a Prismatic Bar. In: Elasticity // Solid Mechanics and Its Applications. 2004. Vol. 107. pp. 223-238. doi.org/10.1007/0-306-48395-5_16

4. Mohammad Ghomi. Boundary torsion and convex caps of locally convex surfaces // Journal of Differential Geometry. 2017. Vol. 105. Iss. 3. pp. 427-486. doi.org/10.4310/jdg/1488503004

5. Шляхов С.М., Гаврилов Д.Ю. Кручение бруса круглого поперечного сечения с переменной по длине и поперечному сечению пористостью // Научно-технический вестник Брянского государственного университета. 2017. № 2. С. 147-153.

6 Шинкин В.Н. Остаточные напряжения в поперечном сечении круглого бруса при кручении // Актуальные проблемы гуманитарных и естественных наук. 2016. № 4-1. С. 159-165.

7 Шляхов С.М., Кривулина Э.Ф. Определение допускаемой и предельной нагрузок на брус круглого поперечного сечения из пористого материала при кручении // Вестник Саратовского государственного технического университета. 2015. Т. 2. № 1 (79). С. 17-20.

8. Зеленина А.А. Теория кручения призматических тел с моментными напряжениями при больших деформациях // Прикладная механика и техническая физика. 2006. Т. 47. № 4 (278). С. 167-175.

9. Salakhudinov R. G. Torsional Rigidity and Euclidean Moments of a Convex Domain // Quarterly Journal of Mathematics. 2016. Vol. 67. Iss. 4. pp 669–681. doi.org/10.1093/qmath/haw034

10. Коробко В.И. Изопериметрический метод в строительной механике: Теоретические основы изопериметрического метода. М.: АСВ, 1997. 390 с.

11. Коробко В.И., Малых С.Г. Графическое представление границ изменения геометрической жесткости сечений в виде выпуклых фигур // Известия вузов. Машиностроение. 1986. №3. С. 2-7.

12. Korobko V.I., Korobko A.V., Chernyaev A.A. Isoperimetric properties of the torsion rigidity of convex section // Procedia Engineering. Vol. 150. 2016. pp. 1648-1656. doi.org/10.1016/j.proeng.2016.07.146

13. Коробко В.И., Хусточкин А.Н. Изопериметрический метод в задачах устойчивости пластинок. Ростов-на-Дону: Северо-Кавказский научный центр высшей школы, 1994. 144 с.

14. Полиа Г., Сёге Г. Изопериметрические неравенства в математической физике. М.: КомКнига, 2006. 336 с.

15 Chernyaev A. A. Isoperimetric solution to problem of prismatic bar torsion // IOP Conference Series: Earth and Environmental Science. 2017. Vol. 87. 082009. doi :10.1088/1755-1315/87/8/082009

16. Korobko A.V., Savin S. Yu., Balikhina Yu. E. Estimation of geometrical torsion rigidity of triangular and rectangular sections using interpolation method // Lecture Notes in Mechanical Engineering. 2019. pp. 1293-1301. doi.org/10.1007/978-3-319-95630-5_136

17. Коробко А.В. Геометрическое моделирование формы области в двумерных задачах теории упругости. М.: АСВ, 1999. 302 с.

18. Коробко А.В., Черняев А.А. Определение максимального прогиба при поперечном изгибе параллелограммных пластинок с использованием отношения конформных радиусов // Известия высших учебных заведений. Авиационная техника. 2013. №2. С. 19-22.

19. Korobko A., Chernyaev A., Korobko V. Determination of Basic Dynamic Vibration Frequency at Trapezoid Plates Using Conformal Radius Ratio Interpolation Technique // Procedia Engineering. 2017. Vol. 206. pp. 25-30. doi.org/10.1016/j.proeng.2017.10.432

20. Chernyaev A Improving the Accuracy of Geometric Interpolation for Determining Fundamental Frequency of Parallelogram Plates Vibration // Procedia Engineering. 2017. Vol. 206. pp. 31-34. doi.org/10.1016/j.proeng.2017.10.433

REFERENCES

1. Harutyunyan N. C., Abramyan V. L. Kruchenie uprugih tel [Torsion of elastic bodies]. Moscow: Fizmatgiz, 1963. 686 p. (rus)

2. Yukitaka Murakami. Torsion of a Bar with Uniform Section. Theory of Elasticity and Stress Concentration. 2016. Chapter 7. doi.org/10.1002/9781119274063.ch7

3. Barber J.R. Torsion of a Prismatic Bar. In: Elasticity. *Solid Mechanics and Its Applications*. 2004. Vol. 107. pp. 223-238. doi.org/10.1007/0-306-48395-5_16

4. Mohammad Ghomi. Boundary torsion and convex caps of locally convex surfaces. *Journal of Differential Geometry*. 2017. Vol. 105. No. 3. pp. 427-486. doi.org/10.4310/jdg/1488503004

5. Shlyakhov S. M., Gavrilov D. Yu. Kruchenie brusa kruglogo poperechnogo secheniya s peremennoj po dline i poperechnomu secheniyu poristost'yu [Torsion of a bar of round cross-section with variable length and cross-section porosity]. *Journal Scientific and technical of the Bryansk state University*. 2017. No. 2. Pp. 147-153. (rus)

6 Shinkin V. N. Ostatochnye napryazheniya v poperechnom sechenii kruglogo brusa pri kruchenii [Residual stresses in the cross section of a round bar during torsion]. *Actual problems of Humanities and natural Sciences*. 2016. No. 4-1. Pp. 159-165. (rus)

7 Shlyakhov S. M., Krivulina E. F. Opredelenie dopuskaemoj i predel'noj nagruzok na brus kruglogo poperechnogo secheniya iz poristogo materiala pri kruchenii [Determination of permissible and limit loads on a round cross-section beam made of porous material during torsion]. *Bulletin of Saratov state technical University*. 2015. Vol. 2. No 1 (79). Pp. 17-20. (rus)

8. Zelenina A.A. Theory of large-strain torsion of prismatic bodies with moment stresses. *Journal of applied mechanics and technical physics*. 2006. Vol. 47, No. 4. pp 600–607. doi.org/10.1007/s10808-006-0095-z

9. Salakhudinov R. G. Torsional Rigidity and Euclidean Moments of a Convex Domain. *Quarterly Journal of Mathematics*. 2016. Vol. 67. No. 4. pp 669–681. doi.org/10.1093/qmath/haw034

10. Korobko V.I. Izoperimetricheskij metod v stroitel'noj mekhanike: Teoreticheskie osnovy izoperimetricheskogo metoda [Isoperimetric method in structural mechanics: Theoretical foundations of the isoperimetric method]. Moscow: ASV, 1997. 390 p. (rus)

11. Korobko V.I., Malykh S.G. Graficheskoe predstavlenie granic izmeneniya geometricheskoj zhestkosti sechenij v vide vypuklyh figur [Graphic representation of the boundaries of changes in the geometric rigidity of sections in the form of convex figures]. *News of universities. Engineering*. 1986. No. 3. Pp. 2-7. (rus)

12. Korobko V.I., Korobko A.V., Chernyaev A.A. Isoperimetric properties of the torsion rigidity of convex section. *Procedia Engineering*. Vol. 150. 2016. pp. 1648-1656. doi.org/10.1016/j.proeng.2016.07.146

13. Korobko V.I., Khustochkin A.N. Izoperimetricheskij metod v zadachah ustojchivosti plastinok [Isoperimetric method in plastics stability problems]. Rostov-on-Don: North-Caucasian Higher School Research Center, 1994. 144 p. (rus)

14. Polya, G., Szego G. Isoperimetric Inequalities in Mathematical Physics. Princeton University Press. 1951. 279 p.

15 Chernyaev A. A. Isoperimetric solution to problem of prismatic bar torsion // IOP Conference Series: Earth and Environmental Science. 2017. Vol. 87. 082009. doi :10.1088/1755-1315/87/8/082009

16. Korobko A.V., Savin S. Yu., Balikhina Yu. E. Estimation of geometrical torsion rigidity of triangular and rectangular sections using interpolation method // Lecture Notes in Mechanical Engineering. 2019. pp. 1293-1301. doi.org/10.1007/978-3-319-95630-5_136

17. Korobko A.V. Geometricheskoe modelirovanie formy oblasti v dvumernyh zadachah teorii uprugosti [Geometric modeling of the region's form in two-dimensional problems of the theory of elasticity]. Moscow: ASV, 1999. 302 p. (rus)

18. Korobko A.V., Chernyaev A.A. Determination of maximum deflection in transverse bending of parallelogram plates using the conformal radiuses ratio. *Russian Aeronautics*. Vol. 56. No. 2. 2013. pp. 131-134. DOI: 10.3103/S1068799813020049

19. Korobko A., Chernyaev A., Korobko V. Determination of Basic Dynamic Vibration Frequency at Trapezoid Plates Using Conformal Radius Ratio Interpolation Technique. *Procedia Engineering*. 2017. Vol. 206. pp. 25-30. doi.org/10.1016/j.proeng.2017.10.432

20. Chernyaev A Improving the Accuracy of Geometric Interpolation for Determining Fundamental Frequency of Parallelogram Plates Vibration. *Procedia Engineering*. 2017. Vol. 206. pp. 31-34. doi.org/10.1016/j.proeng.2017.10.433

Информация об авторах:

Коробко Андрей Викторович
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева», г. Орел, Россия,
д-р техн. наук, проф., проф. кафедры мехатроники, механики и робототехники,
E-mail: ankor.66@mail.ru

Черняев Андрей Александрович
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева», г. Орел, Россия,
канд. техн. наук, доцент кафедры городского хозяйства и строительства автомобильных дорог,
E-mail: chernyev87@yandex.ru

Лыгина Юлия Евгеньевна
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева», г. Орел, Россия,
аспирантка кафедры строительных конструкций и материалов,
E-mail: raduga-92@mail.ru

Information about authors:

Korobko Andrey V.
Orel State University named after I.S. Turgenev, Orel, Russia,
doctor in tech. sc., prof., prof. of the dep. of mechatronics, mechanics and robotics,
E-mail: ankor.66@mail.ru

Chernyaev Andrey A.
Orel State University named after I.S. Turgenev, Orel, Russia,
candidate in tech. sc., docent, associated prof. of the dep. of urban management and road construction,
E-mail: chernyev87@yandex.ru

Lygina Yuly E.
Orel State University named after I.S. Turgenev, Orel, Russia,
associated prof. of the dep. of building structures and materials,
E-mail: raduga-92@mail.ru