

ВУ НГОК ТУЕН¹, Д.Н. БАСОВА¹, М.Д. МАСЛЕННИКОВ¹, ЛЕ МИНЬ ТУАН²

¹ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет» (НИУ МГСУ), г. Москва, Россия

²Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (НИУ ВШЭ), г. Москва, Россия

ВЛИЯНИЕ ДЕФОРМАЦИЙ СДВИГА НА ПРОГИБ И КОРОБЛЕНИЕ ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ КОНСОЛЬНОЙ БАЛКИ ПРИ ПРЯМОМ ИЗГИБЕ

Аннотация. В данном исследовании представлен полуобратный метод определения напряжений в консольной балке прямоугольного сечения с использованием алгебраических полиномов функции. В качестве функции напряжения выбран полином 3-й степени, коэффициенты которого определяются исходя из граничных условий задачи. Для определения перемещений приняли закон Гука, из которого выразили деформации через перемещения по формулам Коши. Исследовано влияние деформаций сдвига на прогибы и коробление поперечного сечения при прямом изгибе. Установлено, что для балок с соотношением высоты поперечного сечения к пролету $h/l < 1/5$, влияние сдвигов на деформированное состояние балки незначительно. Также произвели сравнительный анализ аналитических результатов расчета с результатами численного моделирования в программном комплексе Лира САПР.

Ключевые слова: функция напряжений эри, консольная балка, аналитическое решение, полином, полуобратный метод.

VU NGOK TUYEN¹, D.N. BASOVA¹, M.D. MASLENNIKOV¹, LE MINH TUAN²

¹Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russia

²National Research University Higher School of Economics (HSE), Moscow, Russia

INFLUENCE OF SHEAR DEFORMATIONS ON DEFLECTION AND BARKING OF THE CROSS SECTION OF A CANTILIZER BEAM UNDER DIRECT BENDING

Annotation. This study presents a semi-inverse method for determining stresses in a rectangular cantilever beam using algebraic polynomials of a function. A 3rd degree polynomial was chosen as a stress function, the coefficients of which are determined based on the boundary conditions of the problem. To determine the displacements, Hooke's law was adopted, from which deformations were expressed through displacements using the Cauchy formulas. The influence of shear deformations on deflections and buckling of the cross section under direct bending was studied. It has been established that for beams with a ratio of cross-sectional height to span $h/l < 1/5$, the influence of shears on the deformed state of the beam is insignificant. We also carried out a comparative analysis of the analytical calculation results with the results of numerical modeling in the Lira CAD software package.

Keywords: stress function, cantilever beam, analytical solution, polynomial, semi-reverse method.

1. Введение

При решении задач теории упругости необходимо определить пятнадцать неизвестных функций, включающих в себя: шесть компонентов тензора напряжений, шесть компонент тензора деформаций и три компоненты вектора перемещений. Для этого необходимо решить сложную систему уравнений теории упругости в декартовых координатах, состоящую из девяти дифференциальных и шести алгебраических уравнений. В силу сложности полной системы уравнений нельзя найти общее решение, которое было бы справедливо для всех задач теории упругости, встречающихся на практике.

Существуют различные способы уменьшения количества уравнений теории упругости. Один из них заключается в рассмотрении неизвестной функции в виде трех перемещений u , v , w . При таком подходе систему уравнений теории упругости можно сократить до трех обыкновенных дифференциальных уравнений относительно указанных компонентов перемещений (уравнения Ламе) [1–3].

Кроме того, шесть компонент тензора напряжений $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ также можно считать неизвестными. Тогда для их определения потребуется использование шести дифференциальных уравнений Бельтрами-Митчелла [4–6].

Наряду с двумя упомянутыми выше подходами, задача теории упругости может быть решена и другими методами, такими как смешанный метод (неизвестной функцией являются одновременно перемещения и напряжения) и метод с использованием специальной функции (позволяющей определить напряжение и деформацию). Следует отметить, что последний метод (с использованием функции напряжения Эри) можно применять только в плоских задачах теории упругости [7–9].

В данной статье ограничимся исследованием только плоских задач теории упругости, поскольку они чаще встречаются в расчетах реальных конструкций. Решение задач изгиба консольной изотропной балки с приложенной на конце нагрузкой, балки на двух опорах под действием равномерно распределенной нагрузки были даны Тимошенко и Гудьером [10]. Лехницкий [11] изучал напряженное состояние анизотропных балок при растяжении, сдвиге, чистом изгибе. Ахмед приводил численное исследование для защемленной балки под действием равномерно распределенной нагрузки [12]. Цзян получил аналитическое решение для анизотропной балки под действием равномерно распределенной нагрузки [13].

Кроме того, насколько известно автору, нет работы, в которой изучается влияние деформаций сдвига на прогиб и коробление поперечного сечения при прямом изгибе балки. Проведенные экспериментальные исследования на железобетонных балках при прямом изгибе показали, что поперечное сечение после нагружения перестает быть плоским и начинает искривляться [14–16]. Коробление проявляется заметно при постепенном увеличении нагрузки до предельного значения [17,18]. Причину коробления сечения можно объяснить тем, что помимо нормального напряжения в сечении возникают также касательные напряжения, сопровождающиеся сдвиговой деформацией [19,20]. Поэтому в данной статье автор для исследования влияния деформаций сдвига на консольную балку под действием сосредоточенной нагрузки (приложенной к ее концу) использует полуобратный метод с использованием алгебраических полиномов функции напряжения.

2. Модели и методы

Рассмотрим консольную балку прямоугольного сечения с размерами $b \times h$, нагруженную сосредоточенной силой P (Рисунок 1). В этом случае можно считать, что балка работает в плоском напряженном состоянии, то есть:

$$\sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0 ; \sigma_x = \sigma_x(x, y) ; \sigma_y = \sigma_y(x, y) ; \tau_{xy} = \tau_{xy}(x, y). \quad (1)$$

Пренебрегая собственным весом балки, т.е. объемные силы в направлении x и направлении y равны 0. Выберем функцию напряжения Эри $\varphi(x, y)$, которую нужно найти в полиномиальном виде следующим образом:

$$\varphi(x, y) = \frac{C_1}{6} y^3 + \frac{C_2}{6} xy^3 - C_3 xy, \quad (2)$$

где C_1, C_2, C_3 — неизвестные постоянные множители. Поскольку степень полинома (2) меньше четырех, функция напряжений Эри тождественно удовлетворяет бигармоническому уравнению (3) для всех значений C_1, C_2, C_3 :

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0. \quad (3)$$

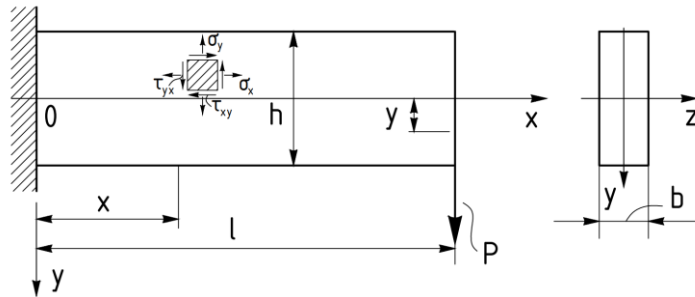


Рисунок 1 – Расчетная схема изгиба консольной балки с силой, приложенной на конце

Напряжения определяются на основе функции напряжения $\varphi(x, y)$ следующим образом:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}; \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}; \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}. \quad (4)$$

Подставив выражение функции напряжения (2) в (4), получим:

$$\sigma_x = C_1 y + C_2 xy; \quad \sigma_y = 0; \quad \tau_{xy} = -\frac{C_2 y^2}{z} + C_3. \quad (5)$$

Коэффициенты C_1, C_2, C_3 определим из граничных условий на контуре балки. На нижней и верхней ненагруженных гранях имеем:

$$y = \pm \frac{h}{2}; \quad \sigma_y = 0; \quad \tau_{xy} = 0. \quad (6)$$

Первое условие ($\sigma_y = 0$) выполняется тождественно, а из второго условия имеем:

$$C_3 = C_2 \frac{h^2}{8}. \quad (7)$$

Граничные условия на правом торце балки записываются в интегральном виде:

$$x = l; \quad \sigma_x = 0; \quad \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yx} b dy = P. \quad (8)$$

Из первого условия (8) находим:

$$C_1 y + C_2 l y = 0 \quad \text{или} \quad C_1 = -C_2 l. \quad (9)$$

Из второго условия в интегральной форме (8) имеем:

$$\int_{-h/2}^{h/2} \left(-\frac{C_2}{2} y^2 + C_2 \right) b dy = P. \quad (10)$$

Выполнив интегрирование, находим:

$$2 \left[-\frac{C_2}{6} \left(\frac{h}{2} \right)^3 + C_3 \frac{h}{2} \right] = \frac{P}{b}. \quad (11)$$

Решая систему уравнений (7) и (11), получим значения C_2 и C_3 :

$$C_2 = \frac{12}{bh^3} P = \frac{P}{J_z} ; C_3 = \frac{Ph^2}{8J_z} . \quad (12)$$

Подставив значение C_2 из уравнения (12) в (9), находим коэффициент C_1 функции напряжения Эри:

$$C_1 = -\frac{Pl}{J_z} . \quad (13)$$

Подставив коэффициенты C_1, C_2, C_3 из уравнения (12) и (13) в (5), получим формулу для напряжений:

$$\sigma_x = -\frac{Pl}{J_z} y + \frac{P}{J_z} xy ; \sigma_y = 0 ; \tau_{xy} = \tau_{yx} = \frac{Ph^2}{8J_z} - \frac{P}{2J_z} y^2 . \quad (14)$$

Теперь определим смещение u, v на основе соотношения Коши и закона Гука:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \varepsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y) = -\frac{P}{EJ_z} (l-x) y ; \quad (15)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \varepsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu \sigma_x) = \frac{\nu P}{EJ_z} (l-x) y ; \quad (16)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy} = \frac{(1+\nu)P}{EJ_z} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) . \quad (17)$$

Интегрируя уравнение (15) по переменной x и (16) по переменной y , получим:

$$u = -\frac{P}{EJ_z} \left(lxy - \frac{1}{2} x^2 y \right) + f_1(y) ; \quad (18)$$

$$v = \frac{\nu P}{2EJ_z} (ly^2 - xy^2) + f_2(x) ; \quad (19)$$

где $\varphi_1(y)$ и $\varphi_2(x)$ — произвольные функции.

Подставив (18) и (19) в (17), получим:

$$\left[f'_2(x) - \frac{P}{EJ_z} \left(lx - \frac{x^2}{2} \right) \right] + \left[f'_1(y) + \frac{(2+\nu)P}{2EJ_z} y^2 \right] = \frac{(1+\nu)Ph^2}{4EJ_z} . \quad (20)$$

В уравнении (20) правая часть — константа, не зависящая от координат x, y ; выражение в первой квадратной скобке зависит только от переменной x , а во второй квадратной скобке зависит только от переменной y . Поскольку x, y являются двумя независимыми переменными, уравнение (20) удовлетворяется только в том случае, если формулы в квадратных скобках являются константами, то есть:

$$f'_2(x) - \frac{P}{EJ_z} \left(lx - \frac{x^2}{2} \right) = C_4 ; \quad (21)$$

$$f'_1(y) + \frac{(2+\nu)P}{2EJ_z} y^2 = C_5 . \quad (22)$$

Интегрируя два приведенных выше выражения, находим функции $f_1(y)$ и $f_2(x)$:

$$f_2(x) = \frac{P}{EJ_z} \left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) + C_4 x + C_6 ; \quad (23)$$

$$f_1(y) = -\frac{(2+\nu)P}{6EJ_z} y^3 + C_5 y + C_7 . \quad (24)$$

Из формул (23) и (24) выражения для перемещения запишутся как:

$$u = \frac{P}{EJ_z} \left(-lxy + \frac{x^2y}{2} - \frac{(2+\nu)}{6} y^3 \right) + C_5y + C_7; \quad (25)$$

$$v = \frac{P}{2EJ_z} \left(\nu ly^2 - \nu xy^2 + lx^2 - \frac{x^3}{3} \right) + C_4x + C_6. \quad (26)$$

Для определения констант C_7 , C_6 используем граничное условие в точке O балки, т.е.:
 $x = 0, y = 0, u = v = 0.$ (27)

Подставив приведенные выше условия в формулу (25) и (26), получим $C_6 = C_7 = 0$ Для определения константы C_4 воспользуемся условием, что в заделке угол поворота между касательной и изогнутой оси балки равняется нулю, то есть:

$$x = 0, y = 0, \frac{\partial u}{\partial y} = 0. \quad (28)$$

Получим $C_4 = 0$. Согласно формуле (20), имеем:

$$C_4 + C_5 = \frac{(1+\nu)Ph^2}{4EJ_z}. \quad (29)$$

Подставив $C_4 = 0$ в (29), получим значение C_5 :

$$C_5 = \frac{(1+\nu)Ph^2}{4EJ_z}. \quad (30)$$

Таким образом, формулы определения перемещений имеют вид:

$$u = \frac{P}{EJ_z} \left(-lxy + \frac{x^2y}{2} - \frac{(2+\nu)}{6} y^3 \right); \quad (31)$$

$$v = \frac{P}{2EJ_z} (\nu ly^2 - \nu xy^2) + lx^2 - \frac{x^3}{3} + \frac{(1+\nu)h^2}{2} x. \quad (32)$$

Как видно из формулы (31), перемещение u нелинейно зависит от y и, следовательно, поперечные сечения балки, в том числе и в заделке не остаются плоскими.

В формуле (32) приняв $y = 0$, получим уравнение изогнутой оси балки:

$$v(x) = \frac{P}{EJ_z} \left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) + \frac{(1+\nu)Pl^2}{4EJ_z} \left(\frac{h}{l} \right)^2 x. \quad (33)$$

При $x = l$ формула (33) определяет значение прогиба балки:

$$v(l) = \frac{Pl^3}{3EJ_z} + \frac{(1+\nu)Pl^3}{4EJ_z} \left(\frac{h}{l} \right)^2. \quad (34)$$

Первые слагаемые в формулах (34) совпадают с выражениями для прогибов консольной балки, полученными в элементарной теории изгиба, основанной на гипотезе плоских сечений, а вторые, имеющие порядок величины $(h/l)^2$ по сравнению с первыми, учитывают влияние деформаций сдвига на прогибы.

3. Результаты исследования и их анализ

Для анализа влияния сдвиговой деформаций сдвига на прогиб и коробление поперечного сечения консольной балки, нагруженной сосредоточенной силой на ее конце, а также для оценки точности полученных расчетных формул рассмотрим следующий простой пример. Моделируем консольную балку длиной 3 м, один конец жестко зашпелен, а в другом приложена сосредоточенная нагрузка 3 кН. Сечение балки прямоугольное шириной $b = 200$ мм и высотой $h = 300$ мм. Балка изготовлена из изотропного упругого материала со следующими параметрами: модуль упругости $E = 2 \cdot 10^5$ МПа; коэффициент Пуассона $\nu = 0,3$. Для численного моделирования работы вышеуказанной консольной балки используем

программный комплекс Лира САПР, реализованный на базе метода конечных элементов (МКЭ). Триангулируем консольную балку на кубические конечные элементы (КЭ) с размерами $0,25 \times 0,25 \times 0,25$ м. Тип элементов выбран универсальный пространственный восьмиузловой изопараметрический – КЭ 36 (произвольный гексаэдр). Данный КЭ с тремя степенями свободы в узле предназначен для прочностного расчета континуальных объектов и массивных пространственных конструкций, он отлично подходит для моделирования рассмотренной выше задачи (Рисунок 2).

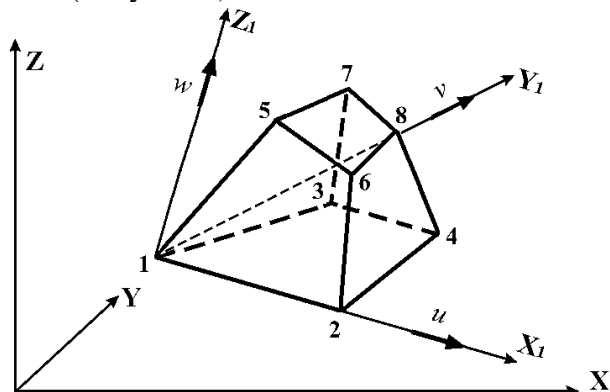


Рисунок 2 – Схематическое изображение КЭ 36 и последовательность нумерации его узлов

Конечно-элементная модель консольной балки показана на Рисунке 3. При этом сосредоточенная сила приложена в центр тяжести поперечного сечения свободного конца балки.

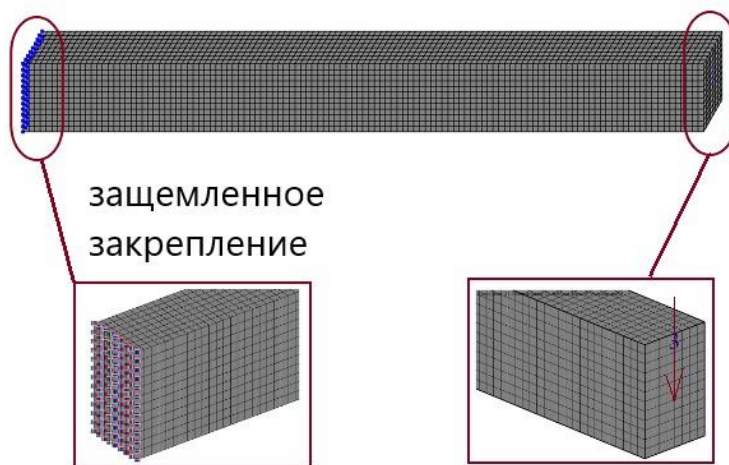


Рисунок 3 – Конечно-элементная модель консольной балки нагруженной сосредоточенной силой на ее конце

После расчет получим напряженно-деформационное состояние балки. На Рисунке 4 изображена исходная и деформированная схема балки под действием нагрузки. Видно, что у конца балки с жестким закреплением перемещения точек сечения равно нулю. В поперечных сечениях, постепенно удаленных от заделки перемещения постепенно увеличиваются и достигают максимального значения на свободном конце балки.

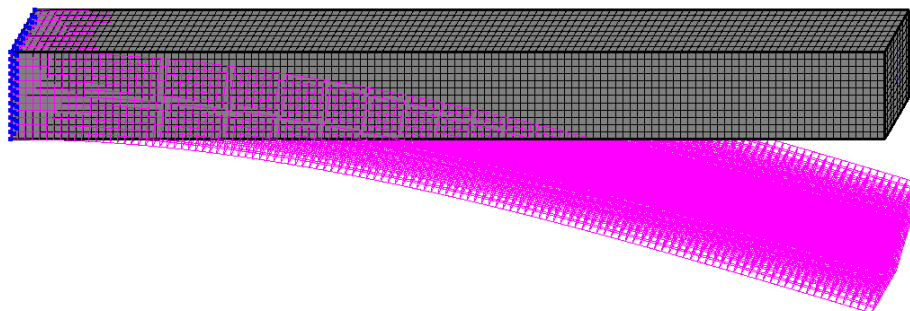


Рисунок 4 – Исходная и деформированная схема балки

Изополю перемещений в направлении сосредоточенной силы (по оси y) представлено на Рисунке 5. В сечении приложения сосредоточенной силы перемещение по y достигает максимального значения и равно 0,301 мм.

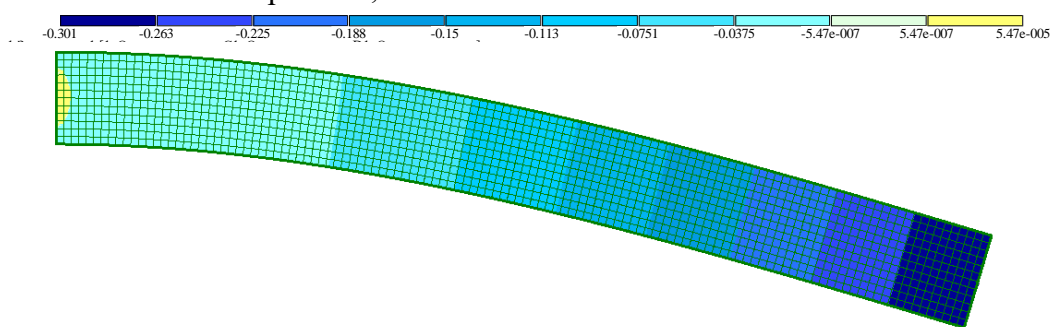


Рисунок 5 – Изополю перемещений по оси Oy

На Рисунке 6 показана мозаика нормальных напряжений σ_x балки. Видно, что нормальное напряжение положительное в верхней половине балки и отрицательное в нижней половине. У средних волокон нормальное напряжение σ_x равно 0 (нейтральная плоскость). Чем дальше от нейтральной плоскости положение изучаемой точки, тем абсолютная величина нормального напряжения σ_x больше. Максимального значения σ_x достигает у верхних и нижних волокон поперечного сечения балки. Кроме того, видно, что напряжения в верхних и нижних волокнах постепенно уменьшаются вдоль оси балки с увеличением координат x . Наибольшее значение нормальных напряжений получили в заделке на верхних и нижних волокнах сечения (3,1 МПа).

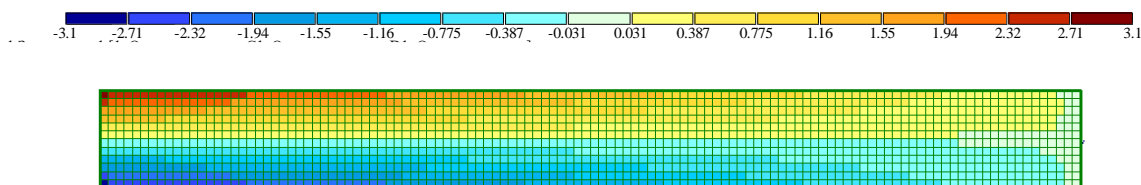


Рисунок 6 – Мозаика нормальных напряжений σ_x

Распределение касательных напряжений τ_{xy} представлено на Рисунке 7. В крайних зонах балки появляется концентрация напряжений. Данное явление выходит за рамки исследования статьи, поэтому рассмотрим только изменение касательных напряжения в сечениях вдали от конца балки. Видим, что напряжение τ_{xy} меняется по высоте поперечного сечения балки. У верхних и нижних волокон касательное напряжение имеет наименьшее

значение (0,0776 МПа), у средних волокон касательное напряжение имеет наибольшее значение (0,0113 МПа).

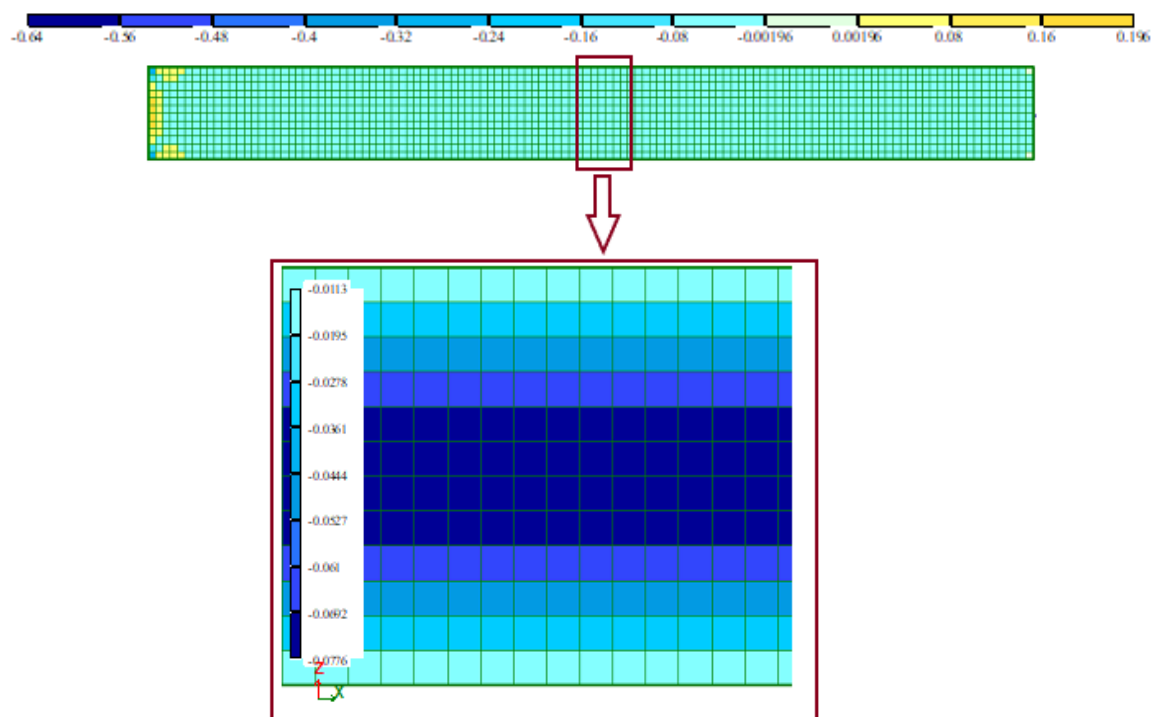


Рисунок 7 – Мозайка касательных напряжений τ_{yx}

Перемещение балки в направлении x рассмотрено на Рисунке 8. В частности, точки, расположенные над нейтральной плоскостью, будут иметь положительное перемещение. И наоборот, точки, расположенные ниже нейтральной плоскости, будут иметь отрицательное перемещение. Очевидно, что у нейтральной плоскости горизонтальное перемещение равно 0. В одном и том же сечении перемещение волокон вдали от нейтральной плоскости будет иметь наибольшую величину. По длине балки наибольшее горизонтальное перемещение достигается в конечном сечении, где приложена сосредоточенная сила ($u_{\max} = 0,0223$ мм).

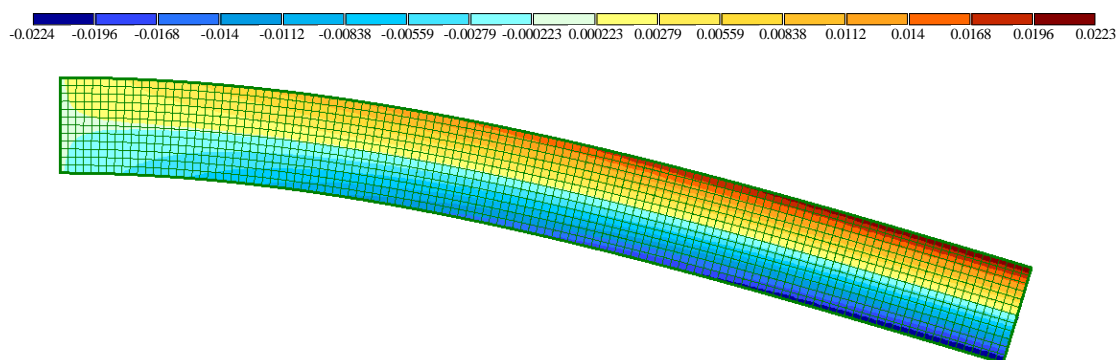


Рисунок 8 – Изополя перемещений по X

Теперь сравним полученные результаты численного анализа с аналитическим решением, приведенным в данной статье. Рассмотрим три характерных поперечных сечения балки. Секция 1-1 ($x=0$), секция 2-2 в середине балки ($x=1,5$ м) и секция 3-3 на конце

балки, где приложена сосредоточенная нагрузка ($x=3\text{м}$). Величину нормальных напряжений на этих сечениях определяют путем подстановки $x=0\text{ м}$, $x=1,5\text{ м}$ и $x=3\text{ м}$ в формулу (14):

$$\sigma_{x,1-1} = -\frac{3 \cdot 10^{-3} \cdot 3}{4,5 \cdot 10^{-4}} y + \frac{3 \cdot 10^{-3}}{4,5 \cdot 10^{-4}} 0 \cdot y = -20y [\text{МПа}]; \quad (35)$$

$$\sigma_{x,2-2} = -\frac{3 \cdot 10^{-3} \cdot 3}{4,5 \cdot 10^{-4}} y + \frac{3 \cdot 10^{-3}}{4,5 \cdot 10^{-4}} 1,5 \cdot y = -10y [\text{МПа}]; \quad (36)$$

$$\sigma_{x,3-3} = -\frac{3 \cdot 10^{-3} \cdot 3}{4,5 \cdot 10^{-4}} y + \frac{3 \cdot 10^{-3}}{4,5 \cdot 10^{-4}} 3 \cdot y = 0 [\text{МПа}]; \quad (37)$$

где $J_z = \frac{bh^3}{12} = \frac{0,2 \cdot 0,3^3}{12} = 4,5 \cdot 10^{-4} \text{ м}^4$.

На основе трех приведенных выше формул (35) – (37) построим диаграмму напряжений в сечениях 1-1, 2-2, 3-3 (Рисунок 9,б). Сравнивая результаты расчета, полученные путем численного моделирования в программе Лира САПР (Рисунке 9,а) и аналитического решения, видно, что разница между результатами незначительна. В сечении 1-1 максимальное напряжение равно 3 МПа из теоретического расчета, при расчете по методу конечных элементов значение в этой же точке составило 3,1 МПа. Таким образом, разница между двумя приведенными результатами составляет всего 3%. Можно предположить, что аналогичные выводы будут для всех сечений балки.

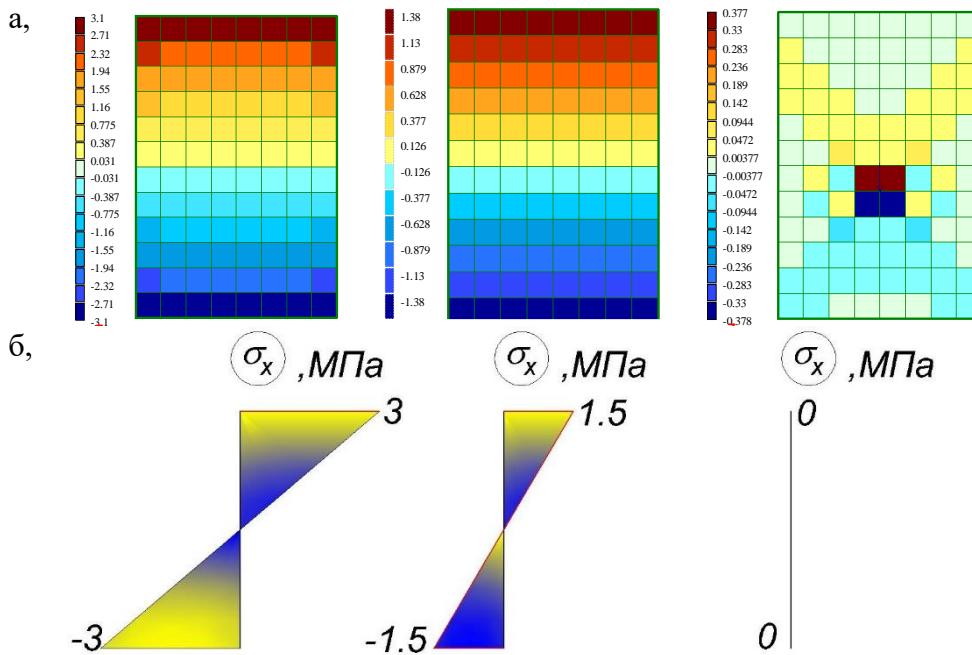


Рисунок 9 – Распределение нормальных напряжений в характерных сечениях балки (1-1, 2-2, 3-3): а) численный метод, б) аналитический метод

Касательные напряжения в балке определяются по формуле (14):

$$\tau_{xy} = \frac{3 \cdot 10^{-3} \cdot 0,3^2}{8 \cdot 4,5 \cdot 10^{-4}} - \frac{3 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 4,5 \cdot 10^{-4}} y^2 = 0,075 - \frac{10}{3} y^2. \quad (38)$$

Видно, что величина касательного напряжения не зависит от переменной x . То есть τ_{xy} вдоль продольного волокна имеет постоянное значение. В направлении y (по высоте балки) касательное напряжение изменяется по параболическому закону. На рисунке 10 представлено распределение напряжений τ_{xy} , рассчитанное численными методами и аналитическими методами. Установлено, что результаты численного метода близки к теоретическим

результатам только на участках, удаленных от торцов балки, поскольку в этих местах возникает концентрация напряжений.

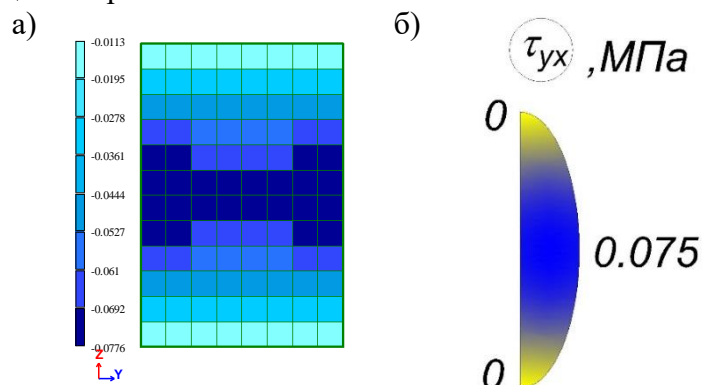


Рисунок 10 – Распределение касательных напряжений τ_{xy} : а) численным методом, б) аналитический метод

Для проверки гипотезы плоских сечений, согласно теории сопротивления материалов, определим горизонтальное перемещение на участках 1-1, 2-2, 3-3 по формуле (31):

$$u_{1-1} = \frac{3 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^5 \cdot 4,5 \cdot 10^{-4}} \left(-3 \cdot 0 \cdot y + \frac{0^2 \cdot y}{2} - \frac{(2+0,3)}{6} y^3 \right) = -0,0000128 y^3, \quad (39)$$

$$u_{2-2} = \frac{3 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^5 \cdot 4,5 \cdot 10^{-4}} \left(-3 \cdot 1,5 \cdot y + \frac{1,5^2 \cdot y}{2} - \frac{(2+0,3)}{6} y^3 \right), \quad (40)$$

$$= -0,0000128 \cdot y \cdot (y^2 + 8,804)$$

$$u_{3-3} = \frac{3 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^5 \cdot 4,5 \cdot 10^{-4}} \left(-3 \cdot 3 \cdot y + \frac{3^2 \cdot y}{2} - \frac{(2+0,3)}{6} y^3 \right) \quad (41)$$

$$= -0,0000128 \cdot y \cdot (y^2 + 11,739).$$

Из теоретических формул (39) – (41) построим диаграмму деформирования сечений 1-1, 2-2, 3-3 (Рисунок 11,б). На Рисунке 11,а показаны результаты расчета горизонтального перемещения в направлении x методом конечных элементов. Заметим, что изменение перемещений по сечению, рассчитанное двумя вышеуказанными методами, отличается незначительно.

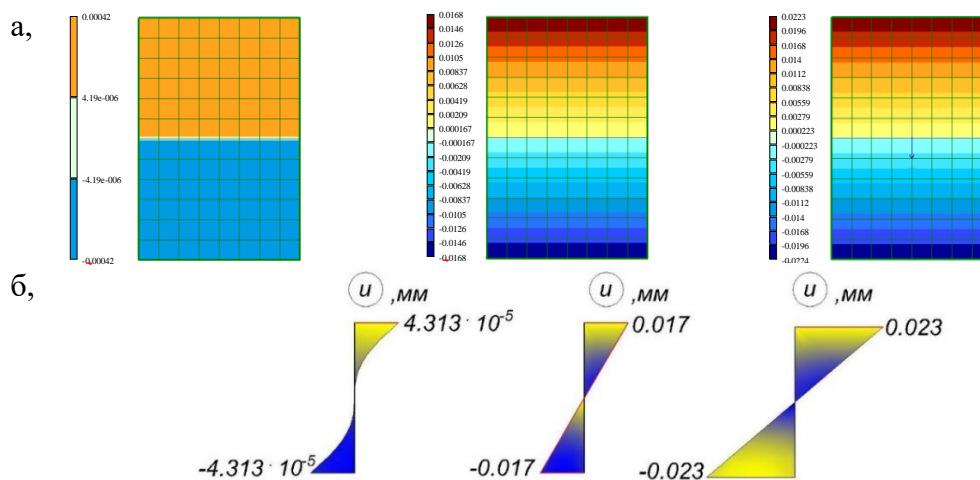


Рисунок 11 – Распределение перемещений в направлении x в характерных сечениях балки 1-1, 2-2, 3-3 соответственно: а) численное, б) аналитическое

Из формул (39) – (41) видно, что горизонтальное перемещение точек сечения зависит от координаты y по кубической функции, поэтому в общем случае сечение перестает быть плоским после приложения силы к свободному концу балки. Однако изменение перемещений на Рисунке 11,б показывает, что коробление сечения после приложения силы незначительно по сравнению с размерами сечения, и с относительной точностью можно принять гипотезу плоского сечения в теории изгиба балки.

Теоретический прогиб балки определяется подстановкой геометрических и механических характеристик балки в формулу (33):

$$v(x) = \frac{3 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^5 \cdot 4,5 \cdot 10^{-4}} \left(\frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) + \frac{(1+0,3) \cdot 3 \cdot 10^{-3} \cdot 3^2}{4 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 4,5 \cdot 10^{-4}} \left(\frac{0,3}{3} \right)^2 x \quad (42)$$

$$= -5,556 \cdot 10^{-6} x^3 + 5 \cdot 10^{-5} x^2 + 9,75 \cdot 10^{-7} x$$

На рисунке 12 изображено изменение прогиба балки, рассчитанного по формуле (33) и по методу конечных элементов. Заметим, что результаты этих двух методов практически не отличаются.

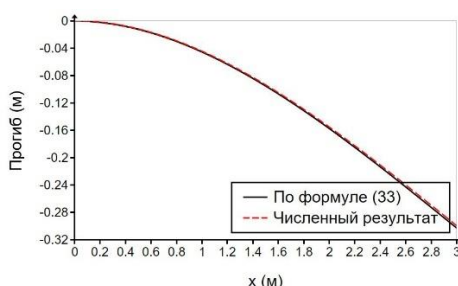


Рисунок 12 – Изменение прогиба балки по формуле (33) и по методу конечных элементов

Чтобы рассмотреть влияние сдвиговой деформации на прогиб балки, рассмотрим три случая балок с разными соотношениями h/l . Случай 1 – балка сечения $b \times h = 200 \times 300$ мм ($h/l = 300/3000 = 1/10$); Случай 2 – увеличиваем высоту балки до 600 мм, тогда $h/l = 600/3000 = 1/5$; Случай 3 – высота сечения равна 1000, то есть $h/l = 1000/3000 = 1/3$. Подставив приведенные выше параметры в первое слагаемое формулы (33), получим прогиб балки без учета сдвиговой деформации. Это значение прогиба представлено черной линией на Рисунке 13. Чтобы учесть влияние сдвиговой деформации, подставляем входные параметры во всю формулу (33) и получаем красную кривую прогиба на рисунке 13.

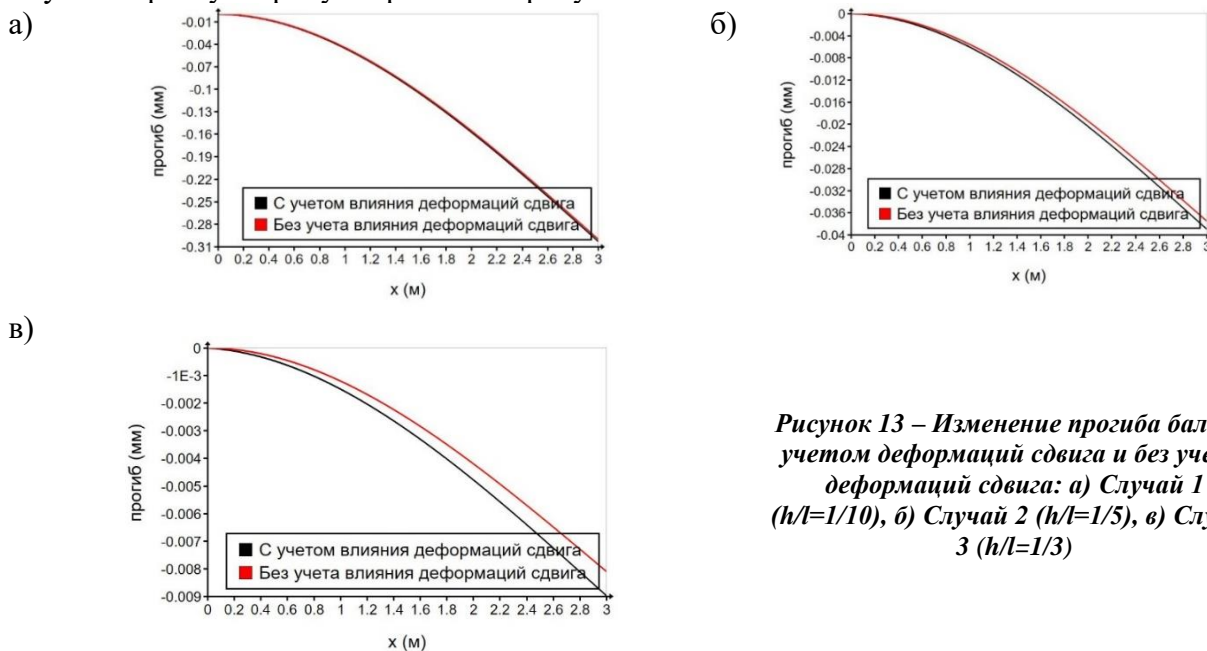


Рисунок 13 – Изменение прогиба балки с учетом деформаций сдвига и без учета деформаций сдвига: а) Случай 1 ($h/l=1/10$), б) Случай 2 ($h/l=1/5$), в) Случай 3 ($h/l=1/3$)

В трех вышеуказанных случаях черная линия всегда находится ниже красной линии. Это доказывает, что сдвиговая деформация способствует уменьшению прогиба балки. При небольшой высоте балки (соответствует случаю 1: $h/l=1/10$) влияние сдвиговой деформации на прогиб балки незначительно. По мере увеличения высоты поперечного сечения балки расстояние между двумя приведенными выше кривыми увеличивается. По мере увеличения отношения h/l сдвиговая деформация оказывает более существенное влияние на прогиб балки.

При $h/l < 1/5$ влиянием сдвиговой деформации на прогиб балки можно пренебречь. Напротив, для балок большой высоты (балка-стенка с $h/l > 1/5$) учет деформаций сдвига способствует уменьшению полученного теоретического прогиба. Другими словами, это помогает более точно описать поведение балки большой высоты.

4. Заключение

1. Применен полуобратный метод с использованием алгебраических полиномов функции напряжения для определения напряженно-деформированного состояния конструкции консольной балки прямоугольного сечения, нагруженной сосредоточенной силой на ее свободном конце.

2. Достоверность описанного метода проверена путем сравнения результатов расчета с численным методом (МКЭ), реализуемым программой «Ли́ра САПР».

3. Горизонтальное перемещение по направлению x получено из полуобратного метода подчиняется функции 3-го порядка. Следовательно, можно сделать вывод, что под действием сосредоточенной силы на конце консольной балки поперечное сечение перестает быть плоским, оно деформируется.

4. Показано, что сдвиговая деформация существенно влияет на прогиб балок при $h/l > 1/5$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Levin V.A., Podladchikov Y.Y., Zingerman K.M. An exact solution to the Lamé problem for a hollow sphere for new types of nonlinear elastic materials in the case of large deformations // *European Journal of Mechanics - A/Solids*. 2021. № 90.
2. Liu D., Li L. The coupling system of Navier–Stokes equations and elastic Navier–Lame equations in a blood vessel // *Numerical Methods for Partial Differential Equations*. 2020. № 5(36).
3. Miroshnikov V.Y. Stress State of an Elastic Layer with a Cylindrical Cavity on a Rigid Foundation // *International Applied Mechanics*. 2020. № 3(56). С. 372–381.
4. Nahirnyj T., Sasiadek M., Tchervinka K. Modeling the effect of surface roughness on mechanical fields in an elastic solid bounded by nominally flat surfaces // *International Journal of Solids and Structures*. 2024. № 302.
5. Trubitsyn V.P., Trubitsyn A.P. Comparative Analysis and Unified Derivation of Reissner's Equations for 2D Bending of Thick Plates and Timoshenko's Equations for Bending of Beams // *Izvestiya, Physics of the Solid Earth*. 2024. № 2(60). С. 258–269.
6. Svetashkov A.A. et al. Variable separation method for solving boundary value problems of isotropic linearly viscoelastic bodies // *Acta Mechanica*. 2020. № 9(231). С. 3583–3606.
7. Nguyen-Hoang M., Becker W. Stress analysis of finite dimensions bolted joints using the Airy stress function // *International Journal of Solids and Structures*. 2021. № 224.
8. Jiang Q., Zhou Z., Chen J., Yang F. The method of fundamental solutions for two-dimensional elasticity problems based on the Airy stress function // *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 2021. № 130. С. 220–237.
9. Kumari S., Pardeep, Bandhu D. Stress analysis of an infinite plate with single hole by using Airy's stress function // *Materials Today: Proceedings*. 2022. № 62. С. 3289–3294.
10. Timoshenko S.P., Goodier J.N. *Theory of Elasticity*. New York: McGraw Hill, 1970. 263 с.
11. Lekhnitskii S.G. *Anisotropic Plate*. New York: Gordon and Breach, 1968. 534 с.
12. Ahmed S.R., Idris B.M., Uddin M.W. Numerical solution of both ends fixed deep beams // *Computers & Structures*. 1996, № 61(1). С. 21–29.
13. Jiang A.M., Ding HJ. The analytical solutions for orthotropic cantilever beams (I): Subjected to surface forces // *Journal of Zhejinag University*. 2005, № 6A(2). С. 126–131.
14. Iakovenko A. I., Kolchunov I. V. The development of fracture mechanics hypotheses applicable to the calculation of reinforced concrete structures for the second group of limit states // *Journal of Applied Engineering Science*. 2017. №. 3(15).
15. Kolchunov V., Dem'yanov A., Protchenko M. The new hypothesis angular deformation and filling of diagrams in bending with torsion in reinforced concrete structures // *Journal of Applied Engineering*. 2021. №. 4(19). С. 972–979.

16. Poliotti M., Bairán J. M. B-spline sectional model for general 3D effects in reinforced concrete elements // *Engineering Structures*. 2020. №. 207.
17. Jiang C., Ding H., Gu X.L., Zhang W.P. Failure mode-based calculation method for bending bearing capacities of normal cross-sections of corroded reinforced concrete beams // *Engineering Structures*. 2022. №. 258.
18. Nasser H. et al. An experimental assessment of corrosion damage and bending capacity reduction of singly reinforced concrete beams subjected to accelerated corrosion // *Construction and Building Materials*. 2021. №. 286.
19. Kosior-Kazberuk M., Kochkarev D., Azizov T., Galinska T. Approximation Model of the Method of Design Resistance of Reinforced Concrete for Bending Elements // *Lecture Notes in Civil Engineering*. 2022. №. 181. C. 245–254. DOI:10.1007/978-3-030-85043-2_23/TA.
20. Nuguzhinov Z.S., Bakirov Z.B., Vatin N.I., Bakirov M.Z., Kurokhtina I.A., Tokanov D.T., Khabi-dolda O. Stress Intensity Factor of Reinforced Concrete Beams in Bending // *Buildings*. 2021. № 7(11). DOI:10.3390/BUILDINGS11.

REFERENCES

1. Levin V.A., Podladchikov Y.Y., Zingerman K.M. An exact solution to the Lamé problem for a hollow sphere for new types of nonlinear elastic materials in the case of large deformations. *European Journal of Mechanics - A/Solids*. 2021. No. 90.
2. Liu D., Li L. The coupling system of Navier–Stokes equations and elastic Navier–Lame equations in a blood vessel. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*. 2020. Vol. 36. No. 5.
3. Miroshnikov V.Y. Stress State of an Elastic Layer with a Cylindrical Cavity on a Rigid Foundation. *International Applied Mechanics*. 2020. Vol. 56. No. 3. Pp. 372–381.
4. Nahimyj T., Szaśiadek M., Tchervinka K. Modeling the effect of surface roughness on mechanical fields in an elastic solid bounded by nominally flat surfaces. *International Journal of Solids and Structures*. 2024. No. 302.
5. Trubitsyn V.P., Trubitsyn A.P. Comparative Analysis and Unified Derivation of Reissner’s Equations for 2D Bending of Thick Plates and Timoshenko’s Equations for Bending of Beams. *Izvestiya, Physics of the Solid Earth*. 2024. Vol. 60. No. 2. Pp. 258–269.
6. Svetashkov A.A. et al. Variable separation method for solving boundary value problems of isotropic linearly viscoelastic bodies. *Acta Mechanica*. 2020. Vol. 231. No. 9. Pp. 3583–3606.
7. Nguyen-Hoang M., Becker W. Stress analysis of finite dimensions bolted joints using the Airy stress function. *International Journal of Solids and Structures*. 2021. No.224.
8. Jiang Q., Zhou Z., Chen J., Yang F. The method of fundamental solutions for two-dimensional elasticity problems based on the Airy stress function. *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 2021. No.130. Pp. 220–237.
9. Kumari S., Pardeep, Bandhu D. Stress analysis of an infinite plate with single hole by using Airy’s stress function. *Materials Today: Proceedings*. 2022. No.62. Pp. 3289–3294.
10. Timoshenko S.P., Goodier J.N. *Theory of Elasticity*. New York: McGraw Hill, 1970. 263 p.
11. Lekhnitskii S.G. *Anisotropic Plate*. New York: Gordon and Breach, 1968. 534 p.
12. Ahmed S.R., Idris B.M., Uddin M.W. Numerical solution of both ends fixed deep beams. *Computers & Structures*. 1996, Vol. 1. No.61. Pp. 21–29.
13. Jiang A.M., Ding HJ. The analytical solutions for orthotropic cantilever beams (I): Subjected to surfaceforces. *Journal of Zhejinag University*. 2005, Vol. 2. No.6A. Pp. 126–131.
14. Iakovenko A. I., Kolchunov I. V. The development of fracture mechanics hypotheses applicable to the calculation of reinforced concrete structures for the second group of limit states. *Journal of Applied Engineering Science*. 2017. Vol. 15. No. 3.
15. Kolchunov V., Dem’yanov A., Protchenko M. The new hypothesis angular deformation and filling of diagrams in bending with torsion in reinforced concrete structures. *Journal of Applied Engineering*. 2021. Vol. 19. No. 4. Pp. 972-979.
16. Poliotti M., Bairán J. M. B-spline sectional model for general 3D effects in reinforced concrete elements. *Engineering Structures*. 2020. No. 207.
17. Jiang C., Ding H., Gu X.L., Zhang W.P. Failure mode-based calculation method for bending bearing capacities of normal cross-sections of corroded reinforced concrete beams. *Engineering Structures*. 2022. No. 258.
18. Nasser H. et al. An experimental assessment of corrosion damage and bending capacity reduction of singly reinforced concrete beams subjected to accelerated corrosion. *Construction and Building Materials*. 2021. No. 286.
19. Kosior-Kazberuk M., Kochkarev D., Azizov T., Galinska T. Approximation Model of the Method of Design Resistance of Reinforced Concrete for Bending Elements. *Lecture Notes in Civil Engineering*. 2022. No. 181. Pp. 245–254. DOI:10.1007/978-3-030-85043-2_23/TA.
20. Nuguzhinov Z.S., Bakirov Z.B., Vatin N.I., Bakirov M.Z., Kurokhtina I.A., Tokanov D.T., Khabi-dolda O. Stress Intensity Factor of Reinforced Concrete Beams in Bending. *Buildings*. 2021. Vol. 11. No.7. DOI:10.3390/BUILDINGS11.

Информация об авторах

Ву Нгок Туен

ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет» (НИУ МГСУ), г. Москва, Россия,
кандидат технических наук, доцент кафедры Фундаментального образования,
E-mail: WuNgokTuen@gic.mgsu.ru

Басова Дарья Николаевна

ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет» (НИУ МГСУ), г. Москва, Россия,
студентка кафедры Фундаментального образования,
E-mail: dbasova822@gmail.com

Масленников Максим Дмитриевич

ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет» (НИУ МГСУ), г. Москва, Россия,
студент кафедры Фундаментального образования,
E-mail: maksimmaslennikov5@gmail.com

Ле Минь Туан

ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (НИУ ВШЭ)», г. Москва, Россия,
кандидат технических наук, доцент факультета гуманитарных наук,
E-mail: architect290587@gmail.com

Information about authors

Vu Ngoc Tuyen

Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russia,
Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Fundamental Education,
E-mail: WuNgokTuen@gic.mgsu.ru

Basova Daria N.

National Research Moscow State University of Civil Engineering (NRU MGSU), Moscow, Russia,
Student, Department of Fundamental Education,
E-mail: dbasova822@gmail.com

Maslennikov Maxim D.

National Research Moscow State University of Civil Engineering (NRU MGSU), Moscow, Russia,
Student, Department of Fundamental Education,
E-mail: maksimmaslennikov5@gmail.com

Le Minh Tuan

National Research University "Higher School of Economics" (HSE University), Moscow, Russia,
Ph.D. in Technical Sciences, Associate Professor, Faculty of Humanities,
E-mail: architect290587@gmail.com

Статья поступила в редакцию 19.01.2026
Одобрена после рецензирования 08.02.2026
Принята к публикации 10.02.2026

The article was submitted 19.01.2026
Approved after reviewing 08.02.2026
Accepted for publication 10.02.2026