

А.Д. МЕРЗЛЯКОВА¹, А.С. ЧЕПУРНЕНКО², Б.М. ЯЗЫЕВ², В.С. ТЮРИНА²¹«Российский университет транспорта» РУТ(МИИТ), Москва, Россия²Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону, Россия

АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД РАСЧЁТА ПОЛОГИХ ТРЁХСЛОЙНЫХ ОБОЛОЧЕК НА ОСНОВЕ РЕШЕНИЯ НАВЬЕ

Аннотация. Представлен аналитический метод расчёта трёхслойных пологих оболочек с лёгким заполнителем на основе решения Навье. Рассмотрены оболочки, шарнирно опёртые по прямоугольному контуру. На основе принятых кинематических гипотез и уравнений трёхмерной теории упругости выведена система разрешающих дифференциальных уравнений относительно функций прогиба, напряжений и усреднённых перемещений. Для решения этой системы предложен метод точного аналитического решения путём разложения неизвестных функций и нагрузки в двойные тригонометрические ряды, аналогичный классическому подходу Навье. Метод апробирован на примере оболочки в форме эллиптического параболоида под равномерной нагрузкой. Показана высокая сходимость рядов уже при небольшом числе членов. Результаты аналитического расчёта продемонстрировали хорошее согласование с данными, полученными численно методом конечных разностей. С использованием разработанного метода проведён параметрический анализ влияния модуля сдвига заполнителя на напряжённо-деформированное состояние конструкции. Установлено, что снижение модуля сдвига (при ползучести) приводит к перераспределению внутренних усилий: уменьшаются поперечные силы и изгибающие моменты, но возрастают продольные и сдвигающие усилия. В результате эквивалентные напряжения в верхней обшивке могут увеличиваться до 19%, что необходимо учитывать для обеспечения долговечности конструкций. Предложенный метод является эффективным инструментом для анализа напряженно-деформированного состояния трёхслойных оболочек.

Ключевые слова: трехслойные оболочки, пологие оболочки, легкий заполнитель, аналитическое решение, ползучесть заполнителя, функция напряжений, деформации сдвига.

A.D. MERZLIAKOVA¹, A.S. CHEPURNENKO², B.M. YAZYEV², V.S. TYURINA²¹ Russian University of Transport (MIIT), Moscow, Russia² Don State Technical University, Rostov-on-Don, Russia

ANALYTICAL METHOD FOR CALCULATING SHALLOW THREE-LAYER SHELLS BASED ON THE NAVIER SOLUTION

Abstract. The analytical method for calculating three-layer shallow shells with a lightweight core based on the Navier solution is presented. Shells with a rectangular contour are considered. Based on the adopted kinematic hypotheses and the equations of three-dimensional elasticity theory, a system of resolving differential equations for the deflection, stress, and averaged displacement functions is derived. To solve this system, a method for an exact analytical solution is proposed by expanding the unknown functions and the load in double trigonometric series, similar to the classical Navier approach. The method is tested using an elliptical paraboloid-shaped shell under a uniform load. High convergence of the series is demonstrated even for a small number of terms. The results of the analytical calculation demonstrated good agreement with the data obtained numerically using the finite difference method. Using the developed method, a parametric analysis of the filler shear modulus effect on the stress-strain state of the structure was carried out. It has been established that a decrease in the shear modulus (during creep) leads to a redistribution of internal forces: transverse forces and bending moments decrease, but longitudinal and shear forces increase. As a result, equivalent stresses in the upper skin can increase by up to 19%, which must be taken into account to ensure the durability of the structure. The proposed method is an effective tool for analyzing the stress-strain state of sandwich shells.

Keywords: three-layer shells, shallow shells, lightweight filler, analytical solution, filler creep, stress function, shear strain.

© Мерзлякова А.Д., Чепурненко А.С., Языев Б.М., Тюрина В.С., 2026

1. Введение

Трёхслойные пологие оболочки с лёгким наполнителем широко применяются в современном строительстве и аэрокосмической индустрии благодаря высокой удельной жёсткости, тепло- и звукоизоляционным свойствам. Проектирование таких конструкций требует учёта специфических особенностей их работы, в первую очередь деформаций поперечного сдвига в среднем слое, что существенно усложняет аналитическое описание их напряжённо-деформированного состояния.

Обширный пласт исследований в области расчёта многослойных оболочек опирается на классические работы В.З. Власова [1], А.Л. Гольденвейзера [2] и С.П. Тимошенко [3], заложивших основы теории пологих оболочек. Значительный вклад в теорию трёхслойных конструкций внесли работы, предполагающие линейный закон распределения касательных напряжений в наполнителе [4–6]. Однако эти подходы, как правило, приводят к системам высокого порядка, разрешимым только численными методами.

За последние десятилетия численные методы, в частности метод конечных элементов (МКЭ) и метод конечных разностей (МКР), стали доминирующими в анализе трёхслойных структур [7–10]. В работах Z.Ying [11], N. Jafari [12], N. Kumar [13] показана эффективность МКЭ для учёта геометрической нелинейности и ползучести полимерных наполнителей. Аналитические решения, когда они существуют, остаются востребованными для верификации численных моделей, понимания физической сущности явлений и параметрических исследований.

В контексте аналитических решений метод Навье для пластин и оболочек с шарнирным опиранием по контуру является классическим [3]. Его адаптация для учёта деформаций поперечного сдвига была рассмотрена в работе [14], а в работе [15] данный метод был применен в задаче ползучести однослойной оболочки. Тем не менее, анализ научной литературы показывает отсутствие замкнутого аналитического решения в виде двойных тригонометрических рядов (аналогичного решению Навье) для системы разрешающих уравнений трёхслойной полой оболочки с лёгким наполнителем, учитывающего как мембранные, так и изгибные усилия, а также деформации поперечного сдвига. Большинство существующих аналитических подходов, как правило, ограничиваются частными случаями, рассматривая, к примеру, только цилиндрический изгиб [16,17].

Особую актуальность приобретает учёт влияния ползучести (длительной релаксации) полимерного наполнителя на несущую способность конструкции, что освещалось в работах [18–21]. Однако эти исследования носят преимущественно экспериментальный или численный характер. Недостаточная изученность влияния изменения модуля сдвига наполнителя во времени на перераспределение всех компонент внутренних усилий (изгибающих моментов, поперечных, продольных и сдвигающих сил) в рамках единого аналитического подхода определяет научную новизну и практическую значимость данного исследования.

Актуальность работы обусловлена необходимостью разработки эффективного и наглядного аналитического инструмента для расчёта и параметрического анализа трёхслойных пологих оболочек, позволяющего оценивать влияние сдвиговой податливости и её релаксации во времени на все компоненты напряжённо-деформированного состояния.

Цель исследования – разработка аналитического метода расчёта трёхслойных пологих оболочек с лёгким наполнителем на основе замкнутого решения системы разрешающих уравнений в форме двойных тригонометрических рядов и исследование на его основе влияния модуля сдвига наполнителя на НДС конструкции.

Для достижения поставленной цели были решены следующие задачи:

1. На основе принятых кинематических гипотез и уравнений трёхмерной теории упругости в криволинейных координатах вывести систему разрешающих дифференциальных уравнений относительно функций прогиба, напряжений и усреднённых перемещений для трёхслойной полой оболочки.

2. Предложить метод точного аналитического решения полученной системы для случая шарнирного опирания по контуру прямоугольной в плане оболочки путём разложения искомых функций и нагрузки в двойные тригонометрические ряды.

3. На примере оболочки в форме эллиптического параболоида под равномерной нагрузкой провести численную апробацию метода, исследовать сходимость рядов и выполнить верификацию путём сравнения с результатами численного моделирования.

4. Используя разработанный метод, провести параметрический анализ влияния модуля сдвига заполнителя (моделирующего кратковременное и длительное нагружение) на распределение прогибов, внутренних усилий и эквивалентных напряжений в несущих слоях.

2. Модели и методы

Рассмотрим бесконечно малый элемент трехслойной оболочки в криволинейной системе координат $(\alpha\beta z)$ (рис. 1). Толщина наружных несущих слоев принимается малой по сравнению с толщиной среднего слоя. Все слои считаются упругими и изотропными. При получении разрешающих уравнений пренебрегаем нормальными напряжениями σ_α^c и σ_β^c в среднем слое в силу низкого модуля упругости заполнителя по сравнению с обшивками, а также касательными напряжениями $\tau_{z\alpha}^c, \tau_{z\alpha}^n, \tau_{z\beta}^c, \tau_{z\beta}^n$ в обшивках. В рамках принятой модели вводится допущение о равенстве толщин несущих слоёв ($\delta_1 = \delta_2 = \delta$). Кроме того, считается, что напряжение в пределах толщины каждой обшивки не изменяется (распределено равномерно).

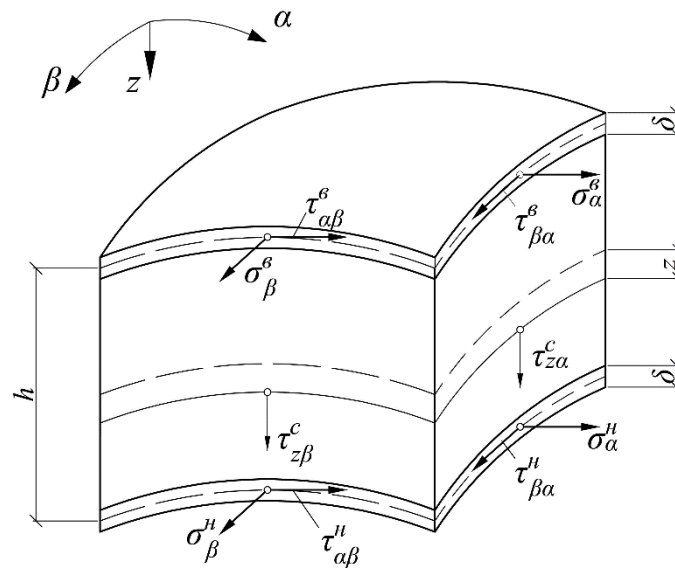


Рисунок 1 – Элемент трехслойной оболочки

Исходными для получения геометрических соотношений рассматриваемого элемента служат фундаментальные уравнения трёхмерной механики деформируемого тела в криволинейных координатах $\alpha\beta\gamma$:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\alpha\alpha} &= \frac{1}{H_1} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \beta} v + \frac{1}{H_1 H_3} \frac{\partial H_1}{\partial \gamma} w; \\ \varepsilon_{\beta\beta} &= \frac{1}{H_2} \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{1}{H_2 H_3} \frac{\partial H_2}{\partial \gamma} w + \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha} u; \\ \varepsilon_{\gamma\gamma} &= \frac{1}{H_3} \frac{\partial w}{\partial \gamma} + \frac{1}{H_3 H_1} \frac{\partial H_3}{\partial \alpha} u + \frac{1}{H_3 H_2} \frac{\partial H_3}{\partial \beta} v;\end{aligned}\tag{1}$$

$$\begin{aligned} 2\varepsilon_{\alpha\beta} &= \frac{H_1}{H_2} \frac{\partial}{\partial\beta} \left(\frac{1}{H_1} u \right) + \frac{H_2}{H_1} \frac{\partial}{\partial\alpha} \left(\frac{1}{H_2} v \right); \\ 2\varepsilon_{\beta\gamma} &= \frac{H_2}{H_3} \frac{\partial}{\partial\gamma} \left(\frac{1}{H_2} v \right) + \frac{H_3}{H_2} \frac{\partial}{\partial\beta} \left(\frac{1}{H_3} w \right); \\ 2\varepsilon_{\gamma\alpha} &= \frac{H_3}{H_1} \frac{\partial}{\partial\alpha} \left(\frac{1}{H_3} w \right) + \frac{H_1}{H_3} \frac{\partial}{\partial\gamma} \left(\frac{1}{H_1} u \right), \end{aligned}$$

где u, v, w – перемещения по направлениям α, β, γ , ε_{ij} – составляющие тензора деформаций, H_1, H_2, H_3 – коэффициенты Ламе.

При замене криволинейной координаты γ прямолинейной координатой z коэффициент H_3 равен единице, а коэффициенты H_1 и H_2 выражаются через коэффициенты первой квадратичной формы A и B , а также главные кривизны срединной поверхности k_1 и k_2 в виде:

$$\begin{aligned} H_1 &= A(1 + k_1 z); \\ H_2 &= B(1 + k_2 z). \end{aligned} \quad (2)$$

Подстановка (2) в (1) приводит к следующим уравнениям:

$$\begin{aligned} \varepsilon_\alpha &= \frac{1}{A} \frac{\partial u}{\partial\alpha} + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial\beta} v + k_1 w; \\ \varepsilon_\beta &= \frac{1}{B} \frac{\partial v}{\partial\beta} + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial\alpha} u + k_2 w; \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}; \\ 2\varepsilon_{\alpha\beta} &= \frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial\beta} \left(\frac{1}{A} u \right) + \frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial\alpha} \left(\frac{1}{B} v \right); \\ 2\varepsilon_{\beta z} &= \frac{\partial v}{\partial z} - k_2 v + \frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial\beta}; \\ 2\varepsilon_{\alpha z} &= \frac{\partial u}{\partial z} - k_1 u + \frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial\alpha}. \end{aligned} \quad (3)$$

Вместо парных индексов для линейных деформаций здесь и далее будет использоваться один индекс. Деформации несущих слоев на основе уравнений (3) записываются в виде:

$$\begin{aligned} \varepsilon_\alpha^{e(n)} &= \frac{1}{A} \frac{\partial u^{e(n)}}{\partial\alpha} + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial\beta} v^{e(n)} + k_1 w; \\ \varepsilon_\beta^{e(n)} &= \frac{1}{B} \frac{\partial v^{e(n)}}{\partial\beta} + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial\alpha} u^{e(n)} + k_2 w; \\ 2\varepsilon_{\alpha\beta}^{e(n)} &= \frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial\beta} \left(\frac{1}{A} u^{e(n)} \right) + \frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial\alpha} \left(\frac{1}{B} v^{e(n)} \right), \end{aligned} \quad (4)$$

где $u^{e(n)}$ и $v^{e(n)}$ – перемещения верхней (нижней) обшивки.

Характер распределения перемещений по толщине среднего слоя принимается линейным:

$$u^c = \frac{u^e + u^n}{2} + \frac{u^n - u^e}{h} z = \tilde{u} + \varphi z; \quad (5)$$

$$v^c = \frac{v^e + v^h}{2} + \frac{v^h - v^e}{h} z = \tilde{v} + \psi z.$$

Подстановка (5) в (3) приводит к равенствам:

$$\begin{aligned} 2\varepsilon_{\alpha z}^c &= \varphi - k_1(\tilde{u} + \varphi z) + \frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha}; \\ 2\varepsilon_{\beta z}^c &= \psi - k_2(\tilde{v} + \psi z) + \frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \beta}. \end{aligned} \quad (6)$$

Для упругих изотропных обшивок связь между напряжениями и деформациями записывается в виде:

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha}^{e(h)} &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_{\alpha}^{e(h)} + \nu \varepsilon_{\beta}^{e(h)}); \\ \sigma_{\beta}^{e(h)} &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_{\beta}^{e(h)} + \nu \varepsilon_{\alpha}^{e(h)}); \\ \tau_{\alpha\beta}^{e(h)} &= \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_{\alpha\beta}^{e(h)}, \end{aligned} \quad (7)$$

где E и ν – соответственно модуль упругости и коэффициент Пуассона несущих слоев.

Касательные напряжения в среднем слое определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} \tau_{\alpha z}^c &= 2G\varepsilon_{\alpha z}^c = G \left(\varphi - k_1(\tilde{u} + \varphi z) + \frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right); \\ \tau_{\beta z}^c &= 2G\varepsilon_{\beta z}^c = G \left(\psi - k_2(\tilde{v} + \psi z) + \frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \beta} \right), \end{aligned} \quad (8)$$

где G – модуль сдвига среднего слоя.

С учетом принятых гипотез средний слой может воспринимать только поперечные силы Q_{α} и Q_{β} . Изгибающие моменты M_{α} и M_{β} , а также крутящий момент $M_{\alpha\beta}$ полностью воспринимаются обшивками. Внутренние усилия, воспринимаемые наружными слоями, записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} M_{\alpha} &= \delta(\sigma_{\alpha}^h - \sigma_{\alpha}^e) \frac{h}{2} = D \left(\frac{1}{A} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} \psi + \nu \left(\frac{1}{B} \frac{\partial \psi}{\partial \beta} + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \varphi \right) \right); \\ M_{\beta} &= \delta(\sigma_{\beta}^h - \sigma_{\beta}^e) \frac{h}{2} = D \left(\frac{1}{B} \frac{\partial \psi}{\partial \beta} + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \varphi + \nu \left(\frac{1}{A} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} \psi \right) \right); \\ M_{\alpha\beta} &= \delta(\tau_{\alpha\beta}^h - \tau_{\alpha\beta}^e) \frac{h}{2} = \frac{D(1-\nu)}{2} \left[\frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{\varphi}{A} \right) + \frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\psi}{B} \right) \right], \end{aligned} \quad (9)$$

где $D = \frac{E\delta h^2}{2(1-\nu^2)}$ – цилиндрическая жесткость трехслойной оболочки.

Продольные силы N_{α} и N_{β} , а также сдвигающая сила $N_{\alpha\beta}$ также воспринимаются только обшивками и вычисляются следующим образом:

$$\begin{aligned} N_{\alpha} &= \delta(\sigma_{\alpha}^h + \sigma_{\alpha}^e) = \\ &= \frac{2E\delta}{1-\nu^2} \left[\frac{1}{A} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \alpha} + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} \tilde{v} + \frac{\nu}{B} \left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \beta} + \frac{1}{A} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \tilde{u} \right) + (k_1 + \nu k_2) w \right]; \\ N_{\beta} &= \delta(\sigma_{\beta}^h + \sigma_{\beta}^e) = \end{aligned} \quad (10)$$

$$= \frac{2E\delta}{1-\nu^2} \left[\frac{1}{B} \left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \beta} + \frac{1}{A} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \tilde{u} \right) + \frac{\nu}{A} \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \alpha} + \frac{1}{B} \frac{\partial A}{\partial \beta} \tilde{v} \right) + (k_2 + \nu k_1) w \right];$$

$$N_{\alpha\beta} = \delta (\tau_{\alpha\beta}^e + \tau_{\alpha\beta}^u) = \frac{E\delta}{1+\nu} \left[\frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{\tilde{u}}{A} \right) + \frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\tilde{v}}{B} \right) \right].$$

Поперечные силы гипотезы с учетом гипотезы о полном их восприятии средним слоем запишутся в виде:

$$Q_\alpha = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{\alpha z}^c dz = Gh \left(\varphi - k_1 \tilde{u} + \frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right);$$

$$Q_\beta = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{\beta z}^c dz = Gh \left(\psi - k_2 \tilde{v} + \frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \beta} \right).$$
(11)

При использовании гипотез теории пологих оболочек приведенные выше уравнения существенно упрощаются. Криволинейные координаты α и β принимаются приближенно равными Декартовым координатам x и y ($A=1$, $B=1$). Если поверхность оболочки задана в явном виде уравнением:

$$z = f(x, y),$$
(12)

то главные кривизны могут быть вычислены по формулам:

$$k_1 = k_x = -\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}; k_2 = k_y = -\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$
(13)

В силу малости кривизн k_1 и k_2 для пологой оболочки можно пренебречь членами $k_1 \tilde{u}$ и $k_2 \tilde{v}$ в формулах (11) и записать их в виде:

$$Q_x = Gh \left(\varphi + \frac{\partial w}{\partial x} \right);$$

$$Q_y = Gh \left(\psi + \frac{\partial w}{\partial y} \right).$$
(14)

Формулы (9) и (10) при использовании гипотез теории пологих оболочек принимают вид:

$$M_x = D \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \nu \frac{\partial \psi}{\partial y} \right); M_y = D \left(\nu \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \right);$$

$$M_{xy} = \frac{D(1-\nu)}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \right);$$

$$N_x = \frac{2E\delta}{1-\nu^2} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y + (k_x + \nu k_y) w);$$

$$N_y = \frac{2E\delta}{1-\nu^2} (\varepsilon_y + \nu \varepsilon_x + (k_y + \nu k_x) w);$$

$$N_{xy} = \frac{E\delta}{1+\nu} \gamma_{xy},$$
(15)

где $\varepsilon_x = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}$; $\varepsilon_y = \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y}$; $\gamma_{xy} = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x}$.

Для входящих в (15) усредненных деформаций ε_x , ε_y и γ_{xy} справедливо уравнение совместности:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}. \quad (16)$$

Уравнения равновесия теории пологих оболочек имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= 0; \quad \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = 0; \\ \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x &= 0; \\ \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - Q_y &= 0; \\ \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} - k_x N_x - k_y N_y + q &= 0, \end{aligned} \quad (17)$$

где q – поверхностная нагрузка.

Удовлетворить первым двум уравнениям системы (17) можно путем введения специальной функции Φ , часто называемой функцией напряжений, которая связана с внутренними усилиями формулами:

$$N_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}; \quad N_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}; \quad N_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}. \quad (18)$$

Зависимости, позволяющие определить величины ε_x , ε_y и γ_{xy} через усилия, следуют из уравнений (15):

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{2E\delta} (N_x - \nu N_y) - k_x w = \frac{1}{2E\delta} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right) - k_x w; \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{2E\delta} (N_y - \nu N_x) - k_y w = \frac{1}{2E\delta} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right) - k_y w; \\ \gamma_{xy} &= \frac{1+\nu}{E\delta} N_{xy} = -\frac{1+\nu}{E\delta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \quad (19)$$

В результате подстановки соотношений (19) в уравнение (16) получается первое разрешающее уравнение системы:

$$\frac{1}{2E\delta} \nabla^2 \nabla^2 \Phi - k_x \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - k_y \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0. \quad (20)$$

Преобразуя последнее уравнение равновесия системы (17) путём подстановки в него соотношений (14) и учитывая равенства (18), приходим ко второму разрешающему уравнению:

$$Gh(F + \nabla^2 w) - k_x \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - k_y \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = -q, \quad (21)$$

где $F = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial y}$.

Далее сведём последние три уравнения в (17) к одному, исключив поперечные силы:

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} - k_x N_x - k_y N_y + q = 0. \quad (22)$$

Для получения третьего дифференциального уравнения достаточно подставить в (22) выражения для M_x , M_y и M_{xy} из (15):

$$D\nabla^2 F - k_x \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - k_y \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = -q. \quad (23)$$

В итоге, расчёт трёхслойной полой оболочки с облегчённым заполнителем сводится к решению системы трёх линейных дифференциальных уравнений в частных производных (20), (21), (23) относительно неизвестных функций прогиба w , функции напряжений Φ и функции перемещений F .

В случае шарнирного закрепления прямоугольной оболочки по контуру (при условии опирания на диафрагмы, обладающими бесконечной жёсткостью в своей плоскости и нулевой жёсткостью из неё) существует возможность построения точного аналитического решения. Для этого применяется метод разложения в двойные тригонометрические ряды, аналогичный классическому решению Навье для пластин.

Функции Φ, F, w представляются в виде:

$$\begin{aligned} \Phi(x, y) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}; \\ w(x, y) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}; \\ F(x, y) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} F_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \end{aligned} \quad (24)$$

где a и b – размеры оболочки в плане.

Принятые функции $w(x, y)$ и $\Phi(x, y)$ обеспечивают равенство нулю на контуре прогибов и продольных сил N_x, N_y , что соответствует рассматриваемому закреплению.

Поверхностная нагрузка q также раскладывается в двойной ряд Фурье по синусам:

$$q(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} q_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (25)$$

Коэффициенты разложения q_{mn} вычисляются через двойной интеграл:

$$q_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b q(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy. \quad (26)$$

В частном случае равномерно распределенной по площади нагрузки ($q = \text{const}$) коэффициенты q_{mn} определяются по формуле:

$$q_{mn} = \begin{cases} \frac{16q}{mn\pi^2}, & \text{если } m \text{ и } n - \text{нечетные} \\ 0, & \text{если } m \text{ или } n - \text{четное.} \end{cases} \quad (27)$$

Решение рассмотрим на примере оболочки в форме эллиптического параболоида (рис. 2).

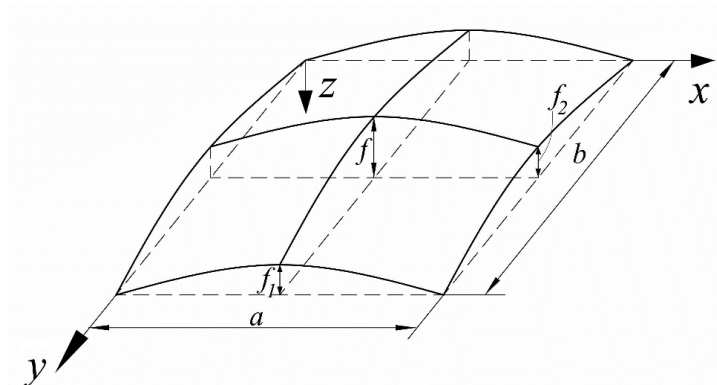


Рисунок 2 – Геометрия рассматриваемой оболочки

Уравнение поверхности для рассматриваемой оболочки имеет вид:

$$z = f \left\{ \frac{f_1}{f} \left(2 \frac{x}{a} - 1 \right)^2 + \frac{f_2}{f} \left(2 \frac{y}{b} - 1 \right)^2 - 1 \right\}, \quad (28)$$

где $f = f_1 + f_2$.

Формулы для главных кривизн оболочки имеют вид:

$$k_x = -\frac{8f_1}{a^2}; k_y = -\frac{8f_2}{b^2}. \quad (29)$$

Подставив (29) в (20), (21), (23), получим следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2E\delta} \nabla^2 \nabla^2 \Phi + \frac{8f_1}{a^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{8f_2}{b^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= 0; \\ Gh(F + \nabla^2 w) + \frac{8f_1}{a^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{8f_2}{b^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} &= -q; \\ D\nabla^2 F + \frac{8f_1}{a^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{8f_2}{b^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} &= -q. \end{aligned} \quad (30)$$

Подстановка разложений (24) и (25) в (30) приводит к системе из трех линейных алгебраических уравнений с тремя неизвестными для каждой тройки коэффициентов Φ_{mn} , w_{mn} , F_{mn} :

$$\begin{aligned} \frac{\pi^2}{2E\delta} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 \Phi_{mn} - \frac{8}{a^2 b^2} (f_1 n^2 + f_2 m^2) w_{mn} &= 0; \\ Gh \left(-\pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) w_{mn} + F_{mn} \right) - \frac{8\pi^2}{a^2 b^2} (f_1 n^2 + f_2 m^2) \Phi_{mn} &= -q_{mn}; \\ \pi^2 D \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) F_{mn} + \frac{8\pi^2}{a^2 b^2} (f_1 n^2 + f_2 m^2) \Phi_{mn} &= q_{mn}. \end{aligned} \quad (31)$$

Определив из (31) коэффициенты Φ_{mn} , w_{mn} , F_{mn} , далее можно найти прогибы оболочки по второй формуле из (24), а также усилия N_x , N_y и N_{xy} по формулам:

$$\begin{aligned} N_x &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \Phi_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}; \\ N_y &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \Phi_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}; \\ N_{xy} &= - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{mn\pi^2}{ab} \Phi_{mn} \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b}. \end{aligned} \quad (32)$$

Уравнения (20), (21), (23) не являются достаточными для нахождения величин M_x , M_y , M_{xy} , Q_x , Q_y . Чтобы восполнить этот недостаток, необходимо вывести два вспомогательных уравнения для функций φ и ψ . С этой целью подставим первые три выражения из (15) в третье и четвертое уравнения системы (17):

$$Q_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = D \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right); \quad (33)$$

$$Q_y = \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} = D \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right).$$

Применим функцию перемещений F для исключения функции ψ из формулы для Q_x и функции φ из формулы для Q_y в (33):

$$\begin{aligned} Q_x &= \frac{D}{2} \left((1-\nu) \nabla^2 \varphi + (1+\nu) \frac{\partial F}{\partial x} \right); \\ Q_y &= \frac{D}{2} \left((1-\nu) \nabla^2 \psi + (1+\nu) \frac{\partial F}{\partial y} \right). \end{aligned} \quad (34)$$

Приравнивание правых частей выражений (34) и (14) дает:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \varphi - \frac{2Gh}{D(1-\nu)} \varphi &= \frac{2Gh}{D(1-\nu)} \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\partial F}{\partial x}; \\ \nabla^2 \psi - \frac{2Gh}{D(1-\nu)} \psi &= \frac{2Gh}{D(1-\nu)} \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\partial F}{\partial y}. \end{aligned} \quad (35)$$

Дифференциальные уравнения (35) позволяют определить функции φ и ψ после нахождения функций w и F . Для решения уравнений (35) с использованием двойных рядов функции φ и ψ примем в виде:

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{mn} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}; \\ \psi(x, y) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \psi_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b}. \end{aligned} \quad (36)$$

Выбранные функции обеспечивают равенство нулю на контуре изгибающих моментов M_x и M_y , что соответствует шарнирному опиранию. Подставив (36) в (35), получим следующие формулы коэффициентов φ_{mn} и ψ_{mn} :

$$\begin{aligned} \varphi_{mn} &= \frac{m\pi \left((1+\nu) F_{mn} - \frac{2Gh}{D} w_{mn} \right)}{a \left(\pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) (1-\nu) + \frac{2Gh}{D} \right)}; \\ \psi_{mn} &= \frac{n\pi \left((1+\nu) F_{mn} - \frac{2Gh}{D} w_{mn} \right)}{b \left(\pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) (1-\nu) + \frac{2Gh}{D} \right)}. \end{aligned} \quad (37)$$

3. Результаты исследования и их анализ

Для апробации полученного замкнутого решения была рассмотрена задача, которая ранее была решена в работе [22]. В указанной работе расчет выполнялся численно методом конечных разностей (МКР) с учетом ползучести среднего слоя при следующих исходных данных: размеры оболочки в плане $a = b = 3$ м, величина равномерно распределенной по площади нагрузки $q = 2$ кПа, толщина оболочки $h = 8$ см, толщина обшивок $t = 1$ мм. Обшивки стальные с модулем упругости $E = 2 \cdot 10^5$ МПа и коэффициентом Пуассона $\nu = 0,3$. Средний слой – пенополиуретан с кратковременным модулем сдвига $G = 4,85$ МПа и длительным модулем сдвига $G_{dl} = 3,17$ МПа. Показатель пологости оболочки $f/a = 1/15$.

На рис. 3 приведены значения прогиба в центральной точке оболочки ($x = a/2, y = b/2$), полученные при различном числе членов ряда k (m и n пробегает нечетные значения от 1 до $2k-1$).

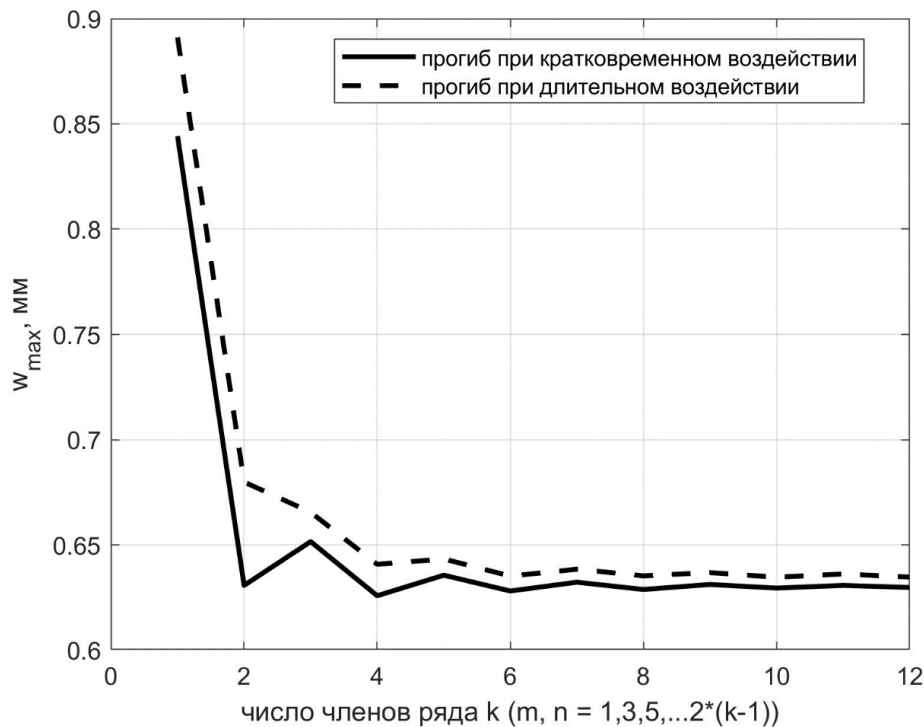


Рисунок 3 – Зависимость максимального прогиба от числа членов ряда

Из рис. 3 видна хорошая сходимость решения. При $k = 3$ значение прогиба для случая длительного действия нагрузки составляет 0,666 мм, что менее чем на 5% отличается от решения методом конечных разностей, полученного в работе [22] ($w_{max}^{МКР} = 0,635$ мм). При $k = 4$ расхождение с МКР составляет менее 1%. Также рис. 3 показывает, что ползучесть среднего слоя не оказывает заметного влияния на максимальный прогиб. При $k = 12$ значения стрелы прогиба при кратковременном и длительном действии нагрузки отличаются на 0,8%. Этот результат согласуется с решениями, полученными ранее в работах [22-24].

Вместе с тем, полученный результат о незначительном влиянии ползучести заполнителя на прогиб справедлив только для центральной точки. На рис. 4 показано сравнение эпюр прогибов по линии симметрии $y = b/2$ при кратковременном и длительном действии нагрузки. При удалении от центральной точки влияние деформаций поперечного сдвига заполнителя на прогиб становится более выраженным, что приводит к росту прогиба при снижении модуля сдвига заполнителя. Это связано с характером распределения поперечных сил, который представлен на рис. 5 на примере поперечной силы Q_x . В центральной точке поперечные силы равны нулю и нелинейно возрастают при приближении к краям. При снижении модуля сдвига заполнителя происходит релаксация касательных напряжений в среднем слое, что приводит к уменьшению поперечных сил, как видно из рис. 5.

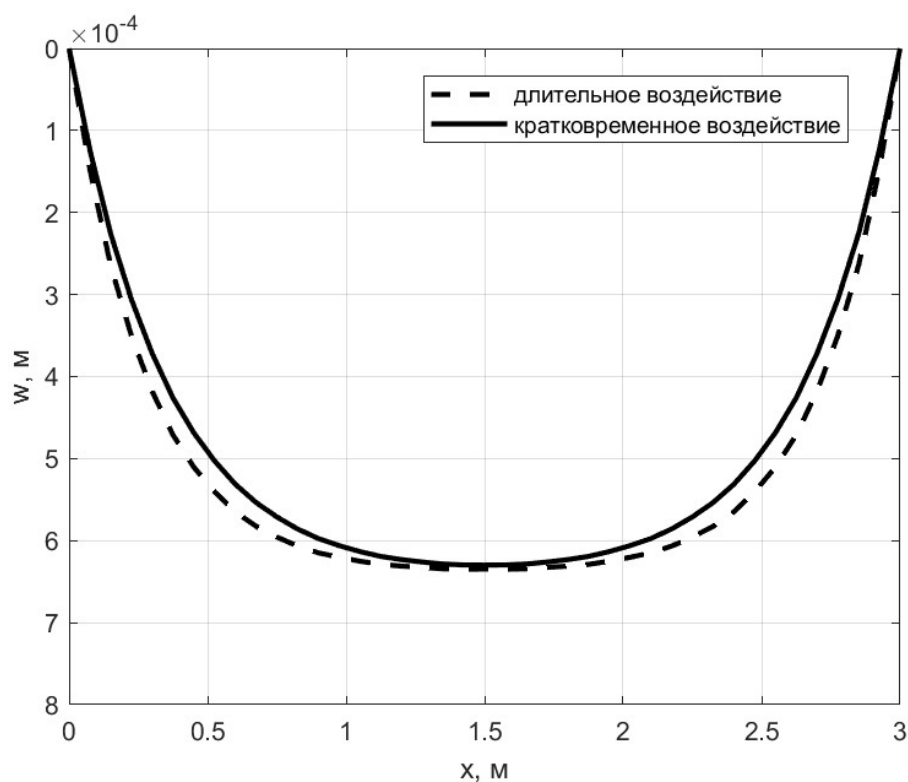


Рисунок 4 – Сравнение эпюр прогиба по оси симметрии $y = b/2$ при кратковременном и длительном воздействии

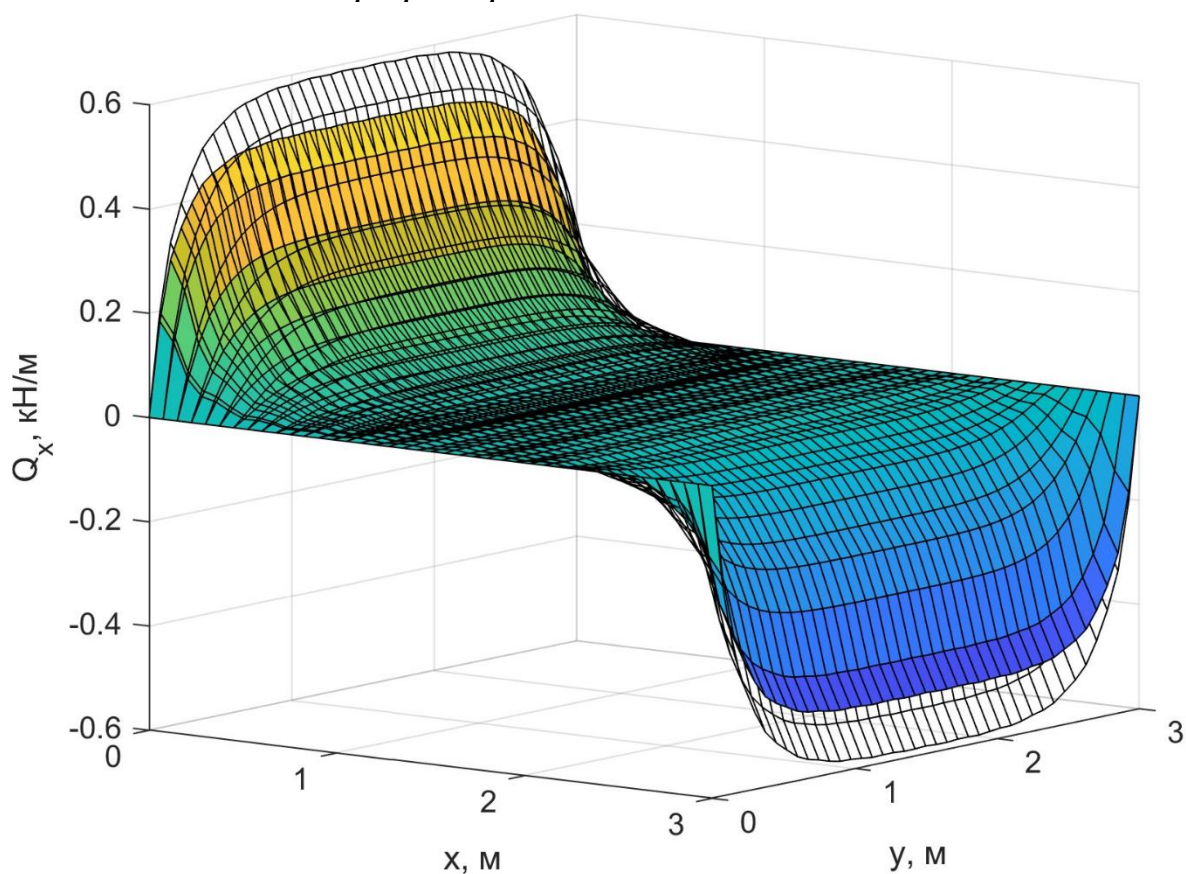


Рисунок 5 – Сравнение распределения поперечных сил Q_x при кратковременном воздействии (сетчатая поверхность) и длительном воздействии (закрашенная поверхность)

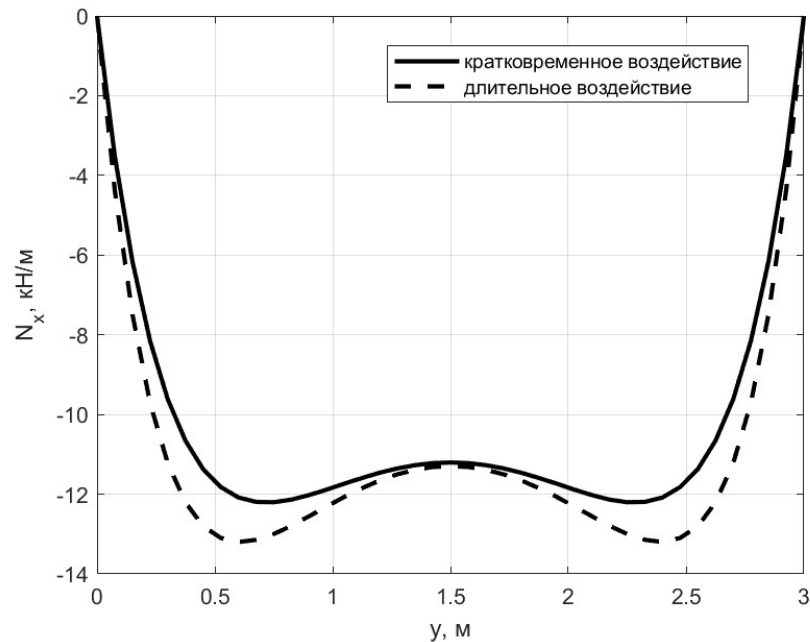


Рисунок 6 – Сравнение эпюр N_x в сечении $x = a/2$ при кратковременном и длительном воздействии

Следствием релаксации касательных напряжений в среднем слое является рост по абсолютному значению продольных сил N_x (рис. 6), N_y , а также сдвигающих сил N_{xy} (рис. 7). Снижение поперечных сил при уменьшении модуля сдвига заполнителя приводит к снижению абсолютных значений изгибающих и крутящих моментов (рис. 8-9), что напрямую следует из третьего и четвертого уравнения равновесия в (17).

Из рис. 6-9 нельзя сделать однозначный вывод о влиянии ползучести среднего слоя на напряженно-деформированное состояние обшивок, так как изгибающие и крутящие моменты в процессе ползучести убывают, а продольные и сдвигающие силы возрастают. Для проведения такого анализа вычислялись эквивалентные напряжения по Мизесу с использованием формулы:

$$\sigma_{\text{экв}} = \sqrt{\sigma_x^2 - \sigma_x \sigma_y + \sigma_y^2 + 3\tau_{xy}^2}. \quad (38)$$

Нормальные и касательные напряжения в обшивках вычислялись по формулам:

$$\begin{aligned} \sigma_x^H &= \frac{N_x}{2\delta} + \frac{M_x}{h\delta}; & \sigma_x^e &= \frac{N_x}{2\delta} - \frac{M_x}{h\delta}; \\ \sigma_y^H &= \frac{N_y}{2\delta} + \frac{M_y}{h\delta}; & \sigma_y^e &= \frac{N_y}{2\delta} - \frac{M_y}{h\delta}; \\ \tau_{xy}^H &= \frac{N_{xy}}{2\delta} + \frac{M_{xy}}{h\delta}; & \tau_{xy}^e &= \frac{N_{xy}}{2\delta} - \frac{M_{xy}}{h\delta}. \end{aligned} \quad (39)$$

Максимум эквивалентных напряжений по Мизесу для верхней обшивки достигается в угловых точках и составляет 15,21 МПа при кратковременном воздействии и 18,15 МПа при длительном воздействии. Для нижней обшивки опасными также являются угловые точки. Максимумы напряжений составляют 21,07 МПа при кратковременном и 22,74 МПа при длительном воздействии. Таким образом, ползучесть заполнителя приводит к существенному росту максимальных эквивалентных напряжений в верхней обшивке (на 19%).

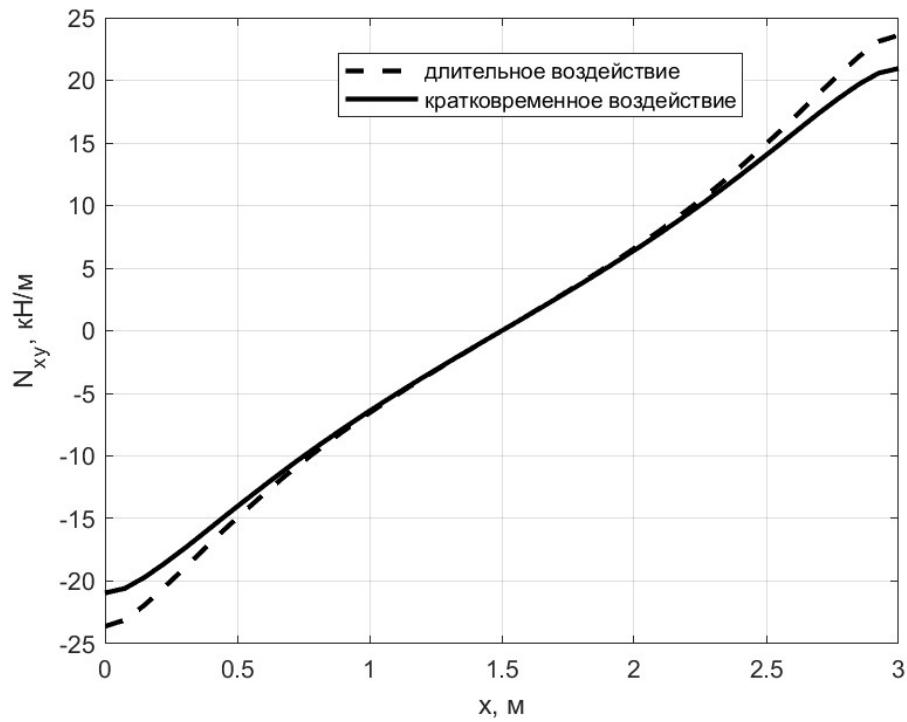


Рисунок 7 – Сравнение эпюр N_{xy} в сечении $y = 0$ при кратковременном и длительном воздействии

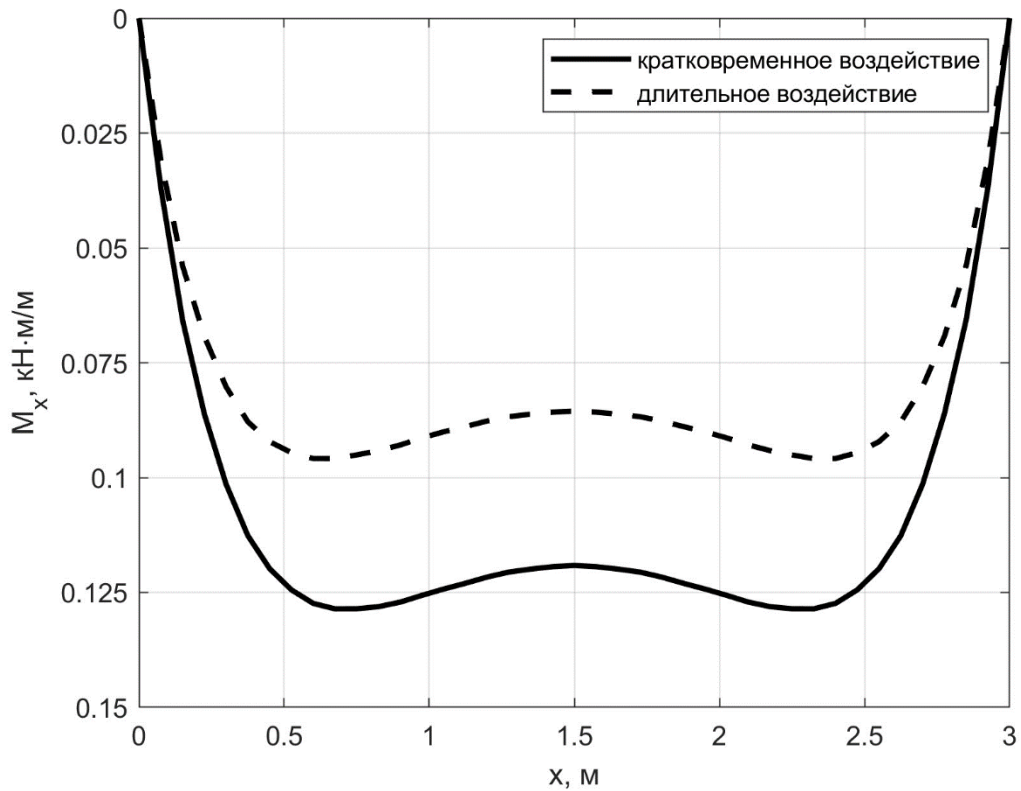


Рисунок 8 – Сравнение эпюр M_x в сечении $y = b/2$ при кратковременном и длительном воздействии

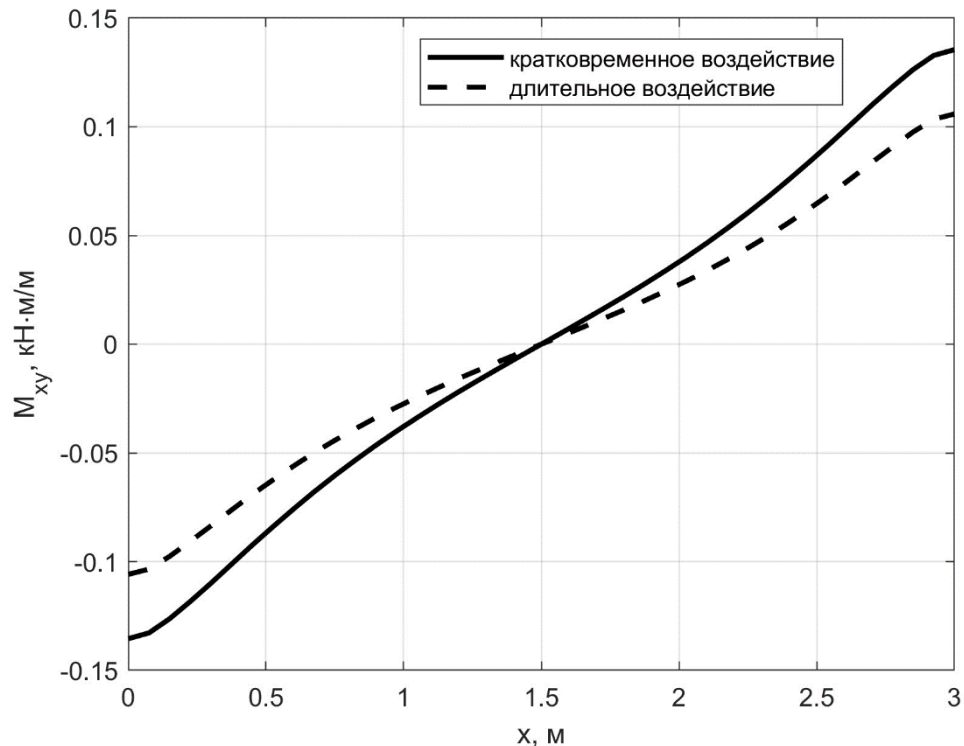


Рисунок 9 – Сравнение эпюр M_{xy} в сечении $y = 0$ при кратковременном и длительном воздействии

4. Заключение

1. В работе представлена математическая модель и аналитический метод расчёта трёхслойных пологих оболочек с лёгким заполнителем в рамках гипотез теории пологих оболочек. На основе кинематических и статических соотношений получена система трёх разрешающих дифференциальных уравнений в частных производных относительно функций прогиба, напряжений и усреднённых перемещений. Для случая шарнирного закрепления прямоугольной оболочки по контуру предложено замкнутое решение в виде двойных тригонометрических рядов, аналогичное решению Навье для пластин.

2. На примере оболочки в форме эллиптического параболоида показана высокая сходимость рядов уже при небольшом числе членов ($k = 3-4$), что подтверждает эффективность предложенного подхода. Сравнение с численными результатами, полученными методом конечных разностей, демонстрирует хорошее согласование (расхождение менее 1%).

3. Исследовано влияние модуля сдвига среднего слоя на напряжённо-деформированное состояние оболочки. Установлено, что снижение модуля сдвига заполнителя, которое может иметь место в процессе ползучести при длительных воздействиях, практически не влияет на максимальный прогиб в центре оболочки, однако приводит к перераспределению внутренних усилий. Происходит снижение поперечных сил и изгибающих моментов при одновременном росте продольных и сдвигающих усилий. В результате эквивалентные напряжения по Мизесу в нижней обшивке могут возрастать до 15%, что необходимо учитывать при проектировании долговечных конструкций.

4. Предложенная методика позволяет эффективно анализировать поведение трёхслойных пологих оболочек под действием статических нагрузок, учитывая деформации поперечного сдвига заполнителя. Результаты работы могут быть использованы при проектировании лёгких строительных конструкций, а также служить основой для дальнейших исследований, включая учёт нелинейных эффектов и динамических воздействий.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Власов В.З. Избранные труды: [в 3 т.] / Акад. наук СССР. Тонкостенные пространственные системы. М.: Изд-во Акад. наук СССР, 1964. 472 с.
2. Goldenveizer A.L. Theory of elastic thin shells //Naval Engineers Journal. 1962. Т. 74. №. 3. – С. 582. <https://doi.org/10.1111/j.1559-3584.1962.tb04855.x>
3. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластины и оболочки. М.:Наука, 1966. 636 с.
4. Plantema F.J. Sandwich Construction: The Bending and Buckling of Sandwich Beams, Plates, and Shells. New York: John Wiley & Sons, 1966. 280 с.
5. Алфутов Н. А. Зиновьев П.А., Попов Б.Г. Расчет многослойных пластин и оболочек из композиционных материалов. М.: Машиностроение, 1984. 264 с.
6. Carrera E. Theories and finite elements for multilayered plates and shells: a unified compact formulation with numerical assessment and benchmarking //Archives of Computational Methods in Engineering. 2003. Т. 10. №. 3. С. 215-296. <https://doi.org/10.1007/BF02736224>
7. Reddy J. N. Mechanics of laminated composite plates and shells: theory and analysis. CRC press, 2003. 830 с.
8. Zenkour A. M. A comprehensive analysis of functionally graded sandwich plates: Part 1—Deflection and stresses //International journal of solids and structures. 2005. Т. 42. №. 18-19. С. 5224-5242. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2005.02.015>
9. Kattimani M. A., Hussain S. M., Khasge P., Mohrir S., Suman S., Masum, H. Utilizing finite element analysis to evaluate the monitoring of sandwich beam conditions //Brazilian Journal of Development. 2024. Т. 10. №. 4. С. e68942. <https://doi.org/10.34117/bjdv10n4-032>
10. Бакулин В. Н. Эффективная трехмерная оболочечная модель для послойного исследования напряженно-деформированного состояния трехслойных нерегулярных цилиндрических оболочек //Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. 2024. №. 3. С. 64-70. <https://doi.org/10.55959/MSU0579-9368-1-65-3-10>
11. Ying Z. G., Ruan Z. G., Ni Y. Q. Parametrically excited instability of periodic visco-elastomer sandwich plate with supported masses under quadrilateral longitudinal harmonic excitations //International Journal of Structural Stability and Dynamics. 2023. Т. 23. №. 05. С. 2350050. <https://doi.org/10.1142/S0219455423500505>
12. Jafari N., Azhari M. Creep instability analysis of viscoelastic sandwich shell panels //Mechanics of Time-Dependent Materials. 2024. Т. 28. №. 1. С. 65-79. <https://doi.org/10.1007/s11043-024-09673-9>
13. Kumar N., Panda S. Analysis of static and dynamic stability of an axially loaded sandwich beam with 2–2 or 1–3 viscoelastic composite core layer //Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering. 2025. Т. 47. №. 11. С. 561. <https://doi.org/10.1007/s40430-025-05882-6>
14. Гатиев М. Ш., Аюбов Н. А., Ключев С. В., Литвинов, С. В. Влияние деформаций сдвига на напряженно-деформированное состояние железобетонных плит // Системные технологии. 2023. Т. 49. № 4. С. 100-108. https://doi.org/10.55287/22275398_2023_4_100
15. Магомедов М.А., Кузнецов В.В., Языев, Б.М., Литвинов С.В. Численно-аналитический метод в решении задачи ползучести полой оболочки //Вестник Дагестанского государственного технического университета. Технические науки. 2025. Т. 52. №. 2. С. 190-200. <https://doi.org/10.21822/2073-6185-2025-52-2-190-200>
16. Schoeffer J. A verified analytical sandwich beam model for soft and hard cores: comparison to existing analytical models and finite element calculations //Acta Mechanica. 2023. Т. 234. №. 6. С. 2543. <https://doi.org/10.1007/s00707-023-03497-3>
17. Njim E. K., Bakhy S. H., Al-Waily M. Analytical and numerical flexural properties of polymeric porous functionally graded (PFGM) sandwich beams //Journal of Achievements in Materials and Manufacturing Engineering. 2022. Т. 110. №. 1. С. 5-15. <https://doi.org/10.5604/01.3001.0015.7026>
18. Sala B. et al. Creep behaviour of eco-friendly sandwich composite materials under hygrothermal conditions //Composites Part B: Engineering. 2022. Т. 247. С. 110291. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2022.110291>
19. Silva T., Correia L., Dehshirizadeh M., Sena-Cruz J. Flexural creep response of hybrid GFRP–FRC sandwich panels //Materials. 2022. Т. 15. №. 7. С. 2536. <https://doi.org/10.3390/ma15072536>
20. Li W., Xia R., Li X., Huo M., Xu J. Life evaluation of sandwich panels based on coupled creep and fatigue damage evolution //International Journal of Fatigue. 2022. Т. 159. С. 106819. <https://doi.org/10.1016/j.ijfatigue.2022.106819>
21. Sala B., Gabrion X., Jeannin T., Trivaudey F., Guicheret-Retel V., Scarpa F., Placet V. Effect of hygrothermal ageing on the shear creep behaviour of eco-friendly sandwich cores //Composites Part B: Engineering. 2022. Т. 231. С. 109572. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2021.109572>
22. Chepurnenko A. S. Stress-strain state of three-layered shallow shells under conditions of nonlinear creep //Magazine of Civil Engineering. 2017. №. 8 (76). С. 156-168. <https://doi.org/10.18720/MCE.76.14>

23. Андреев В. И., Языев Б. М., Чепурненко А. С., Литвинов С.В. Расчет трехслойной пологой оболочки с учетом ползучести среднего слоя //Вестник МГСУ. 2015. №. 7. С. 17-24.
24. Chepurnenko A., Mailyan L., Jazyev B. Calculation of the three-layer shell taking into account creep //Procedia Engineering. 2016. Т. 165. С. 990-994. <https://doi.org/10.1016/j.proeng.2016.11.810>

REFERENCES

1. Vlasov V.Z. Selected works: [in 3 vols.] Thin-walled spatial systems. Moscow: Publishing House of the USSR Academy of Sciences; 1964. 472 p.
2. Goldenveizer A.L. Theory of elastic thin shells. *Naval Engineers Journal*. 1962;74(3):582. <https://doi.org/10.1111/j.1559-3584.1962.tb04855.x>
3. Timoshenko S.P., Woinowsky-Krieger S. Plates and shells. Moscow: Nauka; 1966. 636 p.
4. Plantema F.J. Sandwich Construction: The Bending and Buckling of Sandwich Beams, Plates, and Shells. New York: John Wiley & Sons; 1966. 280 p.
5. Alfutov N.A., Zinoviev P.A., Popov B.G. Calculation of multilayer plates and shells made of composite materials. Moscow: Mashinostroenie; 1984. 264 p.
6. Carrera E. Theories and finite elements for multilayered plates and shells: a unified compact formulation with numerical assessment and benchmarking. *Archives of Computational Methods in Engineering*. 2003;10(3):215-296. <https://doi.org/10.1007/BF02736224>
7. Reddy J.N. Mechanics of laminated composite plates and shells: theory and analysis. CRC Press; 2003. 830 p.
8. Zenkour A.M. A comprehensive analysis of functionally graded sandwich plates: Part 1—Deflection and stresses. *International Journal of Solids and Structures*. 2005;42(18-19):5224-5242. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2005.02.015>
9. Kattimani M.A., Hussain S.M., Khasge P., Mohrir S., Suman S., Masum H. Utilizing finite element analysis to evaluate the monitoring of sandwich beam conditions. *Brazilian Journal of Development*. 2024;10(4):e68942. <https://doi.org/10.34117/bjdv10n4-032>
10. Bakulin V.N. Effective three-dimensional shell model for layer-by-layer analysis of the stress-strain state of three-layer irregular cylindrical shells. *Vestnik Moskovskogo universiteta. Seriya 1. Matematika. Mekhanika [Moscow University Bulletin. Series 1. Mathematics. Mechanics]*. 2024;(3):64-70. <https://doi.org/10.55959/MSU0579-9368-1-65-3-10>
11. Ying Z.G., Ruan Z.G., Ni Y.Q. Parametrically excited instability of periodic visco-elastomer sandwich plate with supported masses under quadrilateral longitudinal harmonic excitations. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*. 2023;23(05):2350050. <https://doi.org/10.1142/S0219455423500505>
12. Jafari N., Azhari M. Creep instability analysis of viscoelastic sandwich shell panels. *Mechanics of Time-Dependent Materials*. 2024;28(1):65-79. <https://doi.org/10.1007/s11043-024-09673-9>
13. Kumar N., Panda S. Analysis of static and dynamic stability of an axially loaded sandwich beam with 2–2 or 1–3 viscoelastic composite core layer. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*. 2025;47(11):561. <https://doi.org/10.1007/s40430-025-05882-6>
14. Gatiev M.Sh., Ayubov N.A., Klyuev S.V., Litvinov S.V. Influence of shear deformations on the stress-strain state of reinforced concrete slabs. *Sistemnye tekhnologii [System Technologies]*. 2023;49(4):100-108. https://doi.org/10.55287/22275398_2023_4_100
15. Magomedov M.A., Kuznetsov V.V., Yazyev B.M., Litvinov S.V. Numerical-analytical method for solving the creep problem of a shallow shell. *Vestnik Dagestanskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Tekhnicheskie nauki [Herald of Dagestan State Technical University. Technical Sciences]*. 2025;52(2):190-200. <https://doi.org/10.21822/2073-6185-2025-52-2-190-200>
16. Schoeffer J. A verified analytical sandwich beam model for soft and hard cores: comparison to existing analytical models and finite element calculations. *Acta Mechanica*. 2023;234(6):2543. <https://doi.org/10.1007/s00707-023-03497-3>
17. Njim E.K., Bakhy S.H., Al-Waily M. Analytical and numerical flexural properties of polymeric porous functionally graded (PFGM) sandwich beams. *Journal of Achievements in Materials and Manufacturing Engineering*. 2022;110(1):5-15. <https://doi.org/10.5604/01.3001.0015.7026>
18. Sala B., et al. Creep behaviour of eco-friendly sandwich composite materials under hygrothermal conditions. *Composites Part B: Engineering*. 2022;247:110291. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2022.110291>
19. Silva T., Correia L., Dehshirizadeh M., Sena-Cruz J. Flexural creep response of hybrid GFRP–FRC sandwich panels. *Materials*. 2022;15(7):2536. <https://doi.org/10.3390/ma15072536>
20. Li W., Xia R., Li X., Huo M., Xu J. Life evaluation of sandwich panels based on coupled creep and fatigue damage evolution. *International Journal of Fatigue*. 2022;159:106819. <https://doi.org/10.1016/j.ijfatigue.2022.106819>

21. Sala B., Gabrion X., Jeannin T., Trivaudey F., Guicheret-Retel V., Scarpa F., Placet V. Effect of hygrothermal ageing on the shear creep behaviour of eco-friendly sandwich cores. *Composites Part B: Engineering*. 2022;231:109572. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2021.109572>
22. Chepurnenko A.S. Stress-strain state of three-layered shallow shells under conditions of nonlinear creep. *Magazine of Civil Engineering*. 2017;(8(76)):156-168. <https://doi.org/10.18720/MCE.76.14>
23. Andreev V.I., Yazyev B.M., Chepurnenko A.S., Litvinov S.V. Calculation of a three-layer shallow shell considering creep of the middle layer. *Vestnik MGSU [Proceedings of Moscow State University of Civil Engineering]*. 2015;(7):17-24.
24. Chepurnenko A., Mailyan L., Jazyev B. Calculation of the three-layer shell taking into account creep. *Procedia Engineering*. 2016;165:990-994. <https://doi.org/10.1016/j.proeng.2016.11.810>

Информация об авторах:

Мерзлякова Александра Дмитриевна

ФГАОУ ВО «Российский университет транспорта» РУТ(МИИТ), Москва, Россия
старший преподаватель кафедры «Системы автоматизированного проектирования»
E-mail: merzlyakova.aleksandra@inbox.ru

Чепурненко Антон Сергеевич

ФГБОУ ВО «Донской государственный технический университет», Ростов-на-Дону, Россия,
д-р техн. наук, проф., проф. кафедры «Строительная механика и теория сооружений»,
E-mail: anton_chepurnenk@mail.ru

Языев Батыр Меретович

ФГБОУ ВО «Донской государственный технический университет», Ростов-на-Дону, Россия,
д-р техн. наук, проф., проф. кафедры «Строительная механика и теория сооружений»,
E-mail: ps62@yandex.ru

Тюрина Василина Сергеевна

ФГБОУ ВО «Донской государственный технический университет», Ростов-на-Дону, Россия,
канд. техн. наук, доц. кафедры «Строительная механика и теория сооружений»,
E-mail: vasilina.93@mail.ru

Information about authors:

Merzlyakova Alexandra D.

Russian University of Transport (MIIT), Moscow, Russia
Senior lecturer of the department of computer-aided design systems
E-mail: merzlyakova.aleksandra@inbox.ru

Chepurnenko Anton S.

Don State Technical University, Rostov-on-Don, Russia,
doctor in tech. sc., prof., prof. of the dep. of structural mechanics and theory of structures
E-mail: anton_chepurnenk@mail.ru

Yazyev Batyr M.

Don State Technical University, Rostov-on-Don, Russia,
doctor in tech. sc., prof., prof. of the dep. of structural mechanics and theory of structures
E-mail: ps62@yandex.ru

Tyurina Vasilina S.

Don State Technical University, Rostov-on-Don, Russia,
candidate in tech. sc., associate prof. of the dep. of structural mechanics and theory of structures
E-mail: vasilina.93@mail.ru

Статья поступила в редакцию 01.04.2026
Одобрена после рецензирования 12.04.2026
Принята к публикации 13.04.2026

The article was submitted 01.04.2026
Approved after reviewing 12.04.2026
Accepted for publication 13.04.2026