

В.Л. МОНДРУС<sup>1</sup>, Р.В. ПОПОВ<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет (НИУ МГСУ),  
г. Москва, Российская Федерация

## ВЕРОЯТНОСТНЫЙ РАСЧЕТ ЖЕЛЕЗОБЕТОННОЙ БАЛКИ НА СТОХАСТИЧЕСКОМ УПРУГОМ ОСНОВАНИИ С УЧЕТОМ ТРЕЩИНООБРАЗОВАНИЯ

**Аннотация.** В статье рассматривается методика вероятностного расчета железобетонной балки конечной длины, свободно лежащей на стохастическом упругом основании с двумя коэффициентами постели при действии случайно распределенной вибрационной нагрузки. Коэффициенты постели и внешняя нагрузка рассматриваются как случайные гауссовские стационарные функции координаты балки с заданными корреляционными функциями. Для решения дифференциального уравнения вынужденных колебаний балки используется обобщенный метод Бубнова-Галеркина в сочетании с статистическим методом Монте-Карло. Учет трещинообразования выполняется по двухэтапной схеме. На первом этапе определяется напряженно-деформированное состояние балки без трещин и выявляются сечения, в которых выполняется условие трещинообразования. На втором этапе для каждой реализации формируется кусочно-переменная функция жесткости, после чего выполняется перерасчет прогибов и изгибающих моментов. В результате определяются математические ожидания, стандарты, вероятности трещинообразования и вероятности превышения допустимого прогиба по длине балки. Численный расчет показал, что в рамках рассматриваемого примера, учет трещинообразования слабо влияет на вероятностные характеристики прогибов, однако существенно изменяет математические ожидания и стандарты изгибающих моментов вследствие перераспределения внутренних усилий.

**Ключевые слова:** упругое стохастическое основание, метод Монте-Карло, модель Власова-Пастернака, вынужденные колебания, коэффициент постели, корреляционная функция, балка конечной длины

**Для цитирования:** Мондрус В.Л., Попов Р.В. Вероятностный расчет железобетонной балки на стохастическом упругом основании с учетом трещинообразования // Строительство и реконструкция. 2026. №4. С. 47-57. DOI: 10.33979/2073-7416-2026-126-4-47-57. EDN: SHQXSV

© Мондрус В.Л., Попов Р.В., 2026



Submitted for possible open access publication under the terms and conditions of the Creative Commons NonCommercial license <https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>

## Research Article

V.L. MONDRUS<sup>1</sup>, R.V. POPOV<sup>1</sup><sup>1</sup>Moscow State University of Civil Engineering (National Research University) (MGSU), Moscow, Russian Federation**PROBABILISTIC ANALYSIS OF A REINFORCED CONCRETE BEAM ON A STOCHASTIC ELASTIC FOUNDATION WITH CONSIDERATION OF CRACKING**

**Abstract.** The article considers a methodology for the probabilistic analysis of a finite-length reinforced concrete beam freely resting on a stochastic elastic foundation with two bed coefficients under the action of a randomly distributed vibration load. The bed coefficients and the external load are treated as random Gaussian stationary functions of the beam coordinate with prescribed correlation functions. To solve the differential equation of the beam's forced vibrations, the generalized Bubnov-Galerkin method is used in combination with the statistical Monte Carlo method. Cracking is taken into account using a two-stage scheme. At the first stage, the stress-strain state of the uncracked beam is determined, and the sections in which the cracking condition is satisfied are identified. At the second stage, a piecewise-variable stiffness function is formed for each realization, after which the deflections and bending moments are recalculated. As a result, the mathematical means, standard deviations, cracking probabilities, and probabilities of exceeding the allowable deflection along the beam length are determined. The numerical analysis showed that, within the considered example, accounting for cracking has only a minor effect on the probabilistic characteristics of deflections; however, it substantially changes the mathematical means and standard deviations of bending moments due to the redistribution of internal forces.

**Keywords:** stochastic elastic foundation, Monte Carlo method, Vlasov-Pasternak model, forced vibrations, bed coefficient, correlation function, finite-length beam.

**For citation:** Mondrus V.L., Popov R.V. Probabilistic analysis of a reinforced concrete beam on a stochastic elastic foundation with consideration of cracking. *Building and Reconstruction*. 2026; 4: 47-57. DOI: 10.33979/2073-7416-2026-126-4-47-57. EDN: SHQXSV

**Введение**

Железобетонные балки, взаимодействующие с упругим основанием, широко применяются в строительной. В ряде случаев такие конструкции работают в условиях динамических воздействий, вызванных, например, работой технологического оборудования, движением транспортных средств или прохождением метрополитена мелкого заложения. При этом существенное влияние на напряженно-деформированное состояние конструкции оказывают как физико-механические свойства основания, так и особенности нелинейной работы железобетона, связанные с образованием трещин.

Вопросы статической работы конструкций на стохастическом упругом основании изучен достаточно подробно. В работе [1] рассмотрены задачи изгиба бесконечной плиты и бесконечной балки, а в [2-4] вопросы статического расчета железобетонной балки, расположенных на стохастическом упругом основании Власова-Пастернака. В этих работах коэффициенты податливости основания и рассматриваются как случайные стационарные функции координаты балки, изменяющиеся по длине случайным образом, а стохастическое дифференциальное уравнение изогнутой оси балки интегрируется методом малого параметра с последующим применением метода спектральных преобразований.

Особое место при расчете конструкций на стохастическом основании занимает метод статистического моделирования Монте-Карло. В статье [5] авторами предложен алгоритм расчета собственных частот балок конечной длины, лежащих на стохастическом двухпараметрическом основании, методом статистического моделирования Монте-Карло.

Предложенный алгоритм численного метода расчета позволяет учесть взаимную коррелированность случайных функций коэффициентов постели и достаточно просто получить статистические характеристики собственных частот колебаний балки. А в статье [6] представлен алгоритм расчета балок конечной длины по аналогичной методике, но уже на вынужденные колебания, в том числе с применением распределения Стюдента и Лапласа вместо нормально, которые позволяют моделировать ситуации с ограниченным количеством данных о грунте.

Научная новизна данной работы заключается в построении двухэтапной вероятностной схемы расчета, в которой на первом этапе определяется напряженно-деформированное состояние балки без учета трещин, а на втором этапе выполняется перерасчет с кусочно-переменной жесткостью на участках выявленного трещинообразования для каждой реализации случайных параметров.

### Модели и методы

Рассмотрим балку конечной длины, свободно лежащую на стохастическом упругом основании с двумя коэффициентами постели. На основании принципа Даламбера дифференциальное уравнение вынужденных колебаний балки, на которую действует вибрационная нагрузка, изменяющаяся по координате по случайному закону, когда в железобетонной балке возникают трещины, можно записать так:

$$\begin{aligned} (m_s + m_z) \cdot \frac{\partial^2 \tilde{w}(x, t)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( B(x) \frac{\partial^2 \tilde{w}(x, t)}{\partial x^2} \right) + \tilde{C}_1(x) \tilde{w}(x, t) - \tilde{C}_2(x) \frac{\partial^2 \tilde{w}(x, t)}{\partial x^2} = \\ = \tilde{p}(x) \sin \theta t, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $m_s$  – погонная масса балки;

$m_z$  – погонная масса присоединенного грунта;

$B(x)$  – функция жесткости железобетонной балки;

$\tilde{w}(x, t)$  – прогиб балки в сечении с координатой  $x$  в момент времени  $t$ ;

$\tilde{C}_1(x)$ ,  $\tilde{C}_2(x)$  – коэффициенты податливости основания, которые рассматриваются как нормально распределенные случайные стационарные функции координаты  $x$  с математическими ожиданиями  $\langle C_1 \rangle$  и  $\langle C_2 \rangle$ , корреляционными функциями  $K_{C_1}(x - x')$  и  $K_{C_2}(x - x')$ . Согласно исследованиям [7] и [8] рекомендовано принимать корреляционную функцию коэффициента постели в виде:

$$K_{C_i}(x - x') = D_{C_i} \cdot e^{-\nu_i |x - x'|} \cos[\varphi_i(x - x')], \quad \nu_i > 0, \varphi_i > 0, \quad (2)$$

где  $D_{C_i}$  – дисперсия функции  $\tilde{C}_i(x)$ ;

$\nu_i$  – коэффициенты, характеризующий затухание корреляционных свойств по мере удаления точек  $x$  и  $x'$  друг от друга,  $\varphi_i$  – коэффициенты, отражающий скрытые периодичности корреляционных свойств основания, методика определения этих коэффициентов приведена, например, в работе [9].

Для задания взаимно-корреляционных функций введен такой же «экспоненциально-гармонический» тип, как для корреляционных функций  $K_{C_i}(x - x')$ :

$$K_{C_{i_1} C_{i_2}}(x - x') = \rho \sqrt{D_{C_{i_1}} D_{C_{i_2}}} e^{-\nu_{ij} |x - x'|} \cos[\varphi_{ij}(x - x')], \quad \nu_{ij} > 0, \varphi_{ij} > 0, \quad (3)$$

где  $\rho = \frac{K_{c_1 c_2}(0)}{\sqrt{D_{c_1} D_{c_2}}}$  – коэффициент корреляции при нулевом сдвиге, который принимает

значения в диапазоне  $(0 \leq |\rho| \leq 1)$ . Общее свойство стационарных процессов в общем случае:  $K_{c_1 c_2}(x - x') = K_{c_2 c_1}(-(x - x'))$  [9-10], однако выбранная взаимно-корреляционная функция (3) является четной функцией, тогда  $K_{c_2 c_1}(-(x - x')) = K_{c_2 c_1}(x - x')$ , а значит в частном случае получаем  $K_{c_1 c_2}(x - x') = K_{c_2 c_1}(x - x')$ .

$\tilde{p}(x)$  рассматривается как нормально распределенная случайная стационарная функция координаты  $x$  с математическим ожиданием  $M\{\tilde{p}(x)\} = p = \text{const}$ , корреляционной функцией  $K_{\tilde{p}(x)} = \sigma^2 \cdot e^{-\beta|x-x'|} \cdot \cos[\gamma(x-x')]$ , где  $\sigma$  – дисперсия случайной функции  $\tilde{p}(x)$ , а  $\beta$  и  $\gamma$  – параметры корреляционной функции, характеризующие затухание смешанных дисперсий в различных сечениях в зависимости от разности абсцисс.

Решение дифференциального уравнения будем искать в виде:

$$\tilde{w}(x, t) = \tilde{X}(x) \cdot \sin \theta t \quad (4)$$

Так как положение трещин заранее неизвестно, расчет выполняется в два этапа для каждой реализации входных случайных параметров. На первом этапе балка рассматривается как элемент с начальной изгибной жесткостью [4]:

$$B_0(R) = 0,85 I_{red}(R) \cdot E_b(R), \quad (5)$$

где  $I_{red}(R) = I_b + E_s / E_b(R) \cdot I_s$  – приведенный момент инерции;

$E_b(R) = 550000 \cdot R / (270 + R)$  – начальный модуль упругости бетона

После линейризации функции математическое ожидание и дисперсия начального модуля упругости бетона [4]:

$$E_b = \frac{550000 \cdot \langle R \rangle}{270 + \langle R \rangle}; D_{E_b} = \left( \frac{550000 \cdot 270}{270 + \langle R \rangle^2} \right)^2 \cdot D_R \quad (6)$$

Тогда вероятностные характеристики распределения начальной жесткости равны:

$$\langle B_0(R) \rangle = 0,85 I_{red} \cdot \langle E_b \rangle; D_{B_0(R)} = (0,85 I_{red})^2 D_{E_b} \quad (7)$$

Подставив уравнение (4) в (1) и сократив обе части на  $\sin \theta t$ , и приведя подобные можно записать уравнение без учета образования трещин:

$$B_0(R) \cdot \tilde{X}^{IV}(x) + (\tilde{C}_1(x) - \theta^2 \cdot (m_\delta + m_\varepsilon)) \cdot \tilde{X}(x) - \tilde{C}_2(x) \cdot \tilde{X}''(x) = \tilde{p}(x) \quad (8)$$

Применим процедуру обобщенного метода Бубнова-Галеркина на отрезке  $[-l, l]$  для приближенного решения дифференциального уравнения. Искомую амплитудную функцию прогибов  $\tilde{X}(x)$  представим в виде конечной суммы:

$$\tilde{X}(x) = \sum_{m=1}^m \tilde{A}_m \psi_m(x), \quad (9)$$

где  $\psi_m(x)$  – неслучайные аппроксимирующие функции, каждая из которых удовлетворяет граничным условиям;

$\tilde{A}_m$  – случайные коэффициенты. Целью решения является определение их вероятностных характеристик.

Подставим уравнение (9) в (8), а затем, умножив получившиеся тождество на функцию  $\psi_n(x)$  (условие ортогональности невязки), и вводя упрощающие обозначения:

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_{m,n} = B_0(R) \int_{-l}^l \psi_m^{IV}(x) \psi_n(x) dx + \int_{-l}^l \tilde{C}_1(x) \psi_m(x) \psi_n(x) dx - \\ - \int_{-l}^l \tilde{C}_2(x) \psi_m^{II}(x) \psi_n(x) dx, \end{aligned} \quad (10)$$

$$a_{m,n} = \int_{-l}^l \psi_m(x) \psi_n(x) dx, \quad (11)$$

$$\tilde{\alpha}_{i,p} = \int_{-l}^l \tilde{p}(x) \psi_i(x) dx, (i = 1, 2, \dots, m). \quad (12)$$

Получаем стохастическую систему алгебраических уравнений:

$$\left\{ \begin{aligned} \sum_1^m [\tilde{\alpha}_{m,1} - a_{m,1}(m_\delta + m_\varepsilon) \cdot \theta^2] \tilde{A}_m &= \tilde{\alpha}_{1,p} \\ &\dots \\ &\dots \\ \sum_1^m [\tilde{\alpha}_{m,n} - a_{m,n}(m_\delta + m_\varepsilon) \cdot \theta^2] \tilde{A}_m &= \tilde{\alpha}_{m,p} \end{aligned} \right. \quad (13)$$

Математическое ожидание коэффициентов  $\tilde{\alpha}_{m,n}$  выражается согласно теории случайных функций следующим образом и не будет зависеть от взаимной корреляции между  $\tilde{C}_1(x)$  и  $\tilde{C}_2(x)$ :

$$\begin{aligned} M\{\tilde{\alpha}_{m,n}\} = \langle B_0(R) \rangle \int_{-l}^l \psi_m^{IV}(x) \psi_n(x) dx + \int_{-l}^l \langle C_1 \rangle \psi_m(x) \psi_n(x) dx - \\ - \int_{-l}^l \langle C_2 \rangle \psi_m^{II}(x) \psi_n(x) dx \end{aligned} \quad (14)$$

Дисперсия коэффициента  $\tilde{\alpha}_{m,n}$  для случая, когда  $\tilde{C}_1(x)$  и  $\tilde{C}_2(x)$  взаимно коррелированы, а случайная величина  $R$ , определяющая начальную жесткость балки  $B_0(R)$  статистически независима от случайных функций коэффициентов постели, запишется в виде:

$$\begin{aligned} D_{\tilde{\alpha}_{m,n}} = D_{B_0(R)} \left( \int_{-l}^l \psi_m^{IV}(x) \psi_n(x) dx \right)^2 + \iint_{-l-l}^{l+l} [K_{C_1}(x-x') \psi_m(x) \psi_m(x') + \\ + K_{C_2}(x-x') \psi_m^{II}(x) \psi_m^{II}(x') - K_{C_1 C_2}(x-x') \psi_m(x) \psi_m^{II}(x') - \\ - K_{C_2 C_1}(x-x') \psi_m^{II}(x) \psi_m(x')] \psi_n(x) \psi_n(x') dx dx' \end{aligned} \quad (15)$$

Выражение для определения математического ожидания коэффициентов  $\tilde{\alpha}_{i,p}$ :

$$M\{\tilde{\alpha}_{i,p}\} = \langle p \rangle \int_{-l}^l \psi_i(x) dx \quad (16)$$

Для вычисления дисперсий коэффициентов  $\tilde{\alpha}_{i,p}$ :

$$D_{\alpha_{i,p}} = \sigma^2 \iint_{-l-l}^{l,l} \psi_i(x) \psi_i(x') e^{-\beta|x-x'|} \cdot \cos[\gamma(x-x')] dx dx' \quad (17)$$

После решения системы (13) методом Монте-Карло для каждой  $s$ -й реализации определяются амплитудные прогибы балки, а также изгибающие моменты без учета трещинообразования:

$$\tilde{X}^{(s)}(x) = \sum_1^m \tilde{A}_m^{(s)} \psi_m(x); \tilde{M}^{(s)}(x) = B_0^{(s)}(R) \tilde{X}^{(s)}(x) \quad (18)$$

Далее определяется в каких сечениях балки возникнут трещины для каждой реализации по условию трещинообразования:

$$|\tilde{M}^{(s)}(x)| \geq M_{crc}(R, R_{bt}), \quad (19)$$

где  $M_{crc}(R, R_{bt}) = R_{bt} W_{pl}(R)$

После образования трещин жесткость балки на участках с трещинами определяется выражением [4]:

$$B_{crc}(R) = A_s h_0^2 E_s \frac{10\mu_s n(R)}{1,15 + 18\mu_s n(R) + 6\mu_s' n(R)}, \quad (20)$$

где  $n(R) = \frac{E_s}{E_b(R)}$ ;  $\mu_s = \frac{A_s}{bh_0}$ ;  $\mu_s' = \frac{A_s'}{bh_0}$

Тогда для каждой реализации метода Монте-Карло по длине балки формируется кусочно-переменная функция жесткости:

$$B^{(s)}(x) = \begin{cases} B_0^{(s)}, & \text{на участке без трещин} \\ B_{crc}^{(s)}, & \text{на участках с трещинами} \end{cases} \quad (21)$$

Для каждой реализации после определения функции жесткости  $B^{(s)}(x)$  уравнение (8) запишется:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} (B^{(s)}(x) \cdot \tilde{X}^{(s)}(x)) + (\tilde{C}_1^{(s)}(x) - \theta^2 \cdot (m_\sigma + m_z)) \cdot \tilde{X}^{(s)}(x) - \tilde{C}_2^{(s)}(x) \cdot \tilde{X}^{(s)}(x) = \tilde{p}^{(s)}(x) \quad (22)$$

Искомую функцию  $\tilde{X}(x)$  вновь представим в виде конечной суммы:

$$\tilde{X}^{(s)}(x) = \sum_1^m \tilde{A}_m^{(s,crc)} \psi_m(x), \quad (23)$$

где  $\tilde{A}_m^{(s,crc)}$  – случайные коэффициенты разложения после учета трещинообразования.

Подставим уравнение (23) в (22), а затем, умножив получившиеся тождество на функцию  $\psi_n(x)$ , и вводя упрощающее обозначение:

$$\tilde{k}_{m,n}^{(s)} = \alpha_{m,n}^{(s)} + \int_{-l}^l (B^{(s)}(x) - B_0^{(s)}) \psi_m^{IV}(x) \psi_n(x) dx \quad (24)$$

Получим систему алгебраических уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_1^m [\tilde{k}_{m,1}^{(s)} - a_{m,1} (m_\delta + m_\varepsilon) \cdot \theta^2] \tilde{A}_m^{(s,crs)} = \tilde{\alpha}_{1,p}^{(s)} \\ \dots \\ \sum_1^m [\tilde{k}_{m,n}^{(s)} - a_{m,n} (m_\delta + m_\varepsilon) \cdot \theta^2] \tilde{A}_m^{(s,crs)} = \tilde{\alpha}_{m,p}^{(s)} \end{array} \right. \quad (25)$$

В итоге после решения системы (25) получаем соответствующие прогибы и изгибающие моменты с учетом трещинообразования по соотношениям (18). Так как после перехода к кусочно-переменной жесткости внутренние усилия по длине балки перераспределяются, при необходимости для каждой реализации может быть выполнено итерационное уточнение зон трещинообразования. Для этого вновь проверяется условие (19) после чего уточняются границы с жесткостью  $B_{crs}^{(s)}$ . Процесс продолжается до тех пор, пока схема расположения трещин для данной реализации не перестанет изменяться. В данной статье в первом приближении был произведен только один перерасчет: сначала без трещин, затем с трещинами на найденных участках.

Далее после статистической обработки результатов в сечениях балки строятся эпюры математических ожиданий и стандартов, а также гистограммы распределения в наиболее опасном сечении амплитудной функции прогибов для варианта без трещин и с учетом трещинообразования.

Вероятность возникновения трещин в сечении:

$$P_{crs}(x) = \frac{1}{N} \sum_{s=1}^N I_{crs}^{(s)}(x), \quad (26)$$

$$\text{где } I_{crs}^{(s)}(x) = \begin{cases} 1, \text{ если в } s\text{-й реализации в сечении } x \text{ образовалась трещина} \\ 0, \text{ если трещина не образовалась} \end{cases}$$

Вероятность превышения допустимого прогиба в сечении:

$$P_{[w]}(x) = \frac{1}{N} \sum_{s=1}^N I_{[w]}^{(s)}(x), \quad (27)$$

$$\text{где } I_{[w]}^{(s)}(x) = \begin{cases} 1, \text{ если } \tilde{X}^{(s)}(x) > [w] \\ 0, \text{ если } \tilde{X}^{(s)}(x) \leq [w] \end{cases}$$

### Результаты исследования и их анализ

Введем безразмерную координату  $\xi = \frac{x}{l}$ . Искомую функцию  $\tilde{X}(\xi)$  будем искать в виде суммы двух аппроксимирующих функций:

$$\tilde{X}(\xi) = \tilde{A}_1 \psi_1(\xi) + \tilde{A}_2 \psi_2(\xi), \quad (28)$$

где  $\tilde{A}_1$  и  $\tilde{A}_2$  – случайные числа, а  $\psi_1(\xi)$  и  $\psi_2(\xi)$  – неслучайные функции, выбранные в соответствии с граничными условиями.

Так как рассматривается свободно лежащая балка конечной длины, функции  $\psi_1(\xi)$  и  $\psi_2(\xi)$  будут выбираться из условия равенства нулю в сечениях  $\xi = \pm 1$  их вторых и третьих производных (рис.1).

$$\psi_1(\xi) = \xi^6 - 5\xi^4 + 15\xi^2 + 15 \quad (29)$$

$$\psi_2(\xi) = \xi^7 - 4,2\xi^5 + 7\xi^3 \quad (30)$$

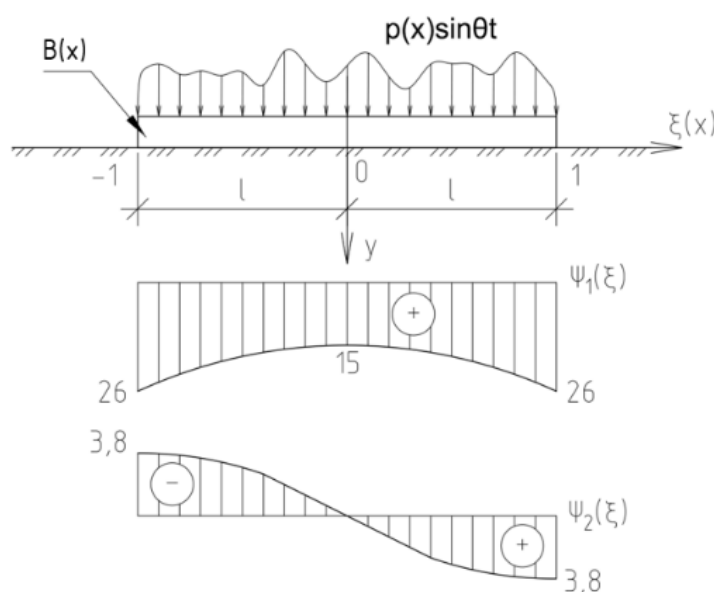


Рисунок 1 -  $\psi_1(\xi)$  и  $\psi_2(\xi)$  – неслучайные функции, выбранные в соответствии с граничными условиями

Расчет стохастической задачи (13, 25) по предложенной методике выполнялся в среде MATLAB R2024a со следующими исходными данными:  $l = 10 \text{ м}$ ,  $m_\delta = 1500 \text{ кг/м}$ ,  $m_z = 200 \text{ кг/м}$ ,  $C_1 = 1,5 \cdot 10^4 \text{ кН/м}^2$ ,  $C_2 = 0,5 \cdot 10^4 \text{ кН}$ ,  $D_{C_1} = 25 \cdot 10^6 \left( \text{кН/м}^2 \right)^2$ ,  $D_{C_2} = 2,5 \cdot 10^6 \text{ кН}^2$ ,  $R = 250 \text{ кгс/см}^2$ ,  $D_R = 625 \left( \text{кгс/см}^2 \right)^2$ ,  $R_{bt} = 16 \text{ кгс/см}^2$ ,  $D_{Rbt} = 5,76 \left( \text{кгс/см}^2 \right)^2$ , ширина балки  $b = 0,25 \text{ м}$ , высота балки  $h = 0,5 \text{ м}$ ,  $h_0 = 0,45 \text{ м}$ , площадь растянутой арматуры 4d20  $A_s = 1256 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2$ , площадь сжатой арматуры 2d16  $A'_s = 402 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2$ , предельно допустимый прогиб  $[w] = 0,08 \text{ м}$ ,  $\nu_1 = \nu_2 = \nu_{12} = 0,5 \text{ м}^{-1}$ ,  $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_{12} = 0,3 \text{ м}^{-1}$ ,  $\theta = 15 \text{ с}^{-1}$ ,  $p = 700 \text{ кН/м}$ ,  $\sigma^2 = 10^4 \text{ кН}^2 / \text{м}^2$ ,  $\beta = 0,5$ ,  $\gamma = 0,3$ ,  $\rho = 0,6$ , число испытаний  $N = 30000$ , шаг рассматриваемых сечений по безразмерной координате  $\Delta\xi = 0,05$ .

В результате численного расчета получены эпюры вероятностных характеристик прогибов и изгибающих моментов (рис. 2), а также эпюры вероятностей образования трещин и превышения предельно допустимого прогиба (рис. 3).

В то же время математические ожидания и стандарты прогибов изменяются незначительно. Это можно объяснить тем, что в рассматриваемой задаче форма деформирования балки в значительной степени определяется работой упругого основания и инерционными силами, тогда как снижение изгибной жесткости вследствие трещинообразования влияет главным образом на локальные внутренние усилия.

В рассматриваемом примере образование трещин происходит преимущественно в центральной части балки, где вероятность трещинообразования достигает максимальных значений. После учета трещинообразования наблюдается существенное снижение математических ожиданий и стандартов изгибающих моментов, что связано с уменьшением изгибной жесткости трещиноватых участков и перераспределением внутренних усилий.

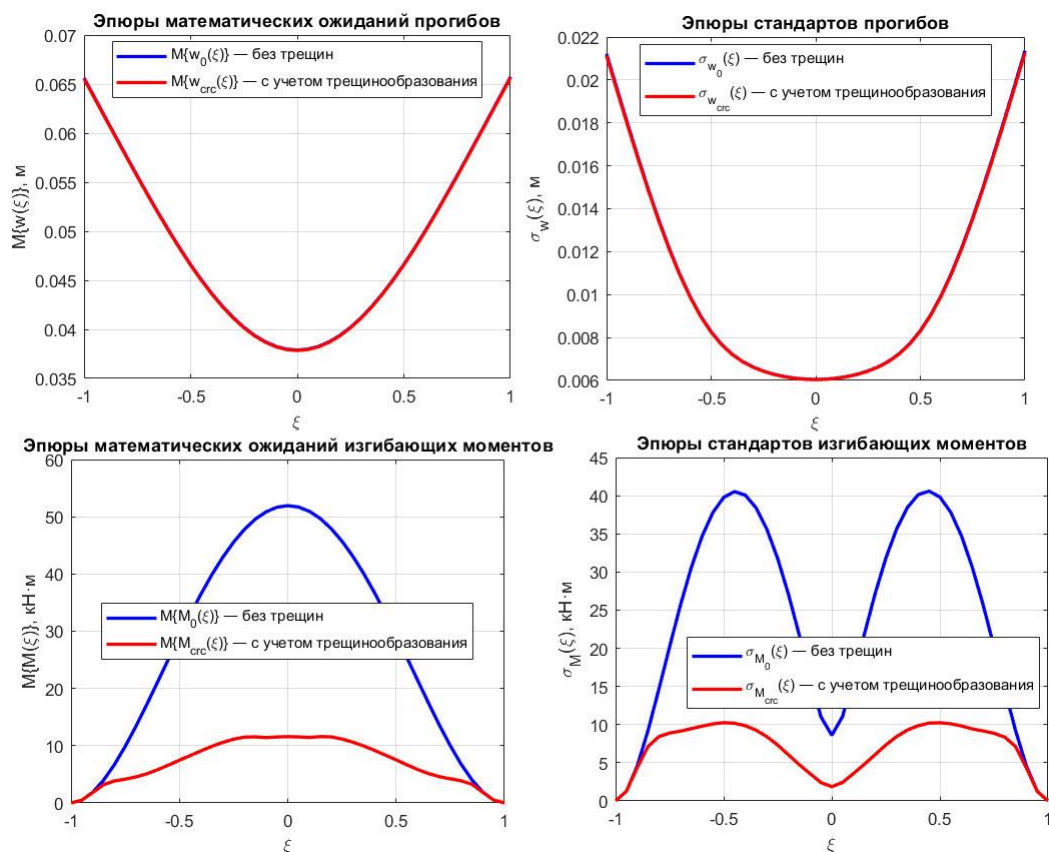


Рисунок 2 - Эпюры математических ожиданий и стандартов амплитудных прогибов и изгибающих моментов

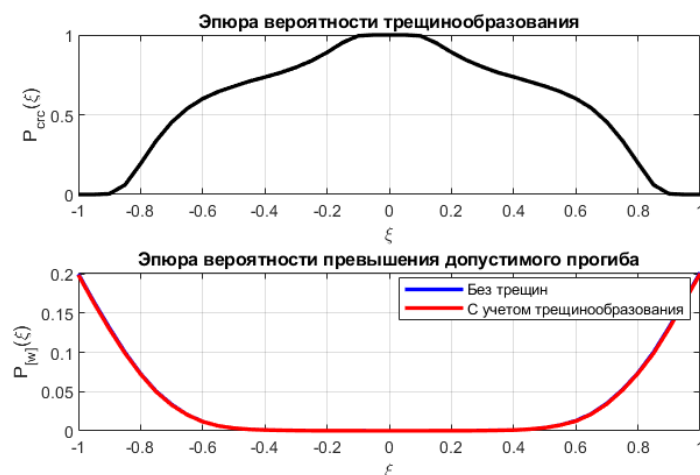


Рисунок 3 - Эпюры вероятности трещинообразования и превышения допустимого прогиба

Также надо иметь в виду, что полученные количественные оценки относятся к выбранному набору исходных параметров и к двухчленному аппроксимационному представлению функции  $\tilde{X}(\xi)$ .

Таким образом, в рамках рассматриваемого примера трещинообразование является более значимым фактором для оценки внутренних усилий и зон повреждаемости, чем для оценки прогибов балки.

### Заключение

1. С использованием метода статистического моделирования Монте-Карло разработана методика расчета балки конечной длины на стохастическом упругом основании с двумя коэффициентами постели с учетом трещинообразования основанная на двухэтапном алгоритме: первоначальном расчете балки без трещин и последующем перерасчете для балки с кусочно-переменной жесткостью на участках выявленного трещинообразования.

2. В рамках рассматриваемого примера учет трещинообразования слабо влияет на математические ожидания и стандарты прогибов балки, но существенно изменяет статистические характеристики изгибающих моментов.

3. Учет трещинообразования необходим прежде всего для корректной оценки перераспределения внутренних усилий, вероятности возникновения трещин и локального снижения жесткости балки.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Соболев Д.Н. К расчету конструкций, лежащих на статистически неоднородном основании при помощи модели с двумя коэффициентами постели // *Строительная механика и расчет сооружений*. 1975. № 3. С. 27–31.
2. Деминов П.Д. Оценка вероятности образования запредельных прогибов после образования трещин в железобетонной балке на стохастическом основании // *Строительство и реконструкция*. 2022. № 1(99). С. 3–10. DOI: 10.33979/2073-7416-2022-99-1-3-10. EDN: YKUZBQ.
3. Деминов П.Д. Оценка вероятности разрушения железобетонной балки, лежащей на стохастическом упругом основании с двумя коэффициентами податливости, по наклонному сечению от поперечной силы // *Строительство и реконструкция*. 2021. № 1(93). С. 16–25. DOI: 10.33979/2073-7416-2021-93-1-16-25. EDN: PVGBXC.
4. Деминов П.Д. Оценка вероятности возникновения недопустимых прогибов в железобетонной балке, лежащей на стохастическом основании с двумя коэффициентами постели, под действием нестационарной случайной нагрузки // *Известия высших учебных заведений. Технология текстильной промышленности*. 2019. № 4(382). С. 48–54. EDN: CVMVRR.
5. Мондрус В.Л., Попов Р.В. Частоты собственных колебаний балки на стохастическом упругом основании // *Промышленное и гражданское строительство*. 2025. № 9. С. 12–19. DOI: 10.33622/0869-7019.2025.09.12-19. EDN: OKDKIN.
6. Мондрус В.Л., Попов Р.В. Вынужденные колебания балки конечной длины на стохастическом упругом основании под действием стационарной случайной нагрузки // *Academia. Архитектура и строительство*. 2026. № 1. С. 133–142. DOI: 10.22337/2077-9038-2026-1-133-142. EDN: HADCOJ.
7. Болотин В.В. Об упругих деформациях подземных трубопроводов, прокладываемых в статистически неоднородном грунте // *Строительная механика и расчет сооружений*. 1965. № 1. С. 4–8.
8. Благонядин В.Л., Кудрявцев Е.П. Статистическое исследование деформаций песчаных оснований и трубопроводов подземных волноводных линий связи // *Доклады научно-технической конференции по итогам научно-исследовательских работ за 1964–1965 г. Секция динамики и прочности машин*. М.: МЭИ, 1965. С. 78–86.
9. Яглом А.М. Корреляционная теория стационарных случайных функций с примерами из метеорологии. Л.: Гидрометеиздат, 1981. С. 121–122, 129.

### REFERENCES

1. Sobolev D.N. On the calculation of structures resting on a statistically inhomogeneous foundation using a model with two coefficients of subgrade reaction. *Structural Mechanics and Design of Structures*, 1975, No. 3, pp. 27–31. (In Russ.)
2. Deminov P.D. Assessment of the probability of excessive deflections after crack formation in a reinforced concrete beam on a stochastic foundation. *Building and Reconstruction*, 2022, No. 1(99), pp. 3–10. (In Russ.) DOI: 10.33979/2073-7416-2022-99-1-3-10, EDN: YKUZBQ
3. Deminov P.D. Assessment of the probability of failure of a reinforced concrete beam resting on a stochastic elastic foundation with two compliance coefficients, due to shear force in an inclined section. *Building and Reconstruction*, 2021, No. 1(93), pp. 16–25. (In Russ.) DOI: 10.33979/2073-7416-2021-93-1-16-25, EDN: PVGBXC

4. Deminov P.D. Assessment of the probability of unacceptable deflections in a reinforced concrete beam resting on a stochastic foundation with two coefficients of subgrade reaction, under a non-stationary random load. *Proceedings of Higher Educational Institutions. Technology of the Textile Industry*, 2019, No. 4(382), pp. 48-54. (In Russ.) EDN: CVMVRR
5. Mondrus V.L., Popov R.V. Natural frequencies of a beam on a stochastic elastic foundation. *Industrial and Civil Engineering*, 2025, No. 9, pp. 12-19. (In Russ.) DOI: 10.33622/0869-7019.2025.09.12-19, EDN: OKDKIN
6. Mondrus V.L., Popov R.V. Forced vibrations of a beam of finite length on a stochastic elastic foundation under a stationary random load. *Academia. Architecture and Construction*, 2026, No. 1, pp. 133–142. (In Russ.) DOI: 10.22337/2077-9038-2026-1-133-142, EDN: HADCOJ
7. Bolotin V.V. On elastic deformations of underground pipelines laid in statistically inhomogeneous soil. *Structural Mechanics and Design of Structures*, 1965, No. 1, pp. 4-8. (In Russ.)
8. Blagonadezhin V.L., Kudryavtsev E.P. Statistical investigation of deformations of sandy foundations and pipelines of underground waveguide communication lines. *Proceedings of the Scientific and Technical Conference on the Results of Research Work for 1964-1965. Section on Machine Dynamics and Strength*. Moscow: MPEI, 1965, pp. 78-86.
9. Yaglom A.M. Correlation Theory of Stationary Random Functions with Examples from Meteorology. Leningrad: Gidrometeoizdat, 1981, pp. 121-122, 129. (In Russ.)

#### Сведения об авторах:

**Мондрус Владимир Львович**, член-корр. РААСН, доктор технических наук, профессор, Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет (НИУ МГСУ), г. Москва, Россия. Scopus AuthorID: 55976017400, SPIN-код: 3268-4484, AuthorID: 387581, <https://orcid.org/0000-0002-5029-871X>. Email: [mondusVL@mgsu.ru](mailto:mondusVL@mgsu.ru).

**Попов Роман Владимирович**, аспирант, Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет (НИУ МГСУ), г. Москва, Россия. SPIN-код: 1067-6517, AuthorID: 1315778. Email: [popovRV@mgsu.ru](mailto:popovRV@mgsu.ru).

#### About the authors:

**Vladimir L. Mondrus**, Corresponding member of RAACS, Doctor of Technical Sciences, Professor, Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russia. Scopus AuthorID: 55976017400, SPIN-code: 3268-4484, AuthorID: 387581, <https://orcid.org/0000-0002-5029-871X>. Email: [mondusVL@mgsu.ru](mailto:mondusVL@mgsu.ru).

**Roman V. Popov**, Postgraduate Student, Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russia. SPIN-code: 3268-4484, AuthorID: 1315778. Email: [popovRV@mgsu.ru](mailto:popovRV@mgsu.ru).

**Вклад авторов:** Мондрус В.Л. — концепция исследования, научное руководство, редактирование; Попов Р.В. — разработка методики расчета, выполнение численных исследований

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Авторы утвердили окончательный вариант статьи.

The author's declares no conflict of interest.

The author's has approved the final version.

Статья поступила в редакцию 20.07.2026

Одобрена после рецензирования 02.08.2026

Принята к публикации 14.08.2026

The article was submitted 20.07.2026

Approved after reviewing 02.08.2026

Accepted for publication 14.08.2026