

УДК 624.04

DOI: 10.33979/2073-7416-2026-124-2-19-33

В.Л. МОНДРУС¹, Е.Е. ПАРАМОНОВ¹, М.А. ПАНОВ¹

¹ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет», г. Москва, Россия

ЛИНЕЙНЫЕ И НЕЛИНЕЙНЫЕ ГАСИТЕЛИ КОЛЕБАНИЙ В СИСТЕМЕ ВИБРОЗАЩИТЫ ЗДАНИЙ

Аннотация. В статье представлен алгоритм расчета зданий и сооружений, рассматриваемых как системы с конечным числом степеней свободы, в конструктивную схему которых с целью ограничения уровня колебаний включен динамический гаситель колебаний. При построении алгоритма расчета используются метод основанный на численном решении систем нелинейных интегральных уравнений, к которым сводятся системы нелинейных дифференциальных уравнений колебаний систем с конечным числом степеней свободы. Численный алгоритм строится на основе шагового метода по времени с уточнением нелинейных составляющих итерациями.

В результате получены расчетные зависимости, позволяющие производить расчет зданий с линейными и нелинейными гасителями колебаний, в частности, с включающимися при достижении гасителем колебаний заданных перемещений дополнительными связями. Произведен расчет здания с линейным и нелинейным гасителем колебаний, показана эффективность применения различных типов гасителей колебаний в системе виброзащиты зданий и выполнен анализ результатов расчета.

Ключевые слова: гасители колебаний, импульсная переходная функция, виброзащита.

V.L. MONDRUS¹, E.E. PARAMONOV¹, M.A. PANOV¹

¹Moscow State University of Civil Engineering (National Research University), Moscow, Russia

LINEAR AND NONLINEAR OSCILLATION DAMPERS IN THE VIBRATION PROTECTION SYSTEM OF BUILDINGS

Abstract. The article presents an algorithm for the analysis of buildings and structures modeled as systems with a finite number of degrees of freedom, whose structural model includes a dynamic vibration damper intended to limit vibration levels. The algorithm is constructed using a method based on the numerical solution of systems of nonlinear integral equations, to which the systems of nonlinear differential equations of motion for finite-degree-of-freedom systems are reduced. The numerical procedure is implemented using a time-stepping method with iterative refinement of the nonlinear terms.

As a result, computational relationships were obtained that make it possible to analyze buildings equipped with linear and nonlinear vibration dampers, including dampers with additional links that are activated when specified displacements are reached. Calculations were performed for a building with both linear and nonlinear vibration dampers, demonstrating the effectiveness of various types of dampers within the building vibration protection system, and an analysis of the results was carried out.

Keywords: vibration dampers, impulse response function, vibration protection.

© Мондрус В.Л., Парамонов Е.Е., Панов М.А., 2026\

1. Введение

Развитие инфраструктуры городов, рост и модернизация промышленности приводит к увеличению вибрационной нагрузки на здания и сооружения, ускоряя процессы их физического износа. В стесненных условиях городской застройки возможны ситуации, при которых вибрации грунта, вызываемые виброактивным оборудованием, высокоскоростными поездами передаются на близрасположенные здания и сооружения, а также ситуации, при которых необходима установка виброактивного оборудования внутри многоэтажного здания, оказывающие заметное негативное воздействие на конструкции зданий и здоровье людей. В ряде случаев влияние вибродинамических воздействий может иметь более серьезные последствия в виде нарушения эксплуатационной пригодности, в том числе, появление трещин, развитие недопустимых деформаций и даже разрушение.

В связи с этим возникает необходимость в развитии методов снижения влияния вибраций на здания и сооружения: устройство виброизоляции под виброактивное оборудование, использование вертикальных барьеров в грунте для снижения уровня передаваемых колебаний через грунт, устройство виброизоляции здания, а также устройство динамических гасителей колебаний (ДГК).

Динамический гаситель колебаний – это устройство, состоящее из массы (жесткого элемента) и упругой связи, присоединяющей массу к опорной конструкции (перекрытию, балке и т.д.), в котором возникает сила инерции, уменьшающая уровень колебаний защищаемой конструкции [1]. По характеру зависимости реакции гасителя от амплитуд колебаний можно разделить на линейные и нелинейные ДГК.

Наиболее универсальным методом виброзащиты зданий и сооружений может быть применение ДГК, так как конструктивные решения ДГК достаточно просты и легко учитываются на этапе проектирования здания или сооружения, а также в процессе эксплуатации при уровнях колебаний, превышающих значения, установленных нормативными документами, с возможностью индивидуальной настройки гасителя под характер внешнего воздействия.

Теория динамического гашения колебаний, основные результаты применения ДГК при различных динамических воздействиях, а также оптимальные параметры и различные конструктивные схемы ДГК с различными характеристиками демпфирования подробно описаны в известной монографии Б.Г. Коренева и Л.М. Резникова [2]. Большой вклад в создание различных систем гасителей колебаний и практических методов расчета внесли В.С. Поляков, Н.А. Пикулев, И.С. Шейнин., М.Я. Волоцкий, А.В. Дукарт, А.И. Олейник [3-4] и другие.

Исследования применения различных типов гасителей колебаний, в том числе, нелинейных и методов их расчета, в частности, с применением численных, численно-аналитических методов, программ на основе метода конечных элементов, остается актуальной задачей и рассматривается в работах современных отечественных и зарубежных авторов [5-13].

Метод расчета нелинейных систем, основанный на сведении дифференциальных уравнений движения к системам нелинейных интегральных уравнений описан в [14] и развит применительно к расчету различных систем виброзащиты, например, в работах [15-18]. Данный численно-аналитический метод принят в качестве основного в связи возможностью его применения для анализа различных расчётных схем с конечным числом степеней свободы с возможностью учета влияния на систему ДГК с различными жесткостными характеристиками (линейными, нелинейными), в частности с включающимися связями, а также достаточно простого для построения алгоритма и программы расчета.

2. Модели и методы

В статье приводится одна из возможных схем виброзащиты, включающая динамический гаситель колебаний, установленный на одном из этажей защищаемого здания. Расчетная схема представляется в виде упругого стержня с присоединенными массами в уровне перекрытия. Воздействия могут быть как силовые, так и кинематические. Подобная схема, как известно, принята также и в основном нормативном документе СП 14.13330 «Строительство в сейсмических районах» при расчете на сейсмическое воздействие.

Место установки ДГК определяется расчетом и зависит от частоты внешнего воздействия и зоны максимальных амплитуд соответствующих форм колебаний близких по частоте к спектру частот воздействия [2].

Для построения алгоритма расчета зданий с линейными и нелинейными гасителями колебаний используется метод основанный на сведении дифференциальных уравнений движения к системе нелинейных интегральных уравнений [14]. Решения дифференциальных уравнений движения записаны для частного случая при действии внешних нагрузок на присоединенные массы и позволяют производить расчет, например, при действии динамических нагрузок от виброактивного оборудования установленного на этажах здания, однако, при небольших преобразованиях формул, записываются решения при кинематическом воздействии (смещении основания).

Алгоритм расчета зданий с линейным гасителем колебаний

Уравнение движения линейного гасителя колебаний, расчетная схема которого отображена на рисунке 1, можно представить в виде [14]:

$$m_{ds}\ddot{y}_d + \left(1 + 2v_{ds}\frac{d}{dt}\right)k_{ds}\Delta y_s = 0, \quad (1)$$

где $\Delta y_s = y_d - y_s$; (2)

y_d, y_s – перемещения гасителя колебаний и массы m_s , в уровне которой установлен гаситель колебаний;

m_{ds} – масса гасителя колебаний;

k_{ds} – жесткость упругих элементов линейного гасителя колебаний.

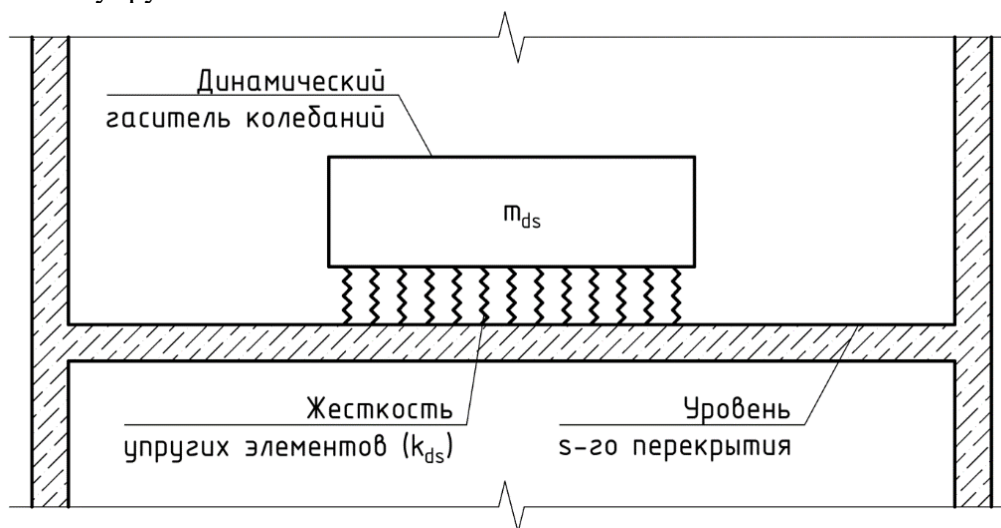


Рисунок 1 – Расчетная схема линейного ДГК

Перепишем уравнение (1) к виду:

$$m_{ds}\ddot{y}_d + \left(1 + 2v_{ds}\frac{d}{dt}\right)k_{ds}y_d = \left(1 + 2v_{ds}\frac{d}{dt}\right)k_{ds}y_s. \quad (3)$$

Выбор коэффициентов демпфирования определяет модель диссипации энергии, так для данного алгоритма принята модифицированная модель Фойгта, коэффициент демпфирования которой зависит от частоты колебаний с основным параметром γ_{ds} –

коэффициентом неупругого сопротивления. Таким образом при учете затухания принимаем $v_{ds} = \frac{\gamma_{ds}}{2 \cdot p_{ds}}$.

Воспользуемся импульсной переходной функцией (ИПФ) для системы с одной степенью свободы [14] и запишем решение уравнения (3):

$$y_d(t) = \int_0^t \left(1 - 2v_{ds} \frac{d}{dt}\right) \frac{k_{ds} y_s(\tau)}{m_{ds}} V_{ds}(t - \tau) d\tau, \quad (4)$$

$$\text{где } V_{ds} = \frac{e^{-\frac{\gamma_{ds}}{2} p_{ds} t}}{p_{ds}^*} \cdot \sin p_{ds}^* t \quad (5)$$

- импульсная переходная функция ДГК с жесткостью k_{ds} ;

$$p_{ds}^* = p_{ds} (1 - v_{ds}^2 p_{ds}^2)^{1/2}; \quad (6)$$

$$p_{ds}^2 = \frac{k_{ds}}{m_{ds}} - \text{квадрат парциальной частоты гасителя колебаний.} \quad (7)$$

Запишем уравнения движения (в матричном виде) основной линейной системы (без ДГК) – линейной системы с конечным числом степеней свободы, представленной в виде упругого стержня с присоединенными массами в уровне перекрытия:

$$M \ddot{\bar{y}} + D \dot{\bar{y}} + K \bar{y} = \bar{q}(t), \quad (8)$$

где M, D, K – матрицы масс, диссипативных и жесткостных характеристик соответственно; $\bar{y}, \bar{q}(t)$ – векторы перемещений и внешней нагрузки.

Рассмотрим систему с одним ДГК (1) с линейной характеристикой $k_{ds} \Delta y_s$, установленном в уровне массы m_s . Тогда в правую часть s -го уравнения системы (8) вводится дополнительное слагаемое, учитывающее реакцию в связи гасителя:

$$r_s = \left(1 + 2v_{ds} \frac{d}{dt}\right) k_{ds} \Delta y_s. \quad (9)$$

Тогда матричное уравнение движения системы с динамическим гасителем колебаний, расчетная схема которой показана на рисунке 2, запишется так [14]:

$$M \ddot{\bar{y}} + D \dot{\bar{y}} + K \bar{y} = \bar{q}(t) + \bar{r}(\bar{y}), \quad (10)$$

где $\bar{r}(\bar{y})$ - вектор реакций от ДГК (линейно зависит от перемещений y_d, y_s),

а s -е уравнение системы:

$$m_s \ddot{y}_s + d_{s1} \dot{y}_1 + \dots + d_{sn} \dot{y}_n + k_{s1} y_1 + \dots + k_{sn} y_n = q_s(t) + \left(1 + 2v_{ds} \frac{d}{dt}\right) k_{ds} \Delta y_s. \quad (11)$$

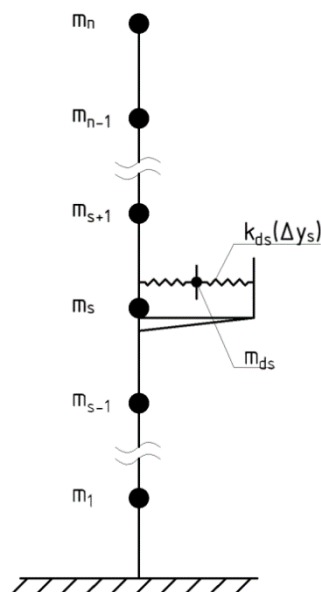


Рисунок 2 – Расчетная схема здания с линейным гасителем колебаний

Воспользуемся аналитическим методом расчета и исследования динамических систем – методом «нормальных форм» [14], так как такой подход позволяет свести связанные уравнения движения к системе несвязанных уравнений движения с одной степенью свободы относительно главных координат, получить аналитические решения, учесть диссипативные силы.

Матрицу диссипативных коэффициентов D системы (10) приводим к диагональной (внедиагональные члены матрицы D малы и ими можно пренебречь).

Решение системы представим в виде разложения по нормированным собственным векторам основной системы:

$$\bar{y} = \Phi^N \bar{a}, \quad (12)$$

где Φ^N – матрица нормированных собственных векторов с элементами Y_{ir}^N по r -ой форме; $\bar{a}$ – вектор перемещений в главных координатах.

Собственные векторы нормируются таким образом, чтобы жесткости в главных координатах были равны собственным значениям (p_r^2), а матрица масс была единичной.

Подставляя (12) в (10) в результате получаем систему n уравнений относительно главных координат (нормальных координат), связанных элементами b_r и d_r , определяемые при разложении внешней нагрузки и реакции от динамического гасителя колебаний по формам собственных колебаний основной системы с конечным числом степеней свободы:

$$\ddot{a}_r + \left(1 + 2v_r \frac{d}{dt}\right) p_r^2 a_r = b_r + d_r, \quad (13)$$

где $r = 1, 2 \dots n$ – форма колебаний;

$\bar{b}$, $\bar{d}$ – векторы, определяемые при разложении по собственным формам вектора нагрузки и реакции от гасителя колебаний соответственно:

$$\bar{b} = \Phi^{N'} \bar{q}(t); \quad (14)$$

$$\bar{d} = \Phi^{N'} \bar{r}(\bar{y}), \quad (15)$$

где $\Phi^{N'}$ – транспонированная матрица нормированных собственных векторов.

Элементы b_r и d_r равны:

$$b_r = \sum_{s=1}^n Y_{sr}^N q_s; \quad (16)$$

$$d_r = Y_{sr}^N r_s = \left(1 + 2v_{ds} \frac{d}{dt}\right) Y_{sr}^N k_{ds} \Delta y_s. \quad (17)$$

Воспользуемся ИПФ для системы с одной степенью свободы [14] и систему (13) сведем к системе нелинейных интегральных уравнений второго рода [19] по r -ой форме:

$$a_r(t) = a_{r0}(t) + a_{r\text{лин.}}(t). \quad (18)$$

Решение первого интеграла ($a_{r0}(t)$), определяющее перемещения в основной системе от внешней нагрузки без гасителя колебаний, можно представить в виде:

$$a_{r0}(t) = \int_0^t b_r(\tau) V_r(t - \tau) d\tau, \quad (19)$$

$$\text{где } V_r = \frac{e^{-\frac{\gamma}{2} p_r t}}{p_r^*} \cdot \sin p_r^* t - \text{ИПФ, соответствующая } r\text{-ой форме колебаний}; \quad (20)$$

$$p_r^* = p_r (1 - v_r^2 p_r^2)^{\frac{1}{2}}, \quad v_r = \frac{\gamma}{2 \cdot p_r}, \quad (21)$$

где p_r – частота собственных колебаний системы (8) по r -ой форме.

Решение второго интеграла ($a_{r\text{лин.}}(t)$), учитывающее реакцию от ДГК, запишем:

$$a_{r\text{лин.}}(t) = Y_{sr}^N \int_0^t \left(1 - 2v_{ds} \frac{d}{dt}\right) k_{ds} \Delta y_s(\tau) V_r(t - \tau) d\tau. \quad (22)$$

При действии произвольной нагрузки на динамические системы с конечным числом степеней свободы обобщённые перемещения определяются как сумма соответствующих

перемещений по всем формам колебаний в главных координатах. Перемещения масс в обобщенных координатах $y_s(t)$ воспользовавшись (12) определяются [14]:

$$y_s(t) = Y_{1r}^N a_1(t) + Y_{2r}^N a_2(t) + \dots + Y_{sr}^N a_r(t) = \sum_{r=1}^n Y_{sr}^N a_r(t). \quad (23)$$

Общая схема алгоритма:

- 1) Записывается система уравнений движения всей системы с конечным числом степеней свободы с учетом реакции от динамического гасителя колебаний (10);
- 2) К системе (10) добавляется уравнение движения линейного гасителя колебаний (1);
- 3) Методом «нормальных форм» система (10) сводится к системе несвязных дифференциальных уравнений движений с одной степенью свободы (13) в главных координатах.
- 4) Шаговым методом по времени итерациями вычисляются главные перемещения по формам колебаний на основании формулы (18) и из (23) вычисляются обобщённые перемещения масс, а также на основании формулы (4) уточняются перемещения линейного гасителя колебаний.

Алгоритм расчета зданий с нелинейным гасителем колебаний

Уравнение движения нелинейного гасителя колебаний можно представить в виде:

$$m_{ds} \ddot{y}_d + \left(1 + 2v_{ds} \frac{d}{dt}\right) c_s(\Delta y_s) \Delta y_s = 0. \quad (24)$$

Для данного гасителя колебаний и принятого типа нелинейности зависимость «реакция-перемещение» (нелинейная зависимость реакций в связях $c_s(\Delta y_s) \Delta y_s$ от перемещений Δy_s отображена на рисунке 3) [14]:

$$\begin{aligned} c_s(\Delta y_s) \Delta y_s &= k_{ds} \Delta y_s \text{ при } |\Delta y_s| \leq \Delta y_{s0}; \\ c_s(\Delta y_s) \Delta y_s &= k_{ds} \Delta y_{s0} + (k_{ds} + k_{ds2})(\Delta y_s - \Delta y_{s0}) \text{ при } |\Delta y_s| > \Delta y_{s0}. \end{aligned} \quad (25)$$

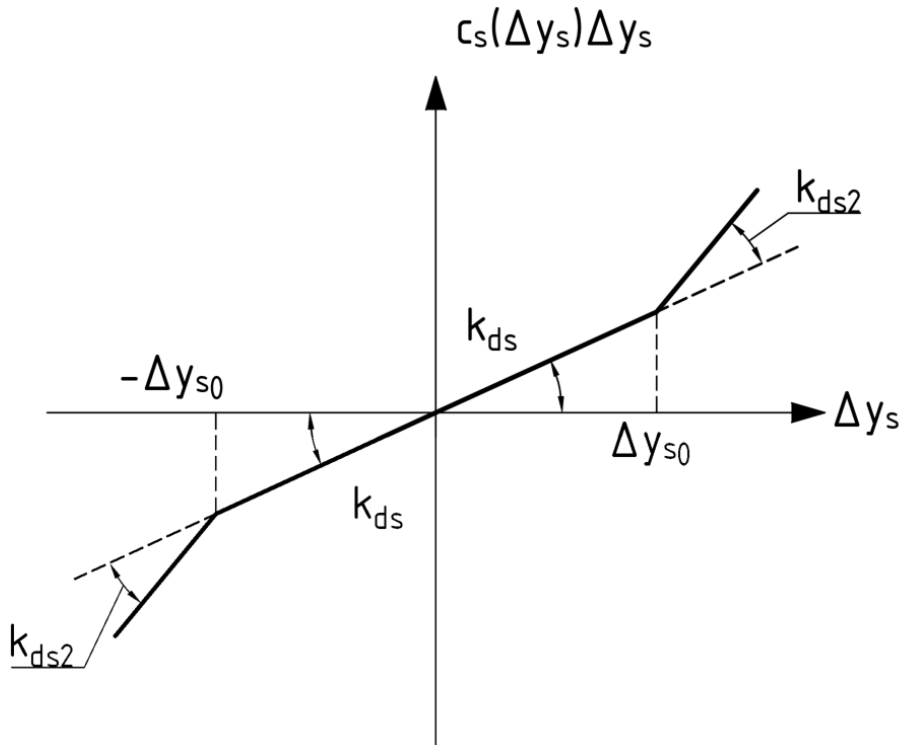


Рисунок 3 – Нелинейная зависимость реакций в связях $c_s(\Delta y_s) \Delta y_s$ от перемещений Δy_s

Представленная на рисунке 3 нелинейная зависимость реакций от перемещений может применяться при устройстве ДГК с нелинейной характеристикой, как системы с включающимися при достижении заданных перемещений дополнительными связями, тем самым определяя алгоритм расчета.

При построении алгоритма уравнение (24) следует переписать, записав нелинейные составляющие в правой части и добавив к обеим частям $\left(1 + 2v_{ds} \frac{d}{dt}\right) k_{ds} \Delta y_s$:

$$\begin{aligned} m_{ds} \ddot{y}_d + \left(1 + 2v_{ds} \frac{d}{dt}\right) k_{ds} \Delta y_s = \\ = \left(1 + 2v_{ds} \frac{d}{dt}\right) k_{ds} \Delta y_s - \left(1 + 2v_{ds} \frac{d}{dt}\right) c_s(\Delta y_s) \Delta y_s. \end{aligned} \quad (26)$$

После дополнительных преобразований (26) можно переписать в виде:

$$m_{ds} \ddot{y}_d + \left(1 + 2v_{ds} \frac{d}{dt}\right) k_{ds} y_d = \left(1 + 2v_{ds} \frac{d}{dt}\right) k_{ds} y_s - \left(1 + 2v_{ds} \frac{d}{dt}\right) k_{ds2} (\Delta y_s - \Delta y_{s0}). \quad (27)$$

Решения нелинейного дифференциального уравнения (24) можно записать в виде нелинейного интегрального уравнения второго рода [19]. Общее решение системы будет определяться интегралами:

$$y_d(t) = y_{d.лин.}(t) + y_{d.нелин.}(t). \quad (28)$$

Решение линейной части можно представить в виде:

$$y_{d.лин.}(t) = \int_0^t \left(1 - 2v_{ds} \frac{d}{dt}\right) \frac{k_{ds} y_s(\tau)}{m_{ds}} V_{ds}(t - \tau) d\tau. \quad (29)$$

Решение нелинейной части можно представить в виде:

$$y_{d.нелин.}(t) = - \int_0^t \lambda \left(1 - 2v_{ds} \frac{d}{dt}\right) \frac{k_{ds2} (\Delta y_s(\tau) \pm \Delta y_{s0})}{m_{ds}} V_{ds}(t - \tau) d\tau, \quad (30)$$

где λ – прерывистая функция, учитывающая включение и выключение дополнительных связей, равная 0 при $|\Delta y_s| \leq |\Delta y_{s0}|$ и 1 при $|\Delta y_s| > |\Delta y_{s0}|$. Знак «+» в (30) при $\Delta y_s(t) \leq 0$ и «-» при $\Delta y_s(t) > 0$.

По аналогии с (8) запишем уравнения движения основной линейной системы (без ДГК). Рассмотрим систему с одним динамическим гасителем колебаний (24) с нелинейной характеристикой $c_{ds}(\Delta y_s) \Delta y_s$, установленном в уровне массы m_s . Тогда в правую часть s -го уравнения основной линейной системы (8) вводится дополнительное слагаемое, учитывающее реакцию в связи гасителя:

$$h_s = \left(1 + 2v_{ds} \frac{d}{dt}\right) c_{ds}(\Delta y_s) \Delta y_s. \quad (31)$$

Тогда матричное уравнение движения системы с нелинейным ДГК, расчетная схема которой показана на рисунке 4, запишется так [14]:

$$M \ddot{\bar{y}} + D \dot{\bar{y}} + K \bar{y} = \bar{q}(t) + \bar{h}(\bar{y}), \quad (32)$$

где $\bar{h}(\bar{y})$ - вектор реакций от ДГК (нелинейно зависит от перемещений y_d, y_s),

а s -е уравнение системы:

$$\begin{aligned} m_s \ddot{y}_s + d_{s1} \dot{y}_1 + \dots + d_{sn} \dot{y}_n + k_{s1} y_1 + \dots + k_{sn} y_n = \\ = q_s(t) + \left(1 + 2v_{ds} \frac{d}{dt}\right) c_{ds}(\Delta y_s) \Delta y_s. \end{aligned} \quad (33)$$

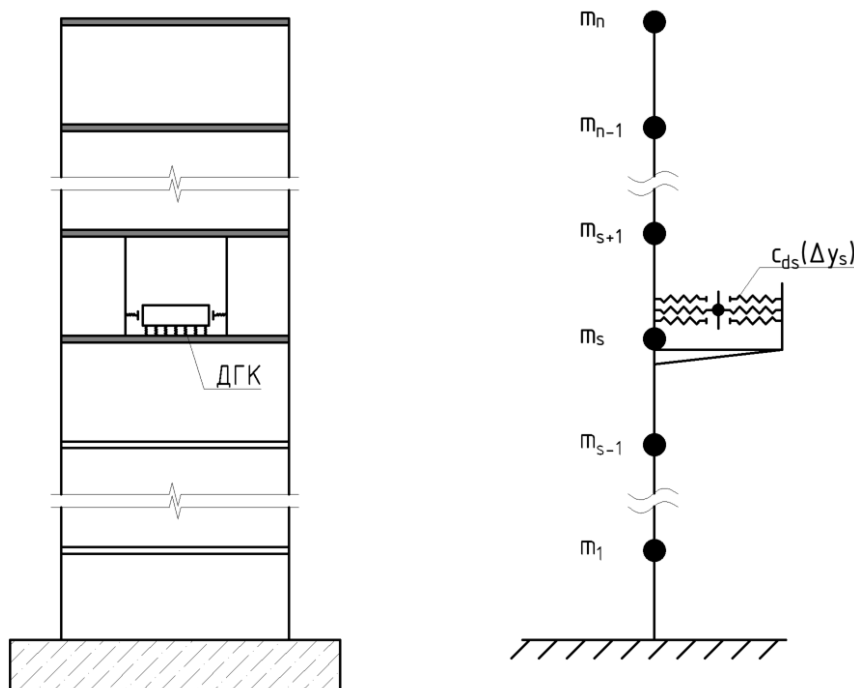


Рисунок 4 – Расчетная схема здания с нелинейным гасителем колебаний

По аналогии с (12) воспользовавшись методом «нормальных форм» [14], а также приводя матрицу диссипативных коэффициентов к диагональной, сводим систему (32) к системе n уравнений движений с одной степенью свободы (13) относительно главных координат (нормальных координат), связанных элементами b_r и d_r , где для системы с нелинейным гасителем колебаний элементы d_r равны:

$$d_r = Y_{sr}^N h_s = \left(1 + 2v_{ds} \frac{d}{dt}\right) Y_{sr}^N c_{ds}(\Delta y_s) \Delta y_s. \quad (34)$$

Воспользуемся ИПФ для системы с одной степенью свободы [14] и систему n уравнений движений относительно главных координат сведем к системе нелинейных интегральных уравнений второго рода [19] по r -ой форме:

$$a_r(t) = a_{r0}(t) + a_{r,\text{нелин}}(t). \quad (35)$$

Перемещения основной линейной системы без гасителя колебаний ($a_{r0}(t)$) определяются по формуле (19), нелинейные составляющие решения, учитывающее влияние нелинейного гасителя колебаний, определяются из интегральных уравнений зависящих от принятого типа нелинейности:

$$\begin{aligned} a_{r,\text{нелин}}(t) &= Y_{sr}^N \int_0^t \left(1 - 2v_{ds} \frac{d}{dt}\right) c_{ds}[\Delta y_s(\tau)] \Delta y_s(\tau) V_r(t - \tau) d\tau = \\ &= Y_{sr}^N \int_0^t \left(1 - 2v_{ds} \frac{d}{dt}\right) (k_{ds} \Delta y_s(\tau) + \lambda k_{ds2} (\Delta y_s(\tau) \pm \Delta y_{s0})) V_r(t - \tau) d\tau. \end{aligned} \quad (36)$$

Знак «+» в (36) при $\Delta y_s(t) \leq 0$ и «-» при $\Delta y_s(t) > 0$.

Обобщенные перемещения $y_s(t)$ определяются по формуле (23).

Общая схема алгоритма по аналогии с линейным ДГК:

- 1) Записывается система уравнений движения всей системы с конечным числом степеней свободы с учетом реакции от динамического гасителя колебаний (32);
- 2) К системе (32) добавляется уравнение движения нелинейного гасителя колебаний (24);
- 3) Методом «нормальных форм» система (32) сводится к системе несвязных уравнений движений с одной степенью свободы (13) в главных координатах;

4) Шаговым методом по времени итерациями вычисляются главные перемещения по формам колебаний на основании формулы (35) и из (23) вычисляются обобщённые перемещения масс, а также на основании формулы (28) уточняются перемещения нелинейного гасителя колебаний.

3. Результаты исследования и их анализ

Для иллюстрации алгоритма произведем расчет пятиэтажного здания. Каркас здания запроектирован по пространственной рамно-связевой схеме, габариты в плане по осям 18х18 м с шагом колонн 6 м. Колонны представлены стальными двутаврами, перекрытия – монолитной плитой по профлисту по главным и второстепенным стальным балкам, образующими жесткие диски здания. Модуль упругости стальных конструкций $E = 2.06 \cdot 10^5$ Н/мм², коэффициент неупругого сопротивления каркаса здания $\gamma = 0.01$.

Учитывая [1, 14], применение динамических гасителей колебаний наиболее эффективно для высоких гибких и многоэтажных зданий (сооружений), первые частоты собственных горизонтальных колебаний которых лежат в диапазоне 0.5-6 Гц и эффективно при гашении колебаний, которые носят резонансный характер. В связи с этим для анализа принята расчетная схема здания с высотой этажа 5 м.

Сейсмические волны от промышленных источников передаваясь через грунт нередко могут явиться причиной вибраций здания: собственные периоды колебаний зданий значительно ниже рабочих периодов высокочастотных машин и поэтому явление резонанса исключается, однако возможно их совпадение при работе низкочастотных машин с периодическим установившимся режимом работы вблизи здания [20]. Поэтому внешнее воздействие принято с частотой колебаний, соответствующей первой собственной частоте колебания здания, оказывающей наибольший вклад в характер результирующих колебаний здания. Внешнее воздействие на здание представлено в виде закона смещения основания (ускорения грунта):

$$\ddot{\xi}(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t),$$

где A – амплитуда ускорений грунта;

$\omega = p_1$ – частота внешнего воздействия, соответствующая первой собственной частоте колебания здания.

Запишем матрицу масс, матрицу жесткости, определим частоты собственных колебаний здания:

$$M = \begin{pmatrix} 131.29 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 131.29 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 131.29 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 131.29 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 131.29 \end{pmatrix} [\text{Т}];$$

$$K = 10^3 \cdot \begin{pmatrix} 33.31 & -33.31 & 0 & 0 & 0 \\ -33.31 & 66.62 & -33.31 & 0 & 0 \\ 0 & -33.31 & 66.62 & -33.31 & 0 \\ 0 & 0 & -33.31 & 66.62 & -33.31 \\ 0 & 0 & 0 & -33.31 & 66.62 \end{pmatrix} \left[\frac{\text{кН}}{\text{м}} \right];$$

$$p = \begin{pmatrix} 30.566 \\ 26.800 \\ 20.862 \\ 13.234 \\ 4.534 \end{pmatrix} [\text{Гц}].$$

При учете диссипативных сил используется подход, когда диссипативные коэффициенты (21) вводятся в уравнения колебаний в главных координатах (13), а затем

записываются решения с учетом их влияния. Диссипативные коэффициенты приняты согласно модифицированной модели Фойгта (21).

Характеристики гасителя колебаний приняты с учетом рекомендаций [1, 21]:

- масса гасителя колебаний $m_{ds} = 5$ т;
- жесткость основных упругих связей $k_{ds} = 103$ кН/м;
- парциальная частота гасителя колебаний $p_{ds} = 4.539$ Гц;
- величина зазора $\Delta y_{s0} = 10$ мм;
- место установки гасителя – 5-й этаж.

Для анализа эффективности применения различных типов гасителей колебаний рассмотрим три системы: без гасителя колебаний, с линейным гасителем колебаний, с нелинейным гасителем колебаний. Некоторые дополнительные характеристики (k_{ds2} – жесткость дополнительных включающихся связей, γ_{ds}) и результаты расчета показаны в таблице 1.

Для простоты вычисления интегралов и построения программы расчеты на языке программирования MATLAB ИПФ разделяют на части, зависящие исключительно от t или τ . Алгоритм вычисления таких интегралов показан, например, в [14], [22]. Время интегрирования принято $t = 20$ с (30 с).

Таблица 1 - Амплитуды перемещений в системах

Тип системы	Дополнительные характеристики системы	Максимальные перемещения (мм)					
		Масса №1	Масса №2	Масса №3	Масса №4	Масса №5	Гаситель колебаний
Система без гасителя колебаний	-	1.0792	2.0711	2.8953	3.4851	3.7926	-
Система с линейным гасителем колебаний	$\gamma_{ds} = 0.15$	$\frac{0.8783}{19\%}$	$\frac{1.6921}{18\%}$	$\frac{2.3563}{18\%}$	$\frac{2.8327}{18\%}$	$\frac{3.0886}{18\%}$	32.09
	$\gamma_{ds} = 0.2$	$\frac{0.8315}{23\%}$	$\frac{1.5960}{23\%}$	$\frac{2.2162}{23\%}$	$\frac{2.6613}{24\%}$	$\frac{2.9024}{24\%}$	29.65
Система с нелинейным гасителем колебаний	$\gamma_{ds} = 0.15$ $k_{ds2} = 10.3$ кН/м	$\frac{0.8193}{24\%}$	$\frac{1.1399}{45\%}$	$\frac{1.1056}{62\%}$	$\frac{1.3136}{62\%}$	$\frac{1.5020}{60\%}$	33.03
	$\gamma_{ds} = 0.15$ $k_{ds2} = 20.6$ кН/м	$\frac{1.0002}{7\%}$	$\frac{2.0265}{2\%}$	$\frac{1.7145}{40\%}$	$\frac{1.8387}{47\%}$	$\frac{2.7151}{28\%}$	54.03
	$\gamma_{ds} = 0.20$ $k_{ds2} = 10.3$ кН/м	$\frac{0.4629}{42\%}$	$\frac{0.7543}{63\%}$	$\frac{1.0573}{63\%}$	$\frac{1.2819}{63\%}$	$\frac{1.4004}{63\%}$	18.44
	$\gamma_{ds} = 0.2$ $k_{ds2} = 20.6$ кН/м	$\frac{0.9213}{15\%}$	$\frac{1.3167}{36\%}$	$\frac{1.2711}{56\%}$	$\frac{1.2832}{64\%}$	$\frac{1.9556}{48\%}$	45.17

Примечание к таблице 1: значение в знаменателе показывает процент снижения уровня колебаний относительно системы без гасителя колебаний.

В результате расчета, при принятых жесткостных характеристиках здания и ДГК, максимальные амплитуды колебаний здания снизились на 19-24% при применении линейного гасителя колебаний и снизились на 2-63% при применении нелинейного гасителя колебаний, зависимость «реакция-перемещения» которого представлена ломаной (система с включающимися связями).

Снижение уровня колебаний здания при применении линейного и нелинейного гасителя колебаний, относительно системы без гасителя колебаний, характерно наблюдается на рисунках 5 и 6 соответственно, где также отображены уровни колебаний применяемых гасителей колебаний.

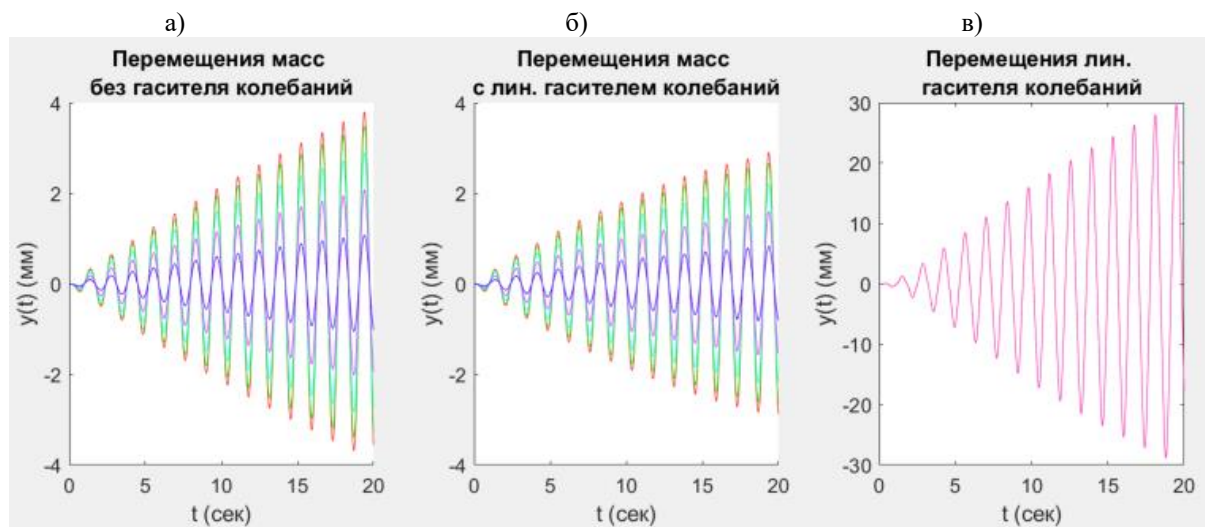


Рисунок 5 - Перемещения масс(ы) в системах(е):
 а - без гасителя колебаний, б - с линейным гасителем колебаний,
 в – линейного гасителя колебаний ($\gamma_{ds}=0.20$)

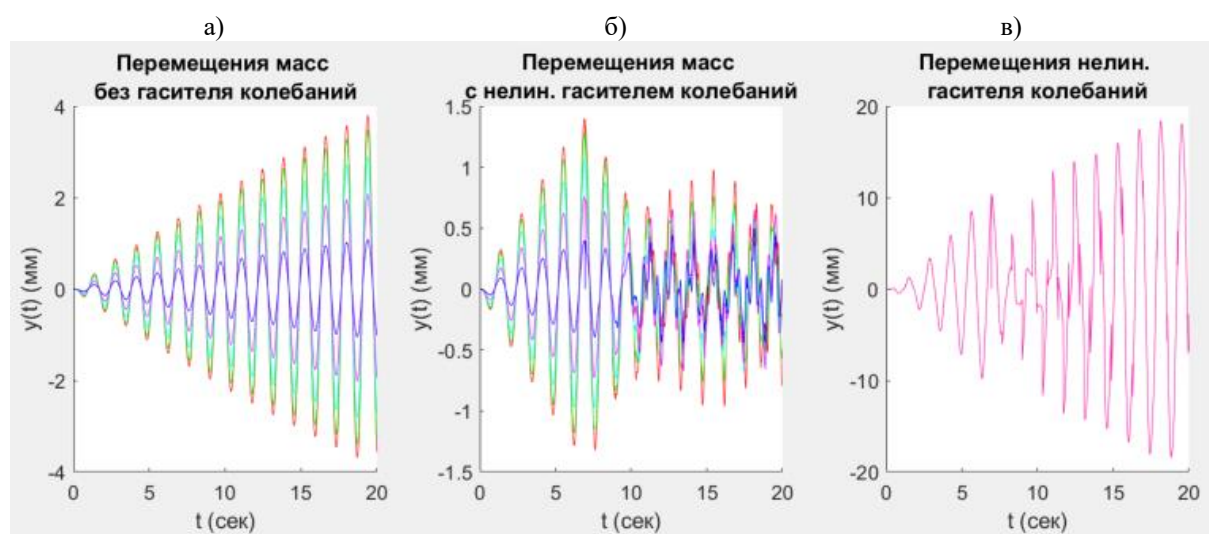


Рисунок 6 - Перемещения масс(ы) в системах(е):
 а - без гасителя колебаний, б - с нелинейным гасителем колебаний,
 в – нелинейного гасителя колебаний ($\gamma_{ds}=0.20$, $k_{ds2}=10.3$ кН/м)

Примечание к рисункам 5, 6: синяя кривая – масса №1, фиолетовая кривая – масса №2, голубая кривая – масса №3, зеленая кривая – масса №4, красная кривая – масса №5

Наибольшая эффективность гашения колебаний здания достигается с применением нелинейного гасителя колебаний с характеристиками $\gamma_{ds} = 0.20$, $k_{ds2} = 10.3$ кН/м. Характер снижения уровня колебаний массы (№5), в уровне которой установлен ДГК, можно увидеть на рисунке 7. Однако учитывая относительную сложность устройства ДГК с включающимися связями, целесообразность его устройства относительно других методов виброзащиты должна быть рассмотрена отдельно.

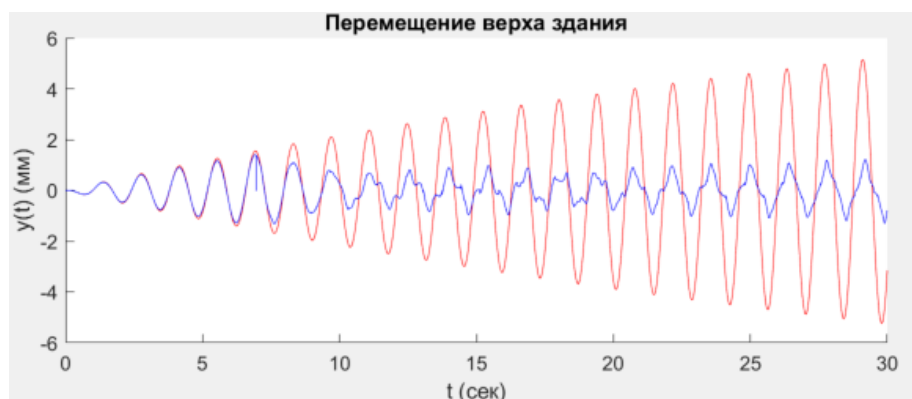


Рисунок 7 – Перемещения верха здания (массы №5)

Примечание к рисунку 7: красная кривая – перемещения в системе без гасителя колебаний, синяя кривая – перемещения в системе с нелинейным гасителем колебаний ($\gamma_{ds}=0.20$, $k_{ds2}=10.3$ кН/м)

При снижении демпфирования упругих элементов ДГК его эффективность снижается и уровень колебаний здания существенно увеличивается. Так при коэффициенте неупругого сопротивления γ_{ds} меньше 0.15 применение ДГК с включающимися связями становится неэффективным – колебания здания возрастают.

Перспективным направлением дальнейших исследований является более комплексный и детализированный анализ различных расчетных схем зданий и сооружений на основе представленного алгоритма, например, с учетом влияния нескольких гасителей колебаний в системе в виброзащиты здания, с линейными и нелинейными характеристиками изменяющимися, например, по степенному, экспоненциальному законам, а также с внедрением гасителей колебаний с демпфером вязкого трения, при различных значениях диссипативных коэффициентов и формирование обобщённых рекомендаций по устройству и оптимизации параметров гасителей колебаний с учетом специфики эксплуатации объектов, в частности, при устройстве виброактивного оборудования внутри здания на определенном этаже или фундаменте, и действия различного рода динамических воздействий.

4. Заключение

1. В статье приведен метод и алгоритм расчета систем с конечным числом степеней свободы с ДГК с линейными и нелинейными характеристиками, эффективность метода показана на примерах.
2. Приведенные в статье алгоритмы расчета позволяют рассматривать большое количество расчетных схем зданий и сооружений различной этажности с учетом влияния линейных и нелинейных ДГК.
3. Применение линейных и нелинейных гасителей колебаний при оптимальном подборе их характеристик и настройке под характер внешнего воздействия может быть эффективно в системе виброзащиты зданий.
4. На эффективность применения ДГК влияет коэффициент неупругого сопротивления (коэффициент демпфирования) упругих элементов гасителя, с увеличением которого, колебания здания снижаются.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Рекомендации по проектированию гасителей колебаний для защиты зданий и сооружений, подверженных горизонтальным динамическим воздействиям от технологического оборудования и ветра. ЦНИИСК им. Кучеренко. М.: Стройиздат: 1978. 69 с.
2. Корнев Б.Г., Резников Л.М. Динамические гасители колебаний: Теория и технические приложения. М.: Наука, 1988. 304 с.
3. Дукарт А.В., Олейник А.И. Динамические гасители колебаний конструкций. М.: Издательство АСВ, 2015. 248 с.

4. Корнев Б.Г. Пикулев Н.А. Шейнин И.С. О мерах уменьшения вибраций при прохождении через резонанс во время пуска и остановки оборудования // *Колебания зданий и сооружений*. М.: Госстройиздат. 1963. С. 74-97.
5. Низомов Д.Н., Каландарбеков И. Численное решение задач по расчету зданий с учетом динамического гасителя колебаний // *Доклады Национальной Академии Наук Таджикистана*. 2010. Т. 53. №6. С. 460-467.
6. Нестерова О.П. Особенности расчета сооружений с динамическими гасителями колебаний по акселерограммам проектных землетрясений // *Вестник гражданских инженеров*. 2019. №2 (73). С. 48-53.
7. Мирсаидов М.М., Ишматов А.Н., Юлдошев Б.Ш., Салимов Ш.М., Хазраткулов И.О. Нелинейные колебания высотного сооружения с динамическим гасителем колебаний // *Известия вузов. ПНД*. 2025. DOI: 10.18500/0869-6632-003186.
8. Богданова Г. А., Иванова Ж. В. Применение динамических гасителей колебаний для повышения устойчивости башенных сооружений связи к ветровым воздействиям // *Известия Петербургского университета путей сообщения*. СПб.: ПГУПС, 2023. Т. 20. Вып. 3. С. 660–672. DOI: 10.20295/1815-588X-2023-3-660-672.
9. Hashim A., Taiki S. Dynamic vibration control of non-linear buildings using multiple tuned mass dampers. *Building Engineering*. 2023. 1(1): 488. DOI: 10.59400/be.v1i1.488.
10. Vilceanu V., Kavrakov I., Morgenthal G. Coupled numerical simulation of liquid sloshing dampers and wind–structure simulation model. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*. 2023. Volume 240. id.105505. Germany. DOI: 10.1016/j.jweia.2023.105505.
11. Mirsaidov M., Abdikarimov R., Khudainazarov Sh., Sabirjanov T. Damping of high-rise structure vibrations with viscoelastic dynamic dampers. *E3S Web of Conferences*. 2020. 224. 02020. DOI: 10.1051/e3sconf/202022402020.
12. Bogdanova G., Benin A. Methodology for Assessing the Response Parameters of Multi-storey Buildings with Non-linear Dynamic Vibration Dampers in Case of Seismic Impacts. *Technological Advancements in Construction 2022*. Pp.553-564. DOI:10.1007/978-3-030-83917-8_50.
13. P. Kuras, L. Ortyl, T. Owerko, R. Kocierz, M. Kedzierski, P. Podstolak. Analysis of effectiveness of steel chimneys vibration dampers using surveying methods. In *Proceedings of the 16th International Multidisciplinary Scientific GeoConference (SGEM 2016)*. Book 2. Vol. 3. Bulgaria. 2016. Pp. 255–262.
14. Чернов Ю.Т. Вибрации строительных конструкций. Аналитические методы расчета. Основы проектирования и нормирования вибраций строительных конструкций, подвергающихся эксплуатационным динамическим воздействиям. 2-е издание. М.: Издательство АСВ, 2011. 384 с.
15. Петров И.А. Оценка эффективности виброзащитных систем с нелинейными характеристиками : дис. ... канд. техн. наук: 05.23.17. Москва. 2013. 119 с.
16. Чернов Ю.Т., Петров И.А. Определение эквивалентных статических сил при расчете систем с выключающимися связями // *Вестник МГСУ*. 2012. №4. С. 98-101.
17. Зебилина М.Д.Х. Расчет виброзащитных систем с нелинейными элементами // *Строительство – формирование среды жизнедеятельности [Электронный ресурс] : сборник материалов XIX Международной межвузовской научно-практической конференции студентов, магистрантов, аспирантов и молодых ученых*. М. 2016. С. 281-285. URL: https://mgssu.ru/resources/izdatelskaya-deyatelnost/izdaniya/izdaniya-otkr-dostupa/2016/stroy_form_2016.pdf (дата обращения: 15.12.2025).
18. Кбейли Д., Чернов Ю.Т. Расчет виброизолированной системы здания с нелинейными характеристиками при кинематическом воздействии (смещении основания) // *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*. 2024. Т. 20. № 4. С. 374-387.
19. Чернов Ю.Т. Интегральные уравнения второго рода в задачах расчета нелинейных систем с конечным числом степеней свободы при произвольных динамических воздействиях и характере физических зависимостей // *Вестник НИЦ «Строительство»*. 2023. 38(3). С. 155-167.
20. Баркан Д.Д. Динамика оснований и фундаментов. М.: Стройвоенмориздат, 1948. 411 с.
21. Рекомендации по виброзащите несущих конструкций производственных зданий. ЦНИИСК им. В. А. Кучеренко. М.: Стройиздат: 1988. 217 с.
22. Клаф Р., Пензиен Дж. Динамика сооружений: Пер. с англ. М.: Стройиздат, 1979. 320 с. перевод изд.: *Dynamics of Structures*. Ray W. Clough, Joseph Penzien. New York, 1975.

REFERENCES

1. Recommendations for the design of vibration dampers to protect buildings and structures subjected to horizontal dynamic impacts from process equipment and wind. TsNIISK im. Kucherenko. Moscow: Stroyizdat; 1978. 69 p.
2. Korenev B.G., Reznikov L.M. Dynamic vibration absorbers: Theory and technical applications. Moscow: Nauka; 1988. 304 p.
3. Dukart A.V., Oleynik A.I. Dynamic vibration dampers of structures. Moscow: Publishing House ASV; 2015. 248 p.

4. Korenev B.G., Pikulev N.A., Sheynin I.S. On measures to reduce vibrations when passing through resonance during equipment start-up and shutdown. In: *Vibrations of buildings and structures*. Moscow: Gosstroyizdat; 1963. p. 74-97.
5. Nizomov D.N., Kalandarbekov I. Numerical solution of problems for calculating buildings considering a dynamic vibration absorber. *Doklady Natsional'noy Akademii Nauk Tadzhikistana [Proceedings of the National Academy of Sciences of Tajikistan]*. 2010;53(6):460-467.
6. Nesterova O.P. Features of calculation of structures with dynamic vibration absorbers based on design earthquake accelerograms. *Vestnik grazhdanskikh inzhenerov [Bulletin of Civil Engineers]*. 2019;(2(73)):48-53.
7. Mirsaidov M.M., Ishmatov A.N., Yuldoshev B.Sh., Salimov Sh.M., Khazratkulov I.O. Nonlinear oscillations of a high-rise structure with a dynamic vibration absorber. *Izvestiya vuzov. PND [Proceedings of Universities. Nonlinear Dynamics]*. 2025. DOI: 10.18500/0869-6632-003186.
8. Bogdanova G.A., Ivanova Zh.V. Application of dynamic vibration dampers to increase the stability of tower communication structures to wind effects. *Izvestiya Peterburgskogo universiteta putey soobshcheniya [Proceedings of Petersburg Transport University]*. Saint Petersburg: PGUPS; 2023;20(3):660-672. DOI: 10.20295/1815-588X-2023-3-660-672.
9. Hashim A., Taiki S. Dynamic vibration control of non-linear buildings using multiple tuned mass dampers. *Building Engineering*. 2023;1(1):488. DOI: 10.59400/be.v1i1.488.
10. Vilceanu V., Kavrov I., Morgenthal G. Coupled numerical simulation of liquid sloshing dampers and wind-structure simulation model. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*. 2023;240:105505. Germany. DOI: 10.1016/j.jweia.2023.105505.
11. Mirsaidov M., Abdikarimov R., Khudainazarov Sh., Sabirjanov T. Damping of high-rise structure vibrations with viscoelastic dynamic dampers. *E3S Web of Conferences*. 2020;224:02020. DOI: 10.1051/e3sconf/202022402020.
12. Bogdanova G., Benin A. Methodology for Assessing the Response Parameters of Multi-storey Buildings with Non-linear Dynamic Vibration Dampers in Case of Seismic Impacts. In: *Technological Advancements in Construction 2022*. p. 553-564. DOI:10.1007/978-3-030-83917-8_50.
13. Kuras P., Ortyl L., Owerko T., Kocierz R., Kedzierski M., Podstolak P. Analysis of effectiveness of steel chimneys vibration dampers using surveying methods. In: *Proceedings of the 16th International Multidisciplinary Scientific GeoConference (SGEM 2016)*. Book 2. Vol. 3. Bulgaria; 2016. p. 255-262.
14. Chernov Yu.T. *Vibrations of building structures. Analytical calculation methods. Fundamentals of design and standardization of vibrations of building structures subjected to operational dynamic impacts*. 2nd ed. Moscow: Publishing House ASV; 2011. 384 p.
15. Petrov I.A. *Assessment of the effectiveness of vibration protection systems with nonlinear characteristics [dissertation]*. Moscow; 2013. 119 p. (In Russian)
16. Chernov Yu.T., Petrov I.A. Determination of equivalent static forces in the calculation of systems with disconnecting connections. *Vestnik MGSU [Proceedings of Moscow State University of Civil Engineering]*. 2012;(4):98-101.
17. Zebilila M.D.Kh. Calculation of vibration protection systems with nonlinear elements. In: *Construction – formation of living environment [Electronic resource]: Proceedings of the XIX International Interuniversity Scientific-Practical Conference of Students, Undergraduates, Postgraduates and Young Scientists*. Moscow; 2016. p. 281-285. URL: <https://mgsu.ru/resources/izdatelskaya-deyatelnost/izdaniya/izdaniya-otkr-dostupa/2016/stroy-form-2016.pdf> (accessed: 12/15/2025).
18. Kbeili D., Chernov Yu.T. Calculation of a vibration-isolated building system with nonlinear characteristics under kinematic excitation (base displacement). *Stroitel'naya mekhanika inzhenernykh konstruktsiy i sooruzheniy [Structural Mechanics of Engineering Structures and Buildings]*. 2024;20(4):374-387.
19. Chernov Yu.T. Integral equations of the second kind in problems of calculating nonlinear systems with a finite number of degrees of freedom under arbitrary dynamic impacts and the nature of physical dependencies. *Vestnik NITs "Stroitel'stvo" [Bulletin of the Research Center "Construction"]*. 2023;38(3):155-167.
20. Barkan D.D. *Dynamics of bases and foundations*. Moscow: Stroyvoenmorizdat; 1948. 411 p.
21. *Recommendations for vibration protection of load-bearing structures of industrial buildings*. TsNIISK im. V.A. Kucherenko. Moscow: Stroyizdat; 1988. 217 p.
22. Clough R.W., Penzien J. *Dynamics of structures*. New York: McGraw-Hill; 1975. (Russian translation: Moscow: Stroyizdat; 1979. 320 p.)

Информация об авторах:

Мондрус Владимир Львович

ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет», г. Москва, Россия,
доктор технических наук, член-корреспондент РААСН, профессор кафедры «Строительной и теоретической механики»
E-mail: mondrus@mail.ru

Парамонов Евгений Евгеньевич

ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет», г. Москва, Россия,
кандидат технических наук, доцент кафедры «Строительной и теоретической механики»
E-mail: evg.paramonov@yandex.ru

Панов Максим Александрович

ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет», г. Москва, Россия,
аспирант кафедры «Строительной и теоретической механики»
E-mail: pnvmx@mail.ru

Information about authors:

Mondrus Vladimir L.

National Research Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russia
doctor of Technical Science, corresponding member of the Russian Academy of Sciences, professor of the department of Structural and Theoretical Mechanics
E-mail: mondrus@mail.ru

Paramonov Evgenii E.

National Research Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russia
candidate of Technical Science, associate professor of the department of Structural and Theoretical Mechanics
E-mail: evg.paramonov@yandex.ru

Panov Maksim A.

National Research Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russia
postgraduate student of the department of Structural and Theoretical Mechanics
E-mail: pnvmx@mail.ru

Статья поступила в редакцию 18.01.2026
Одобрена после рецензирования 12.03.2026
Принята к публикации 01.04.2026

The article was submitted 18.01.2026
Approved after reviewing 12.03.2026
Accepted for publication 01.04.2026