

Научная статья

В.А. СМІРНОВ^{1,2}¹Научно-исследовательский институт строительной физики Российской академии архитектуры и строительных наук (НИИСФ РААСН), г. Москва, Россия²ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет», г. Москва, Россия**ДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ВЯЗКОУПРУГОГО
ВИБРОДЕМПФИРУЮЩЕГО МАТЕРИАЛА**

Аннотация. В статье предложена локальная феноменологическая модель динамического поведения вязкоупругого вибродемпфирующего материала на основе микроклеточного полиуретанового эластомера. Актуальность исследования связана с необходимостью корректного задания частотно-зависимых динамических характеристик материалов при расчёте систем виброизоляции зданий, инженерного оборудования, элементов верхнего строения пути и конструкций, чувствительных к структурной вибрации. В качестве экспериментальной основы использованы частотные зависимости динамического модуля упругости и коэффициента механических потерь, полученные методом динамического механического анализа в диапазоне 1–1000 Гц. Рассмотрена модифицированная двухветвевая модель дробного стандартного линейного твёрдого тела с дополнительным фоновым уровнем механических потерь. Показано, что введение фонового параметра потерь позволяет физически обоснованно описать ненулевой уровень диссипации в низко- и среднечастотной области без искусственного завышения вклада релаксационных ветвей. Идентификация параметров выполнена методом взвешенных наименьших квадратов с мультистарт-оптимизацией. Полученная модель воспроизводит экспериментальные значения динамического модуля и коэффициента потерь в инженерно значимом диапазоне частот и может быть использована как материальная подмодель при расчёте виброизолирующих элементов при малых гармонических колебаниях около предварительно нагруженного состояния.

Ключевые слова: вязкоупругость, пенополиуретан, вибродемпфирующий материал, динамический модуль упругости, коэффициент потерь, дробная производная, дробная модель СЛТ, DMA-анализ, виброизоляция.

Для цитирования: Смирнов В.А. Динамическая модель вязкоупругого вибродемпфирующего материала // Строительство и реконструкция. 2026. №3 (125). С. 81-90. DOI: 10.33979/2073-7416-2026-125-3-81-90. EDN: QSEYWI

Research Article

V.A. SMIRNOV^{1,2}¹Research Institute of Building Physics of the Russian Academy of Architecture and Construction Sciences (NIISF RAASN), Moscow, Russia²Moscow State University of Civil Engineering (National Research University), Moscow, Russia**DYNAMIC MODEL OF A VISCOELASTIC VIBRATION-DAMPING
MATERIAL**

Abstract. The paper proposes a local phenomenological model for the dynamic behavior of a viscoelastic vibration-damping material based on a microcellular polyurethane elastomer. The study is motivated by the need to specify frequency-dependent dynamic material properties in calculations of vibration isolation systems for buildings, engineering equipment, railway track components and structures sensitive to structure-borne vibration.

© Смирнов В.А., 2026



Submitted for possible open access publication under the terms and conditions of the Creative Commons NonCommercial license <https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>

Frequency dependences of the dynamic elastic modulus and mechanical loss factor obtained by dynamic mechanical analysis in the range of 1–1000 Hz are used as experimental data. A modified two-branch fractional standard linear solid model with an additional loss-floor parameter is considered. It is shown that the loss-floor term allows one to reproduce a non-zero dissipation level in the low- and mid-frequency range without artificially increasing the contribution of relaxation branches. Model parameters are identified by weighted least squares with multistart optimization. The resulting model reproduces the experimental dynamic modulus and loss factor within the engineering frequency range and can be used as a material submodel for vibration-isolating elements subjected to small harmonic oscillations around a preloaded equilibrium state.

Keywords: viscoelasticity, polyurethane foam, vibration-damping material, dynamic modulus, loss factor, fractional derivative, fractional SLS model, DMA analysis, vibration isolation.

For citation: Smirnov V.A. Dynamic model of a viscoelastic vibration-damping material. Building and Reconstruction. 2026; 3(125): 81-90. DOI: 10.33979/2073-7416-2026-125-3-81-90. EDN: QSEYWI

1. Введение

Вязкоупругие полимерные материалы применяют в строительной и машиностроительной практике в качестве элементов виброизоляции, вибродемпфирования и акустической развязки. Для инженерного расчёта таких систем недостаточно знать только статический модуль: при динамическом воздействии материал работает как частотно-зависимый элемент, одновременно накапливающий и рассеивающий механическую энергию. Поэтому при подборе виброизоляции оборудования, проектировании упругих прокладок под рельсовые элементы, виброизолирующих матов под фундаментами зданий и опорных систем оборудования необходимо задавать комплексный модуль упругости $E^*(\omega)$, его действительную часть $E'(\omega)$, мнимую часть $E''(\omega)$ и коэффициент потерь $\eta(\omega)$. Неверное задание этих характеристик приводит к ошибке в оценке собственной частоты, коэффициента передачи вибрации, амплитуды резонансного отклика и требуемой несущей способности виброизоляторов.

Состояние вопроса показывает, что задача идентификации феноменологических моделей вязкоупругих материалов остаётся актуальной. В работе S.W. White и соавторов [7] были описаны экспериментальные методы определения нелинейных и вязкоупругих свойств гибких полиуретановых пен при динамическом нагружении; эта работа важна тем, что показала зависимость параметров пены от уровня предварительного сжатия. R. Deng, P. Davies и А.К. Bajaj [8] предложили модель гибкой полиуретановой пены для сидений с учётом нелинейной упругости и линейной вязкоупругости, что подтвердило необходимость раздельного описания статического поджатия и малых динамических приращений. Т. Pritz [6] показал, что пятипараметрические дробные модели способны описывать экспериментальные кривые динамических свойств полимерных демпфирующих материалов лучше, чем простые модели с целочисленными производными. А.С. Galucio, J.F. Deü и R. Ohayon [9] развили конечно-элементную формулировку для вязкоупругих сэндвич-балок с дробными операторами, что существенно для включения таких материалов в расчёт конструкций. К. Adolfsson, М. Enelund и Р. Olsson [10] рассмотрели дробную модель вязкоупругости и вопросы её численной дискретизации; эта работа важна для практической реализации наследственных операторов во времени.

Дальнейшее развитие направления связано с идентификацией параметров по частотным функциям отклика и экспериментальным DMA-данным. S.Y. Kim и D.H. Lee [11] предложили процедуру определения параметров дробно-производных моделей по измеренным частотным передаточным функциям. R. Lewandowski и B. Chorażyczewski [12] разработали методы идентификации параметров дробных моделей Кельвина-Фойгта и Максвелла для вязкоупругих демпферов. М. Sasso, G. Palmieri и D. Amodio [13] показали применимость дробных моделей к линейным вязкоупругим задачам и подчеркнули необходимость выбора модели с учётом формы экспериментального спектра потерь. В обзоре Yu.A. Rossikhin и M.V. Shitikova [2] систематизированы приложения дробного исчисления к

динамическим задачам механики твёрдого тела; авторы отдельно отмечают, что для инженерных задач дробные производные целесообразно вводить прежде всего в описания диссипативных и вязкоупругих сил, а не в инерционные члены. В обзорной работе M.V. Shitikova [3] рассмотрены дробно-операторные вязкоупругие модели, применяемые в задачах динамики деформируемых систем.

Для строительных приложений особенно важны работы, связывающие параметры материала с эффективностью работы систем виброизоляции. Н.М.С.С. Somarathna и соавторы [14] обобщили применение полиуретанов в конструкционных и инфраструктурных задачах, включая области, где существенны энергоёмкость и демпфирование. Y. Xu и соавторы [15] показали применение дробно-производной модели для вязкоупругого демпфера при низких температурах. С. Ngamkhanong и S. Kaewunghuen [16] исследовали влияние подшпальных прокладок на динамический отклик железобетонных шпал при ударных нагрузках, что подчёркивает практическую значимость корректного задания динамической жёсткости упругих прокладок. J. Cortazar-Noguerol и соавторы [17] экспериментально показали влияние предварительного поджатия на динамические свойства полиуретановой эластомерной пены. В работе M.V. Shitikova и V.A. Smirnov [18] выполнен анализ параметров реологических моделей для вспененных вибродемпфирующих материалов с различной плотностью и структурой пор.

Несмотря на развитость классических и дробных моделей, для практических задач виброизоляции остаётся методическая проблема: экспериментальные зависимости $|E^*(f)|$ и $\eta(f)$ в диапазоне 1–1000 Гц нередко имеют разную кривизну, а коэффициент потерь не стремится к нулю в низкочастотной части рабочего диапазона. Простая модель Кельвина-Фойгта, классическая модель стандартного линейного твёрдого тела и даже одно- или двухветвевые дробные модели без фонового уровня потерь могут формально аппроксимировать один показатель, но ухудшать физическую интерпретацию другого. Поэтому требуется модель, которая одновременно сохраняет инженерную простоту, учитывает наследственный характер релаксации и допускает ненулевой базовый уровень диссипации.

Цель настоящей работы — построить и идентифицировать локальную феноменологическую модель комплексного динамического модуля вязкоупругого вибродемпфирующего материала при малых гармонических колебаниях относительно предварительно нагруженного состояния. Научная новизна работы состоит во введении в двухветвевую дробную модель стандартного линейного твёрдого тела дополнительного параметра фоновых потерь η_f , позволяющего устойчиво описывать коэффициент потерь в рабочем диапазоне частот без нарушения физической интерпретации релаксационных ветвей.

2. Модели и методы

Объект исследования и экспериментальная основа

В качестве объекта исследования в работе рассматривается микроячеистый полиуретановый вибродемпфирующий материал, работающий в режиме сжатия как упругий слой системы виброизоляции. Материал характеризуется предварительным статическим напряжением σ_0 и соответствующей статической деформацией ε_0 . Динамический анализ выполняется для малых приращений напряжения и деформации относительно этой рабочей точки:

$$\sigma(t) = \sigma_0 + \tilde{\sigma}(t), \varepsilon(t) = \varepsilon_0 + \tilde{\varepsilon}(t), \quad (1)$$

где σ_0 и ε_0 — статическая рабочая точка, а $\tilde{\sigma}(t)$, $\tilde{\varepsilon}(t)$ — малые динамические приращения.

Экспериментальные данные представлены частотными зависимостями модуля комплексного динамического модуля $|E^*(f)|$ и коэффициента потерь $\eta(f)$, полученными методом динамического механического анализа (DMA) [1]. На рисунке 1 приведены исходные зависимости в диапазоне 1–1000 Гц. Согласно ISO 4664-1:2022, при анализе динамических

свойств резиноподобных материалов используют понятия комплексного, накопительного и модуля потерь, а коэффициент потерь определяется через отношение мнимой и действительной частей комплексного модуля [19].

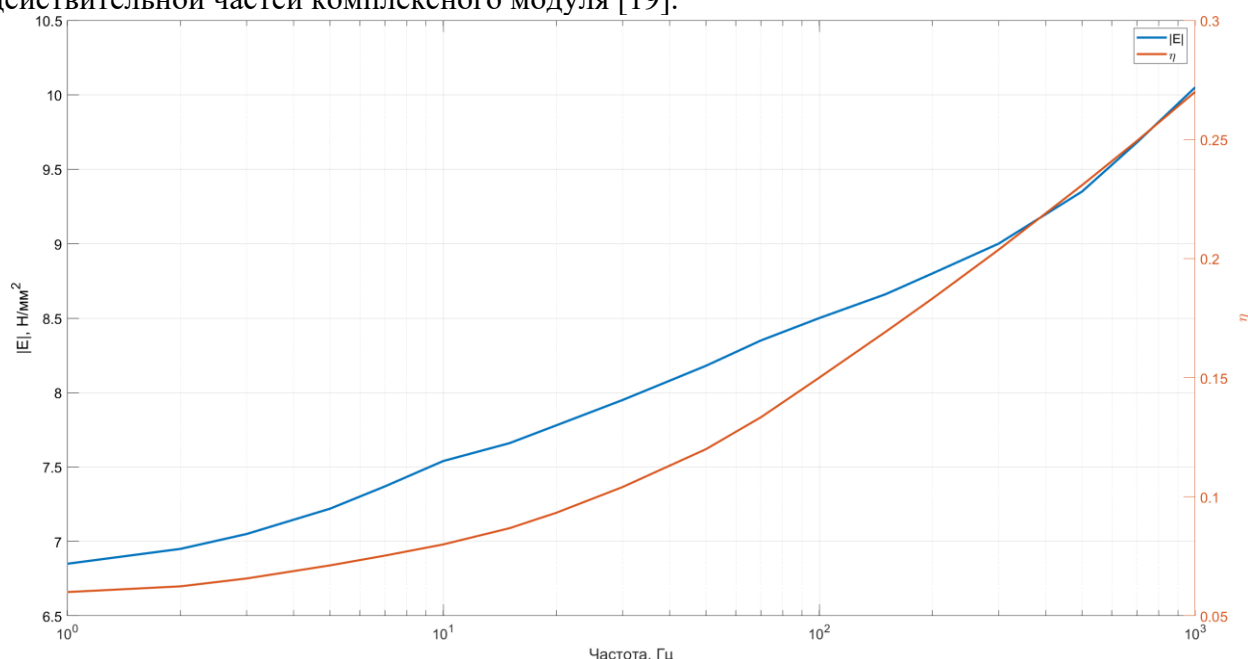


Рисунок 1 – Частотные зависимости динамического модуля $|E^*|$ и коэффициента потерь η исследуемого материала

Для гармонического воздействия принимается:

$$\tilde{\varepsilon}(t) = \varepsilon_a e^{i\omega t}, \tilde{\sigma}(t) = \sigma_a e^{i(\omega t + \delta)}, \omega = 2\pi f,$$

а комплексный динамический модуль определяется соотношением:

$$E^*(\omega; \sigma_0) = \frac{\tilde{\sigma}(\omega)}{\tilde{\varepsilon}(\omega)} = E'(\omega; \sigma_0) + iE''(\omega; \sigma_0), \eta(\omega) = \frac{E''(\omega)}{E'(\omega)}. \quad (2)$$

Здесь E' — накопительный, или упругий, модуль; E'' — модуль потерь; δ — угол фазового сдвига между напряжением и деформацией. В дальнейшем модель рассматривается как локальная частотная аппроксимация, справедливая только для условий испытаний, близких температур, малых динамических амплитуд и выбранного диапазона частот.

Феноменологическая модель материала

Предлагаемая модель представляет собой модифицированную двухветвевую дробную модель стандартного линейного твёрдого тела (СЛТ). Две дробные ветви (E_1, η_1 и E_2, η_2) описывают распределённые релаксационные механизмы материала, а параметр η_F задаёт фоновый уровень механических потерь, наблюдаемый в рабочем диапазоне частот. Структурная схема модели приведена на рисунке 2.

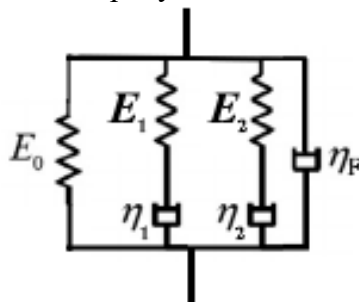


Рисунок 2 – Феноменологическая динамическая модель материала

Для двух дробных ветвей базовая часть комплексного модуля записывается в виде:

$$E_{FSLs}^*(\omega; \sigma_0) = E_e(\sigma_0) + \sum_{j=1}^2 \Delta E_j(\sigma_0) \frac{(i\omega\tau_j)^{\alpha_j}}{1 + (i\omega\tau_j)^{\alpha_j}}, 0 < \alpha_j < 1. \quad (3)$$

Здесь E_e — равновесный инкрементальный модуль при заданной рабочей точке σ_0 ; ΔE_j — амплитуда релаксационной добавки j -й ветви; τ_j — характерное время релаксации; α_j —

порядок дробности, отвечающий за ширину распределения времён релаксации. При $\alpha_j = 1$ соответствующая ветвь переходит к классическому элементу СЛТ с одной характерной релаксацией; при $0 < \alpha_j < 1$ спектр релаксации становится растянутым, что характерно для неоднородных полимерных и ячеистых материалов.

Для разделения действительной и мнимой частей введём обозначения:

$$x_j = (\omega\tau_j)^{\alpha_j}, c_j = \cos\left(\frac{\pi\alpha_j}{2}\right), s_j = \sin\left(\frac{\pi\alpha_j}{2}\right).$$

Тогда вклад j -й ветви в накопительный и модуль потерь равен:

$$E'_j(\omega) = \Delta E_j \frac{x_j c_j + x_j^2}{1 + 2x_j c_j + x_j^2},$$

$$E''_j(\omega) = \Delta E_j \frac{x_j s_j}{1 + 2x_j c_j + x_j^2}.$$

С учётом фонового уровня потерь итоговые выражения для модели принимают вид:

$$E'_{\text{total}}(\omega) = E_e + \sum_{j=1}^2 \Delta E_j \frac{x_j c_j + x_j^2}{1 + 2x_j c_j + x_j^2}, E''_{\text{total}}(\omega) = \sum_{j=1}^2 \Delta E_j \frac{x_j s_j}{1 + 2x_j c_j + x_j^2} + \eta_F E'_{\text{total}}(\omega). \quad (4)$$

$$\eta_{\text{model}}(\omega) = \frac{E''_{\text{total}}(\omega)}{E'_{\text{total}}(\omega)}, E_{\text{dyn.model}}(\omega) = |E^*(\omega)| = \sqrt{[E'_{\text{total}}(\omega)]^2 + [E''_{\text{total}}(\omega)]^2}. \quad (5)$$

Физический смысл параметров модели приведён в таблице 1.

Таблица 1 – Физический смысл параметров модели

Параметр	Физический смысл	Физико-химическая интерпретация
E_e , Н/мм ²	Равновесный инкрементальный модуль при заданной σ_0	Упругая жёсткость полиуретанового каркаса и ячеистой структуры при медленном нагружении
ΔE_1 , Н/мм ²	Амплитуда первой релаксационной добавки к модулю	Вклад относительно медленных механизмов: сегментальная подвижность мягкой фазы, перестройка водородных связей, локальная деформация стенок ячеек
τ_1 , с	Характерное время релаксации первой ветви	Частотное положение первой распределённой релаксационной зоны
α_1	Ширина спектра релаксации первой ветви	Чем меньше α_1 , тем шире распределение времён релаксации; для ППУ это отражает неоднородность фаз и ячеистой структуры
ΔE_2 , Н/мм ²	Амплитуда второй релаксационной добавки к модулю	Вклад быстрых механизмов: локальное трение в жёстких сегментах, микродеформации перемычек, газо- и поромеханические эффекты
τ_2 , с	Характерное время релаксации второй ветви	Частотное положение второй релаксационной зоны
α_2	Ширина спектра второй релаксации	При $\alpha_2 \rightarrow 1$ ветвь приближается к классическому СЛТ-поведению
η_F	Базовый уровень потерь	Частотно-слабо-зависимые потери: микрофрикция, внутреннее трение стенок ячеек, газодинамические потери, технологическая неоднородность

Идентификация параметров

Искомый вектор параметров имеет вид:

$$\mathbf{p} = [E_e, \Delta E_1, q_1, \alpha_1, \Delta E_2, q_2, \alpha_2, \eta_F].$$

Параметры определяют из условия минимизации взвешенного функционала отклонения расчётных значений динамического модуля и коэффициента потерь от экспериментальных данных:

$$\Phi(\mathbf{p}) = \sum_{k=1}^N \left[w_E \left(\frac{E_{\text{dyn.model}}(\omega_k; \mathbf{p}) - E_{\text{dyn.exp}}(\omega_k)}{E_{\text{dyn.exp}}(\omega_k)} \right)^2 + w_\eta (\eta_{\text{model}}(\omega_k; \mathbf{p}) - \eta_{\text{exp}}(\omega_k))^2 \right].$$

Весовые коэффициенты w_E и w_η выбираются так, чтобы вклад ошибки по динамическому модулю и по коэффициенту потерь был сопоставимым. Начальные приближения задают на основе экспериментальных кривых: равновесный модуль выбирают близким к низкочастотному значению $E_{\text{dyn}}(1 \text{ Гц})$, базовый уровень потерь — немного ниже минимального экспериментального η , дробные показатели — в диапазонах, соответствующих

широкому и узкому спектрам релаксации. Практически использовали мультистарт-оптимизацию с последующей локальной минимизацией функционала. Такой подход уменьшает риск попадания в локальный минимум и позволяет оценить устойчивость идентифицированных параметров. Выбранные начальные приближения:

$$E_e^{(0)} \approx 0.95 \dots 1.05 \cdot E_{\text{dyn}}(1 \text{ Hz}), \eta_F^{(0)} \approx 0.8 \dots 0.9 \cdot \min(\eta_k),$$

$$\alpha_1^{(0)} = 0.4 \dots 0.6, \alpha_2^{(0)} = 0.8 \dots 1.0,$$

$$\tau_1^{(0)} = 10^{-7} \dots 10^{-5} \text{ s}, \tau_2^{(0)} = 10^{-7} \dots 10^{-5} \text{ s}.$$

3. Результаты исследования и их анализ

Результаты аппроксимации модели (3) получены по данным DMA-анализа в диапазоне 1–1000 Гц. На рисунке 3 представлены сопоставления экспериментальных и расчётных значений динамического модуля, коэффициента потерь, ошибки аппроксимации и расчётной петли гистерезиса для частоты 10 Гц.

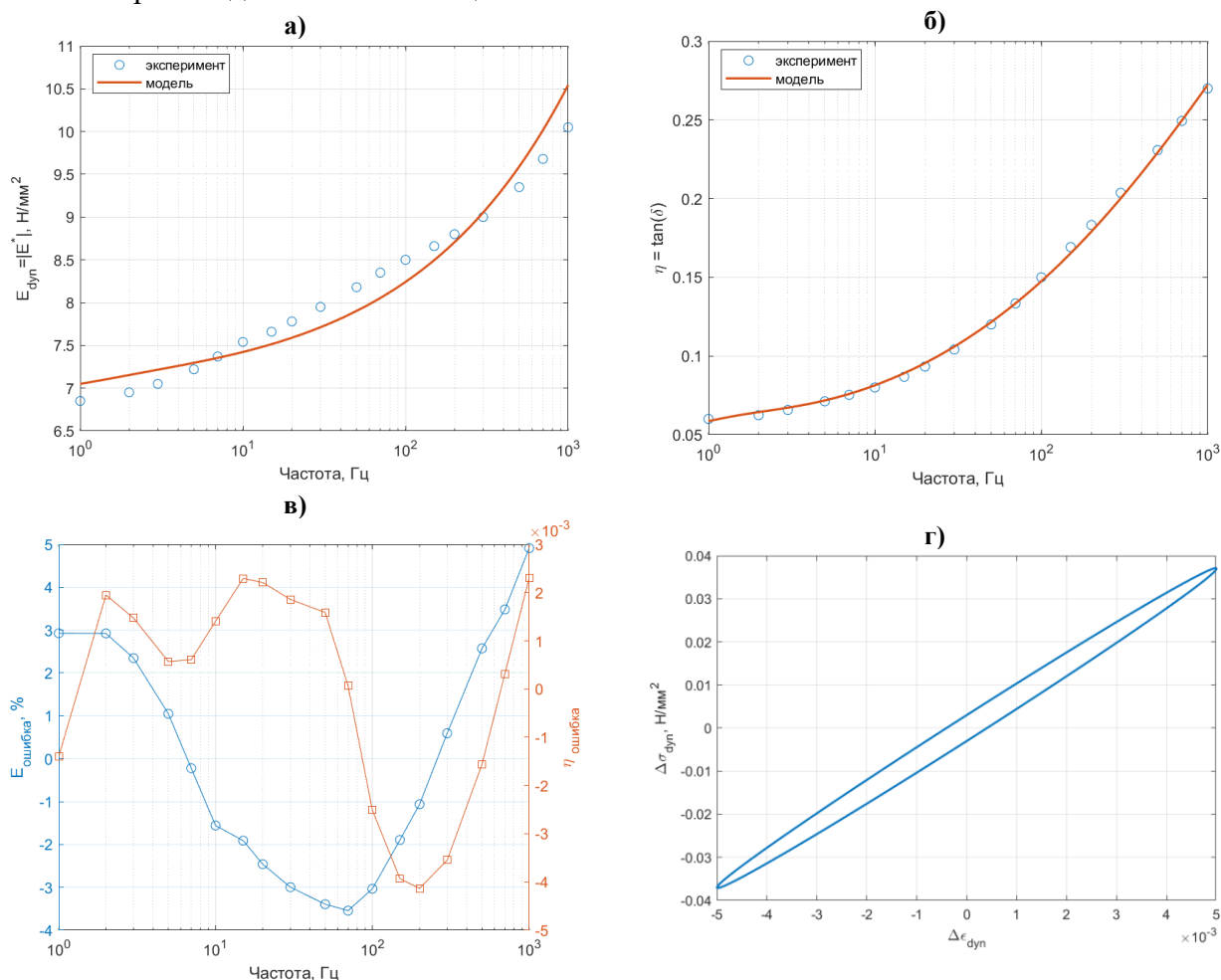


Рисунок 3 – Результаты аппроксимации: а) динамический модуль; б) коэффициент потерь; в) ошибка аппроксимации; г) петля гистерезиса при $f=10$ Гц и амплитуде 0,005 мм

Идентифицированные параметры модели (3) приведены в таблице 2. Значения отражают две различные зоны релаксационного поведения: первая ветвь с α_1 , близким к единице, фактически описывает почти классическую релаксацию, тогда как вторая ветвь с $\alpha_2 \approx 0,43$ задаёт более широкий распределённый спектр быстрых механизмов. Большая величина ΔE_2 не должна трактоваться как самостоятельный статический модуль материала: в дробной ветви она задаёт амплитуду частотно-зависимой добавки в пределах рабочей аппроксимации и связана с формой спектра $|E^*(f)|$ и $\eta(f)$.

Таблица 2 – Результаты идентификации параметров модели

Обозначение	Значение
E_e	6,8291 Н/мм ²
ΔE_1	0,12944 Н/мм ²
τ_1	0,11872 с
α_1	0,999
ΔE_2	87,119 Н/мм ²
τ_2	$1,46 \cdot 10^{-7}$ с
α_2	0,43365
η_F	0,031

Качество аппроксимации приведено в таблице 3. Среднеквадратичная ошибка по динамическому модулю составляет 0,227 Н/мм², максимальная ошибка — 0,494 Н/мм². Для коэффициента потерь RMSE равна 0,00219, а максимальное отклонение — 0,00413. С учётом технологического разброса свойств вспененных полиуретановых материалов такой уровень точности является достаточным для инженерных расчётов виброизоляции в выбранном частотном диапазоне.

Таблица 3 – Качество аппроксимации

Показатель	Значение
RMSE по E_{dyn}	0,22708 Н/мм ²
Максимальная ошибка по E_{dyn}	0,49377 Н/мм ²
RMSE по η	0,0021855
Максимальная ошибка по η	0,0041315

Основной инженерный эффект предлагаемой модели состоит в том, что она одновременно воспроизводит рост динамического модуля с частотой и изменение коэффициента потерь. Если исключить фоновый параметр η_F , релаксационные ветви вынуждены компенсировать низкочастотные потери за счёт искажения параметров ΔE_j , τ_j и α_j . Это приводит к формально приемлемой, но менее интерпретируемой подгонке: часть базовой микрофрикционной и газодинамической диссипации ошибочно приписывается релаксационным механизмам. Введение η_F отделяет слабочастотно-зависимые потери от наследственной релаксации, поэтому модель становится более устойчивой при экстраполяции внутри диапазона 1–1000 Гц.

Для практических расчётов виброизоляции модель может использоваться как частотно-зависимый закон изменения динамических характеристик материала. Например, для слоя площадью A и толщиной h при сжатии динамическая жёсткость в первом приближении определяется выражением:

$$k_{dyn}(\omega) = E_{dyn}(\omega) \frac{A}{h}, \quad (6)$$

а собственная частота одномассовой системы с массой m может оцениваться как:

$$f_0 \approx \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_{dyn}(\omega_0)}{m}}. \quad (7)$$

Так как k_{dyn} зависит от частоты, расчёт f_0 требует итерационного уточнения или выбора модуля при частоте, близкой к ожидаемой собственной частоте системы. Коэффициент потерь $\eta(\omega)$ далее используется для оценки эквивалентного демпфирования, ширины резонансной зоны и уровня передаваемой вибрации. В этом заключается практическое преимущество модели перед расчётом по одному статическому модулю: инженер получает частотно-согласованное значение жёсткости и диссипации материала.

Следует подчеркнуть, что предложенная модель является локальной феноменологической аппроксимацией. Она не описывает разрушение ячеистой структуры,

нелинейное смятие, большие деформации, температурно-временную суперпозицию и деградацию материала при длительном циклическом воздействии. Для переноса модели на другие уровни предварительного поджатия σ_0 , температуры и амплитуды деформации требуется независимая экспериментальная верификация.

4. Заключение

1. Показано, что для описания динамического поведения микроячеистого полиуретанового вибродемпфирующего материала в диапазоне 1–1000 Гц целесообразно использовать локальную феноменологическую модель, построенную для малых гармонических колебаний около предварительно нагруженного состояния.

2. Предложена модифицированная двухветвевая дробная модель стандартного линейного твёрдого тела с дополнительным фоновым уровнем потерь η_f . Дробные ветви описывают распределённые релаксационные процессы, а η_f учитывает слабочастотно-зависимую диссипацию, связанную с микрофрикцией, газо- и поромеханическими эффектами и технологической неоднородностью материала.

3. Идентификация параметров по данным DMA-анализа методом взвешенных наименьших квадратов показала хорошее совпадение расчётных и экспериментальных зависимостей. Получены ошибки RMSE: 0,22708 Н/мм² по динамическому модулю и 0,0021855 по коэффициенту потерь.

4. Введение η_f улучшает физическую интерпретируемость модели: низко- и среднечастотные потери не приходится искусственно переносить в релаксационные ветви, что повышает устойчивость параметров при инженерном использовании модели.

5. Модель может применяться в расчётах систем виброизоляции как частотно-зависимый материаловый закон для определения динамической жёсткости, коэффициента потерь и параметров одномассовых или многомассовых расчётных схем. Область применимости ограничена диапазоном частот, температурой, амплитудой и статическим поджатием, соответствующими экспериментальным данным.

5. Благодарности

Работа выполнена при поддержке гранта Российского научного фонда № 25-11-00140.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Смирнов В.А. Идентификация параметров вязкоупругих материалов по результатам DMA-анализа // Строительство и реконструкция. 2025. № 3. С. 60–72. DOI: 10.33979/2073-7416-2025-119-3-60-72.
2. Rossikhin Yu.A., Shitikova M.V. Application of Fractional Calculus for Dynamic Problems of Solid Mechanics: Novel Trends and Recent Results // Applied Mechanics Reviews. 2010. Vol. 63. Article 010801. DOI: 10.1115/1.4000563.
3. Shitikova M.V. Fractional Operator Viscoelastic Models in Dynamic Problems of Mechanics of Solids: A Review // Mechanics of Solids. 2022. Vol. 57, No. 1. Pp. 1–33. DOI: 10.3103/S0025654422010022.
4. Mainardi F. Fractional Calculus and Waves in Linear Viscoelasticity: An Introduction to Mathematical Models. 2nd ed. Singapore: World Scientific, 2022. 625 p.
5. Baleanu D., Diethelm K., Scalas E., Trujillo J.J. Fractional Calculus: Models and Numerical Methods. 2nd ed. Singapore: World Scientific, 2017. 476 p.
6. Pritz T. Five-parameter fractional derivative model for polymeric damping materials // Journal of Sound and Vibration. 2003. Vol. 265, No. 5. Pp. 935–952. DOI: 10.1016/S0022-460X(02)01530-4.
7. White S.W., Kim S.K., Bajaj A.K., Davies P., Showers D.K., Liedtke P.E. Experimental Techniques and Identification of Nonlinear and Viscoelastic Properties of Flexible Polyurethane Foam // Nonlinear Dynamics. 2000. Vol. 22. Pp. 281–313. DOI: 10.1023/A:1008302208269.
8. Deng R., Davies P., Bajaj A.K. Flexible polyurethane foam modelling and identification of viscoelastic parameters for automotive seating applications // Journal of Sound and Vibration. 2003. Vol. 262, No. 3. Pp. 391–417. DOI: 10.1016/S0022-460X(03)00104-4.

9. Galucio A.C., Deü J.F., Ohayon R. Finite element formulation of viscoelastic sandwich beams using fractional derivative operators // *Computational Mechanics*. 2004. Vol. 33. Pp. 282–291. DOI: 10.1007/s00466-003-0529-x.
10. Adolfsson K., Enelund M., Olsson P. On the Fractional Order Model of Viscoelasticity // *Mechanics of Time-Dependent Materials*. 2005. Vol. 9. Pp. 15–34. DOI: 10.1007/s11043-005-3442-1.
11. Kim S.Y., Lee D.H. Identification of fractional-derivative-model parameters of viscoelastic materials from measured FRFs // *Journal of Sound and Vibration*. 2009. Vol. 324. Pp. 570–586. DOI: 10.1016/j.jsv.2009.01.056.
12. Lewandowski R., Chorażyczewski B. Identification of the parameters of the Kelvin–Voigt and the Maxwell fractional models, used to modeling of viscoelastic dampers // *Computers & Structures*. 2010. Vol. 88, No. 1–2. Pp. 1–17. DOI: 10.1016/j.compstruc.2009.09.001.
13. Sasso M., Palmieri G., Amodio D. Application of fractional derivative models in linear viscoelastic problems // *Mechanics of Time-Dependent Materials*. 2011. Vol. 15. Pp. 367–387. DOI: 10.1007/s11043-011-9153-x.
14. Somarathna H.M.C.C., Raman S.N., Mohotti D., Mutalib A.A., Badri K.H. The use of polyurethane for structural and infrastructural engineering applications: A state-of-the-art review // *Construction and Building Materials*. 2018. Vol. 190. Pp. 995–1014. DOI: 10.1016/j.conbuildmat.2018.09.166.
15. Xu Y., Dong Y., Huang X., Luo Y., Zhao S. Properties Tests and Mathematical Modeling of Viscoelastic Damper at Low Temperature With Fractional Order Derivative // *Frontiers in Materials*. 2019. Vol. 6. Article 194. DOI: 10.3389/fmats.2019.00194.
16. Ngamkhanong C., Kaewunruen S. Effects of under sleeper pads on dynamic responses of railway prestressed concrete sleepers subjected to high intensity impact loads // *Engineering Structures*. 2020. Vol. 214. Article 110604. DOI: 10.1016/j.engstruct.2020.110604.
17. Cortazar-Noguerol J., Cortés F., Sarria I., Elejabarrieta M.J. Preload Influence on the Dynamic Properties of a Polyurethane Elastomeric Foam // *Polymers*. 2024. Vol. 16, No. 13. Article 1844. DOI: 10.3390/polym16131844.
18. Shitikova M.V., Smirnov V.A. Analysis of rheological model parameters for various foamed vibration-damping materials // *Magazine of Civil Engineering*. 2025. Vol. 18, No. 2. Article 13403. DOI: 10.34910/MCE.134.3.
19. ISO 4664-1:2022. Rubber, vulcanized or thermoplastic — Determination of dynamic properties — Part 1: General guidance. Geneva: International Organization for Standardization, 2022.

REFERENCES

1. Smirnov V.A. Identification of viscoelastic material parameters based on DMA analysis results. *Construction and Reconstruction*. 2025;(3):60–72. (In Russian) DOI: 10.33979/2073-7416-2025-119-3-60-72
2. Rossikhin Yu.A., Shitikova M.V. Application of Fractional Calculus for Dynamic Problems of Solid Mechanics: Novel Trends and Recent Results. *Applied Mechanics Reviews*. 2010;63:010801. DOI: 10.1115/1.4000563
3. Shitikova M.V. Fractional Operator Viscoelastic Models in Dynamic Problems of Mechanics of Solids: A Review. *Mechanics of Solids*. 2022;57(1):1–33. DOI: 10.3103/S0025654422010022
4. Mainardi F. *Fractional Calculus and Waves in Linear Viscoelasticity: An Introduction to Mathematical Models*. 2nd ed. Singapore: World Scientific; 2022.
5. Baleanu D., Diethelm K., Scalas E., Trujillo J.J. *Fractional Calculus: Models and Numerical Methods*. 2nd ed. Singapore: World Scientific; 2017.
6. Pritz T. Five-parameter fractional derivative model for polymeric damping materials. *Journal of Sound and Vibration*. 2003;265(5):935–952. DOI: 10.1016/S0022-460X(02)01530-4
7. White S.W., Kim S.K., Bajaj A.K., Davies P., Showers D.K., Liedtke P.E. Experimental Techniques and Identification of Nonlinear and Viscoelastic Properties of Flexible Polyurethane Foam. *Nonlinear Dynamics*. 2000;22:281–313. DOI: 10.1023/A:1008302208269
8. Deng R., Davies P., Bajaj A.K. Flexible polyurethane foam modelling and identification of viscoelastic parameters for automotive seating applications. *Journal of Sound and Vibration*. 2003;262(3):391–417. DOI: 10.1016/S0022-460X(03)00104-4

9. Galucio A.C., Deü J.F., Ohayon R. Finite element formulation of viscoelastic sandwich beams using fractional derivative operators. *Computational Mechanics*. 2004;33:282–291. DOI: 10.1007/s00466-003-0529-x
10. Adolfsson K., Enelund M., Olsson P. On the Fractional Order Model of Viscoelasticity. *Mechanics of Time-Dependent Materials*. 2005;9:15–34. DOI: 10.1007/s11043-005-3442-1
11. Kim S.Y., Lee D.H. Identification of fractional-derivative-model parameters of viscoelastic materials from measured FRFs. *Journal of Sound and Vibration*. 2009;324:570–586. DOI: 10.1016/j.jsv.2009.01.056
12. Lewandowski R., Chorażyczewski B. Identification of the parameters of the Kelvin–Voigt and the Maxwell fractional models, used to modeling of viscoelastic dampers. *Computers & Structures*. 2010;88(1–2):1–17. DOI: 10.1016/j.compstruc.2009.09.001
13. Sasso M., Palmieri G., Amodio D. Application of fractional derivative models in linear viscoelastic problems. *Mechanics of Time-Dependent Materials*. 2011;15:367–387. DOI: 10.1007/s11043-011-9153-x
14. Somarathna H.M.C.C., Raman S.N., Mohotti D., Mutalib A.A., Badri K.H. The use of polyurethane for structural and infrastructural engineering applications: A state-of-the-art review. *Construction and Building Materials*. 2018;190:995–1014. DOI: 10.1016/j.conbuildmat.2018.09.166
15. Xu Y., Dong Y., Huang X., Luo Y., Zhao S. Properties Tests and Mathematical Modeling of Viscoelastic Damper at Low Temperature With Fractional Order Derivative. *Frontiers in Materials*. 2019;6:194. DOI: 10.3389/fmats.2019.00194
16. Ngamkhanong C., Kaewunruen S. Effects of under sleeper pads on dynamic responses of railway prestressed concrete sleepers subjected to high intensity impact loads. *Engineering Structures*. 2020;214:110604. DOI: 10.1016/j.engstruct.2020.110604
17. Cortazar-Noguerol J., Cortés F., Sarria I., Elejabarrieta M.J. Preload Influence on the Dynamic Properties of a Polyurethane Elastomeric Foam. *Polymers*. 2024;16(13):1844. DOI: 10.3390/polym16131844
18. Shitikova M.V., Smirnov V.A. Analysis of rheological model parameters for various foamed vibration-damping materials. *Magazine of Civil Engineering*. 2025;18(2):13403. DOI: 10.34910/MCE.134.3
19. ISO 4664-1:2022. *Rubber, vulcanized or thermoplastic — Determination of dynamic properties — Part 1: General guidance*. Geneva: International Organization for Standardization; 2022.

Сведения об авторе:

Смирнов Владимир Александрович, кандидат технических наук, доцент кафедры теоретической и строительной механики (НИУ МГСУ); ведущий научный сотрудник лаборатории «Комплексные проблемы виброакустики» (НИИСФ РААСН), г. Москва, Россия. Scopus ID: 57200044361, SPIN-код: 5262-8988, <https://orcid.org/0000-0001-5679-9542>. E-mail: belohvost@list.ru.

About the author:

Vladimir A. Smirnov, PhD in Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Theoretical and Structural Mechanics (Moscow State University of Civil Engineering); Leading Researcher at the Laboratory “Complex Problems of Vibroacoustics” (NIISF RAASN), Moscow, Russia. Scopus ID: 57200044361, SPIN-code: 5262-8988, <https://orcid.org/0000-0001-5679-9542>. E-mail: belohvost@list.ru

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Автор утвердил окончательный вариант статьи.

The author declares no conflict of interest.

The author has approved the final version.

Статья поступила в редакцию 25.05.2026

Одобрена после рецензирования 02.06.2026

Принята к публикации 14.06.2026

The article was submitted 25.05.2026

Approved after reviewing 02.06.2026

Accepted for publication 14.06.2026